

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. О. Гулканян

О кручении призматических стержней
 с прямоугольным поперечным сечением
 при наличии продольных трещин

В работе приводится точное решение задачи о кручении призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии продольных трещин. При этом рассматриваются случаи односторонней, двусторонней и внутренней трещины произвольной длины (фиг. 1, 2 и 3). Полученные решения позволяют исследовать вопрос о влиянии глубины трещины на жесткость стержня в указанных случаях, а также определить значения максимальных напряжений в поперечных сечениях.

Получены формулы для определения функции напряжений $U(x, y)$ и жесткости C . В качестве числового примера рассмотрен случай квадратного сечения. Полученные количественные результаты сведены в таблицы 3 и 6.

1. Кручение призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии односторонней продольной трещины

1. *Постановка задачи. Сведение решения задачи к бесконечной системе линейных уравнений.* Определение функции напряжения $U(x, y)$ при кручении призматических стержней с односвязным поперечным сечением сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \quad (1.1)$$

при условии

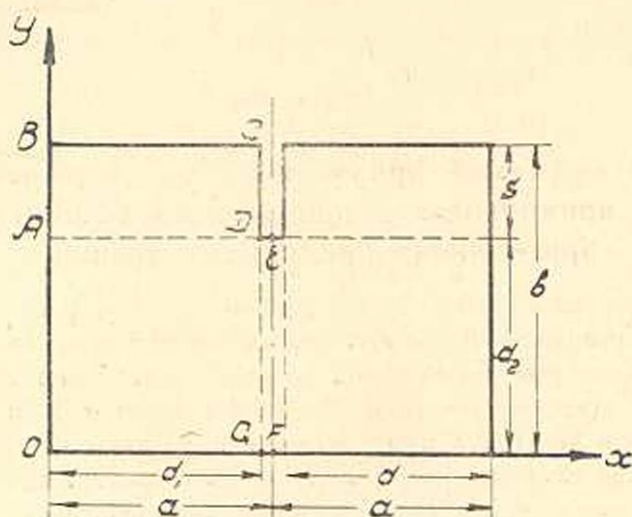
$$U = 0 \text{ на контуре сечения.} \quad (1.2)$$

В силу симметрии поперечного сечения и граничных условий относительно оси EF (фиг. 1) функция напряжений $U(x, y)$ будет также симметричной. Следовательно, достаточно определить функцию $U(x, y)$ в области $OBCDEF$, требуя при этом, чтобы ее нормальная производная на оси симметрии равнялась нулю

$$\left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (1.3)$$

Положим, что функция

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{в области } OAEF \\ U_2(x, y) & \text{в области } OBCG. \end{cases} \quad (1.4)$$



фиг. 1

Следуя методу вспомогательных функций Н. Х. Арутюняна [1], функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ ищем в форме

$$U_1(x, y) = \Psi_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } DEFG \\ \Phi_1(x, y) & \text{в области } OADG, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$U_2(x, y) = \Psi_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } ABCD \\ \Phi_2(x, y) & \text{в области } OADG, \end{cases}$$

где в силу (1.1) Ψ_1 и Ψ_2 должны удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Psi_1 = -2 \quad \text{и} \quad \nabla^2 \Psi_2 = -2, \quad (1.6)$$

а вспомогательные функции Φ_1 и Φ_2 — уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0, \quad \nabla^2 \Phi_2 = 0. \quad (1.7)$$

При этом, согласно (1.2) и (1.3), эти функции должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, d_2) &= 0, \quad \Psi_1(x, 0) = 0, \quad \Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = 0, \\ \Psi_2(x, b) &= 0, \quad \Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0, \quad \Psi_2(0, y) = 0, \\ \Psi_2(d_1, y) &= 0, \quad \Phi_1(x, 0) = 0, \quad \Phi_2(0, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для непрерывности решения Φ_1 и Φ_2 на линиях контакта областей должны удовлетворять также условиям

$$\Phi_1(x, d_2) = \Psi_2(x, d_2), \quad \Phi_1(d_1, y) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=d_1} = 0, \quad (1.9)$$

$$\Phi_2(x, d_2) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{y=d_2} = 0, \quad \Phi_2(d_1, y) = \Psi_1(d_1, y).$$

Функции $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ будем искать в виде

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \quad (1.10)$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1}.$$

Граничные условия для определения $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ неоднородны. Следуя идее Гринберга [2], решение для функций $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ будем искать в таком же виде, как и при однородных граничных условиях

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2},$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_1(x, y) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy,$$

и

(1.11)

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1},$$

где

$$W_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_2(x, y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx.$$

Уравнения (1.5) — (1.11) полностью определяют функцию напряжения $U(x, y)$ в области OBCDEF, так как определение $f_k(x)$, $\varphi_k(x)$, $V_k(y)$ и $W_k(y)$ сводится к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

В силу (1.6) и (1.10) имеем

$$f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 f_k(x) = -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}], \quad (1.12)$$

$$V_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 V_k(y) = -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}].$$

Умножив уравнения (1.7) соответственно на $\frac{2}{d_2} \sin \frac{\kappa \pi y}{d_2}$ и на $\frac{2}{d_1} \sin \frac{\kappa \pi x}{d_1}$ и интегрируя первое из них по „y“ от нуля до d_2 , а второе по „x“ от нуля до d_1 , а также пользуясь условиями (1.8) и (1.9), получим:

$$\varphi_k''(x) - \left(\frac{\kappa \pi}{d_2}\right)^2 \varphi_k(x) = (-1)^k \frac{2\kappa \pi}{d_2^2} \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_2) \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_1}, \quad (1.13)$$

$$W_k''(y) - \left(\frac{\kappa \pi}{d_1}\right)^2 W_k(y) = (-1)^k \frac{2\kappa \pi}{d_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_1) \cdot \sin \frac{p \pi y}{d_2}.$$

Из граничных условий (1.8) и (1.9) следует

$$f_k(a) = V_k(b) = \varphi_k(d_1) = W_k(d_2) = W_k'(d_2) = 0, \quad (1.14)$$

$$f_k(0) + \varphi_k(0) = 0, \quad V_k(0) + W_k(0) = 0. \quad (1.15)$$

Общие решения уравнений (1.12) и (1.13) на основании условий (1.14) будут

$$\begin{aligned} f_k(x) &= B_k \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{d_2}(a-x)}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi a}{d_2}} + \frac{4d_2^2}{(\kappa \pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}], \\ V_k(y) &= N_k \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_1}(b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d_1}} + \frac{4d_1^2}{(\kappa \pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d_1}} \right], \\ \varphi_k(x) &= (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_2}(x-d_1) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p V_p(d_2)}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_1}{d_2}\right)^2} - \\ &\quad - (-1)^k \frac{2\kappa}{\pi} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{V_p(d_2) \cdot \sin \frac{p \pi x}{d_1}}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_1}{d_2}\right)^2}, \\ W_k(y) &= (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_1}(y-d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p f_p(d_1)}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_2}{d_1}\right)^2} - \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$-(-1)^k \frac{2\kappa}{\pi} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) \cdot \sin \frac{p\pi y}{d_2}}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{d_1}\right)^2}.$$

Подставляя в (1.15) значения $f_k(x)$, $V_k(y)$, $\varphi_k(x)$ и $W_k(y)$ из (1.16), получим две бесконечные системы линейных уравнений вида

$$B_k = (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} N_p \frac{p(-1)^p}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_1}{d_2}\right)^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b-d_2)}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}} -$$

$$-(-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2} \cdot \left(\frac{8d_1^2}{\pi^8}\right) \cdot \sum_{p=1,3}^{\infty} \frac{\frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1}}{1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}}}}{p^2 \left[p^2 + \left(\frac{\kappa d_1}{d_2}\right)^2\right]} -$$

$$- \frac{4d_2^2}{(\kappa\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}], \quad (1.17)$$

$$N_k = (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} B_p \frac{p(-1)^p}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{d_1}\right)^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_2}} -$$

$$-(-1)^k \frac{2}{(\kappa\pi)^2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \left(1 - \frac{2}{\kappa\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi d_2}{2d_1}\right) -$$

$$- \frac{4d_1^2}{(\kappa\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}].$$

2. *Исследование и решение бесконечных систем.* Введем в (1.17) следующие обозначения:

$$B_k = S_k \cdot d_1 \cdot d_2 \frac{(-1)^k}{\kappa} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2},$$

$$N_k = R_k \cdot \alpha \cdot d_1 \cdot d_2 \frac{(-1)^k}{\kappa} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1}.$$
(2.1)

Тогда бесконечная система (1.17) будет приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} R_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} S_p + \alpha_k \\ S_k = \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} R_p + \beta_k \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{где } a_{kp} &= \frac{2k}{\pi\alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a - d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_2}} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(k \frac{d_2}{d_1}\right)^2}, \\ c_{kp} &= \frac{2k\alpha}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b - d_2)}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(k \frac{d_1}{d_2}\right)^2}, \\ \alpha_k &= -\frac{2}{k\pi^2\alpha} \cdot \left(1 - \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1}\right) + \frac{4}{k^2\pi^3} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= -\frac{16k}{\pi^4} \cdot \frac{d_1}{d_2^2} \cdot \sum_{p=1,3}^{\infty} \frac{1}{p^2 \left[p^2 + \left(k \frac{d_1}{d_2}\right)^2 \right]} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}}\right) + \\ &+ \frac{4}{k^2\pi^3} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $R_k = Z_{2k-1}$, $S_k = Z_{2k}$, $\alpha_k = B_{2k-1}$, $\beta_k = B_{2k}$,

$$A_{2k,2p} = A_{2k-1,2p-1} = 0, \quad a_{kp} = A_{2k-1,2p}, \quad c_{kp} = A_{2k,2p-1}, \quad (2.4)$$

совокупность двух бесконечных систем (2.2) приведем к одной бесконечной системе следующего вида:

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} A_{\nu p} Z_p + B_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

где $A_{\nu p}$ и B_ν определяются соотношением (2.4).

Из теории вполне регулярных систем [3] известно, что, если

$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{\nu p}| < 1 - \theta$ для любого ν и $\theta > 0$ и свободные члены системы ограничены $|B_\nu| \leq M$, то система имеет ограниченные решения, удовлетворяющие неравенству $|Z_\nu| \leq K = \frac{M}{\theta}$.

Покажем, что бесконечная система (2.5) вполне регулярна. Пусть $\nu = 2\kappa - 1$. Тогда

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{2\kappa-1,p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2\kappa}{\pi\alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{d_1}\right)^2}.$$

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a - d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_2}} < \frac{2\kappa}{\pi\alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a - d_1)}\right).$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{d_1}\right)^2} = \frac{\kappa}{\pi\alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a - d_1)}\right) \cdot \frac{\pi d_1}{2\kappa d_2} \left(\operatorname{cth} \frac{d_2}{d_1} \kappa\pi - \frac{d_1}{\kappa\pi d_2}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a - d_1)}\right) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Пусть $\nu = 2\kappa$, тогда

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{2\kappa,p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| = \frac{2\kappa}{\pi} \alpha \cdot \frac{d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_1}{d_2}\right)^2}.$$

$$\frac{\operatorname{sh} p\pi \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b - d_2)}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}} < \frac{2\kappa\alpha}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_1}{d_2}\right)^2} = \frac{\kappa\alpha}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{\pi d_2}{2\kappa d_1} \left(\operatorname{cth} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2} - \frac{d_2}{\kappa\pi d_1}\right) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

При этом использованы следующие неравенства:

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a - d_1) < \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a - d_1)}\right),$$

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b - d_2) < \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \leq 1, \quad (0 < x \leq \infty).$$

Выберем α так, чтобы $\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{2}$, т. е. $\alpha = \sqrt{2}$. Тогда для любого

го $\nu \sum_{p=1}^{\infty} |A_{\nu,p}| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. система (2.5) вполне регулярна и

$$\theta = 0,29289.$$

Свободный член В системы (2.5) ограничен.

$$|z_k| \leq 0,14329 + 0,18244 \cdot \frac{1}{\frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi d_2}{d_1}},$$

$$|\beta_k| \leq 0,20264 + 0,25801 \cdot \frac{1}{\frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi d_1}{d_2}}.$$

Обозначим значения неизвестных Z_ν с избытком через $\bar{Z}_\nu$, а с недостатком через $\tilde{Z}_\nu$, т. е.

$$\bar{Z}_\nu \leq Z_\nu \leq \tilde{Z}_\nu.$$

В случае систем с положительными коэффициентами [3] нахождение конечного числа неизвестных Z_N сводится к решению двух систем

$$\bar{Z}_\nu - \tilde{Z}_\nu = \sum_{p=1}^N A_{\nu,p} (\bar{Z}_p - \tilde{Z}_p) + 2\kappa \cdot \sum_{p=N+1}^{\infty} A_{\nu,p}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

$$\bar{Z}_\nu + \tilde{Z}_\nu = \sum_{p=1}^N A_{\nu,p} (\bar{Z}_p + \tilde{Z}_p) + 2B_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \dots, N).$$

Применение лимитант, введенных Кояловичем [3], позволяет оценивать значения неизвестных для $\nu (\nu \geq N+1)$ и уточнить полученные оценки для неизвестных $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$.

В качестве примера рассмотрен квадрат $\left(a = \frac{b}{2}\right)$ с трещиной различной длины S .

Поскольку ширина трещины принимается за нуль, то при вычислениях полагаем $d_1 = a$. После применения лимитант получим следующие оценки для неизвестных (табл. 1 и 2):

Таблица 1

S/b	1/4	1/2	3/4
$\bar{Z}_1$	-0,11168	-0,08660	0,0788
$\bar{Z}_2$	0,01017	-0,09752	-0,18508
$\bar{Z}_3$	-0,11382	-0,12697	-0,11352
$\bar{Z}_4$	-0,10792	-0,14089	-0,16072
$\bar{Z}_{n \geq 5}$	-0,13524	-0,14801	-0,16259

Таблица 2

S/b	1/4	1/2	3/4
$\bar{Z}_1$	-0,09773	-0,06977	0,09404
$\bar{Z}_2$	0,02056	-0,08069	-0,15409
$\bar{Z}_3$	-0,09201	-0,07320	-0,08841
$\bar{Z}_4$	-0,09119	-0,08712	-0,11845
$\bar{Z}_{n \geq 5}$	-0,08229	0	-0,07804

3. *Определение функции напряжений.* Полагая $d_1 = a$ из (1.5), (1.10), (1.11), (1.16), (2.1) и (2.4) для функции напряжений $U(x, y)$ получим следующее выражение:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} ad_2 \frac{(-1)^k}{k} \cdot Z_{2k-1} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2k\pi y}{a} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{2k\pi y}{a} \right) + \frac{4a^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} \right] \right\} \cdot \sin \frac{k\pi x}{a}$$

в области ABCD,

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{a} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} ad_2 \frac{(-1)^k}{k} \cdot Z_{2k-1} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}} \cdot \right. \quad (3.1) \\ \left. \cdot \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2k\pi y}{a} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{2k\pi y}{a} \right) + \frac{4a^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\}.$$

$$\cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{a}} \right] + (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{a} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p (-1)^p f_p(a)}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a} \right)^2} -$$

$$- (-1)^k \frac{2\kappa}{\pi} \left(\frac{d_2}{a} \right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(a) \cdot \sin \frac{p \pi y}{d_2}}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a} \right)^2} \Bigg\} \text{ в области } OA EF,$$

где
$$f_p(a) = \frac{(-1)^p}{p} a d_2 \cdot Z_{2p} \cdot \operatorname{th} \frac{p \pi a}{d_2} + \frac{4 d_2^2}{(p \pi)^3} [1 + (-1)^{p+1}]. \quad (3.2)$$

4. *Определение жесткости при кручении.* Жесткость при кручении определяется по формуле

$$C = 2G\Theta \iint_{\Omega} U(x, y) dx \cdot dy,$$

где Ω — область поперечного сечения стержня,
 G — модуль сдвига,
 Θ — угол закручивания стержня на единицу длины.

$$C = 4G\Theta \left[\iint_{\Omega} U(x, y) dx dy + \int_0^a \int_{d_2}^b U(x, y) dx \cdot dy \right]. \quad (4.1)$$

Подставляя выражение $U(x, y)$ из (3.1) в (4.1), для вычисления жесткости C получим следующую формулу:

$$C = 4G\Theta b^4 \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{a}{b} \right)^3 - \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{a}{b} \right)^4 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{\kappa \pi b}{2a} - \right.$$

$$\left. - \frac{16}{\pi^5} \left(\frac{a}{b} \right)^4 \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{\kappa \pi d_2}{2a} + \frac{d_2}{b} \cdot \frac{2 \sqrt{2}}{\pi^2} \left(\frac{a}{b} \right)^3 \cdot \right.$$

$$\cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{a} \left(\frac{b}{2} - d_2 \right)}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi b}{2a}} - 1 \right] \cdot Z_{2k-1} - \left(\frac{d_2}{b} \right)^2 \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \left(\frac{a}{b} \right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{2d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{d_2} \cdot Z_{2k} + \left(\frac{d_2}{b} \right)^4 \cdot \frac{16}{\pi^6} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{2d_2} \Bigg\}.$$

В случае квадратного сечения (т. е. при $a = \frac{b}{2}$) формула для жесткости C будет:

$$\begin{aligned}
C = 4G\Theta b^4 \left\{ 0,01756 - \frac{1}{\pi^5} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi d}{b} + \frac{d}{b} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \right. \\
\cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} Z_{2k-1} \left[\frac{\operatorname{ch} k\pi \left(2 \frac{d}{b} - 1 \right)}{\operatorname{ch} k\pi} - 1 \right] - \left(\frac{d}{b} \right)^3 \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \\
\cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot Z_{2k} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b}{4d} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} + \left(\frac{d}{b} \right)^4 \cdot \frac{16}{\pi^5} \cdot \\
\left. \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b}{4d} \right\}. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Подставляя значения $\bar{Z}_k$ и $\bar{Z}_k$ в (4.3), получим верхнюю и нижнюю границы для жесткости C , причем значениям $\bar{Z}_k$ будет соответствовать нижняя граница жесткости $\bar{C}$, а значениям $\bar{Z}_k$ — верхняя граница жесткости $\bar{C}$.

Ниже, в таблице 3, приводятся значения жесткости C для стержня квадратного сечения с продольной трещиной при различной ее длине S .

Таблица 3

S/b	3/4	1/2	1/4	0
$\bar{C}/Gb^4$	0,061	0,079	0,116	0,141
$\bar{C}/Gb^4$	0,062	0,081	0,119	0,141

5. *Определение напряжений.* Напряжения τ_{xz} и τ_{yz} определяются из соотношений

$$\tau_{xz} = G\Theta \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -G\Theta \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Подставляя значение $U(x,y)$ из (3.1) в (6.1), получим:

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{a} \left\{ 1 - \frac{d}{a} \pi (-1)^k \cdot Z_{2k-1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{2k\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}} \cdot \right. \\
\left. \cdot \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a} \cdot \left(1 - \operatorname{cth} \frac{k\pi y}{a} \cdot \operatorname{cth} \frac{2k\pi y}{a} \right) - \frac{4a}{(\kappa\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} \right\}
\end{aligned}$$

в области ABCD,

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot d_2 \pi \cdot (-1)^k \cdot Z_{2k-1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_2}{a} \cdot \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi b}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{2\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi y}{a}} \right. \\ \cdot \left(1 - \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi y}{a} \cdot \operatorname{cth} \frac{2\kappa \pi y}{a} \right) - \frac{4a}{(\kappa \pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{a}} + \\ + (-1)^k \cdot \frac{2}{a^2} \cdot \kappa d_2 \operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{a} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p \cdot \bar{f}_p(a)}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a}\right)^2} - \\ \left. - (-1)^k \cdot \frac{2\kappa d_2}{a^2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \bar{f}_p(a)}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a}\right)^2} \cdot \cos \frac{p \pi y}{d_2} \right\} \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{a} \end{aligned}$$

в области OAEF,

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\kappa \pi x}{a} \left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot d_2 \cdot \pi \cdot (-1)^{k+1} \cdot Z_{2k-1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_2}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi y}{a}} \right. \\ \cdot \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2\kappa \pi y}{a} - \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{2\kappa \pi y}{a} \right) - \frac{4a}{(\kappa \pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \\ \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{a}} \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

в области ABCD,

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = G\Theta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \pi \cdot d_2 \cdot (-1)^{k+1} \cdot Z_{2k-1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_2}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi y}{a}} \right. \\ \cdot \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2\kappa \pi y}{a} - \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{2\kappa \pi y}{a} \right) - \frac{4a}{(\kappa \pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \\ \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{a}} \right] - (-1)^k \cdot \frac{2d_2 \kappa}{a^2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{a} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p \cdot \bar{f}_p(a)}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a}\right)^2} + \end{aligned}$$

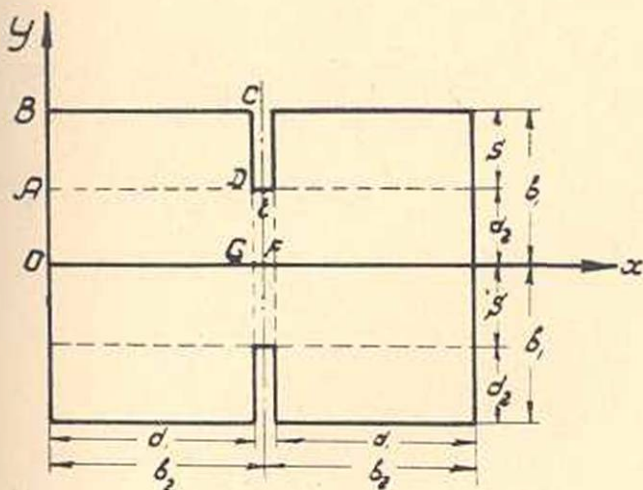
$$+ (-1)^n \frac{2\kappa^2 d_2^2}{a^2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{f}_p(a) \cdot \sin \frac{p\pi y}{d_2}}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a} \right)^2} \cdot \cos \frac{\kappa p x}{a}$$

в области OAEF,

где $\hat{f}_p(a)$ определяется из соотношения (3.2).

II. Кручение призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии двусторонней трещины

6. *Постановка задачи. Решение уравнений.* В силу симметрии поперечного сечения и граничных условий задачи относительно центральных осей, будем определять функцию напряжений $U(x, y)$ только в области OBCDEF (фиг. 2).



Фиг. 2.

Для того, чтобы $U(x, y)$ можно было продолжить на всю область сечения, достаточно, чтобы нормальные производные на осях симметрии равнялись нулю

$$\left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right|_{x=b_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Пусть функция $U(x, y)$ в области OBCG принимает значение $U_1(x, y)$, а в области OAEF — $U_2(x, y)$. Тогда $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ аналогичным способом, как и в пункте первом, можно искать в виде

$$U_i(x, y) = \Psi_i(x, y) + \Phi(x, y), \quad (i=1, 2) \quad (6.1)$$

где функции $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) существуют в области OADG, функция $\Psi_1(x, y)$ — в области OBCG, а функция $\Psi_2(x, y)$ — в области OAEF, причем $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla^2 \Psi_i = -2, \quad \nabla^2 \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (6.2)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, b_1) = \Psi_1(d_1, y) = \Psi_1(0, y) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\Psi_1(x, y) + \Phi_1(x, y) \right) \Big|_{y=0} = 0, \\ \Phi_1(x, d_2) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=d_2} = \Phi_1(0, y) = 0; \quad \Phi_1(d_1, y) = \Psi_2(d_1, y), \\ \Psi_2(x, d_2) = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)_{x=b_2} = 0; \quad \Psi_2(0, y) + \Phi_2(0, y) = 0, \\ \Phi_2(d_1, y) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)_{x=d_1} = 0; \quad \Phi_2(x, d_2) = \Psi_1(x, d_2). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Функции $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) будем искать в виде рядов:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \quad \Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k-1}(x) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2}, \\ \Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \quad \text{где } V_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_{2k-1}(x) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2}, \quad \text{где}$$

$$W_{2k-1}(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_2(x, y) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} dy.$$

Заметим, что системой уравнений (6.1) — (6.4) полностью определяется функция напряжений $U(x, y)$ в области OBCDEF.

Действительно, определение $f_k(y)$, $\varphi_{2k-1}(x)$, $V_k(y)$ и $W_{2k-1}(x)$ сводится к решению следующих дифференциальных уравнений:

$$f_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 f_k(y) = -\frac{4}{k\pi} \cdot [1 + (-1)^{k+1}],$$

$$\varphi_{2k-1}''(x) - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{(2d)^2} \varphi_{2k-1}(x) = -\frac{8}{(2k-1)\pi} \cdot (-1)^{k-1},$$

$$V_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 V_k(y) = \frac{2}{d_1} (-1)^k \left(\frac{k\pi}{d_1} \right) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p-1}(d_1) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2},$$

$$W_{2k-1}''(x) - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2} \cdot W_{2k-1}(x) = \\ = \frac{2}{d_2} \cdot \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{\infty} \bar{f}_p(d_2) \sin \frac{p\pi x}{d_1},$$

общие решения которых на основании условий (6.3) будут

$$\bar{f}_k(y) = A_k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \right] + \\ + \frac{4d_1^2}{(\kappa\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{d_1}} \right],$$

$$\varphi_{2k-1}(x) = C_{2k-1} \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} - \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \right] + \\ + \frac{32d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \cdot (-1)^{k-1},$$

$$V_k(y) = \frac{2}{d_1} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{(2p-1)\pi}{2d_2} (-1)^{p-1}}{\frac{(2p-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2} + \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2} \varphi_{2p-1}(d_1) - \\ - \frac{2}{d_1} (-1)^k \left(\frac{k\pi}{d_1}\right) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p-1}(d_1) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}}{\frac{(2p-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2} + \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2}, \quad (6.5)$$

$$W_{2k-1}(x) = \frac{2}{d_2} (-1)^{k-1} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (d_1 - x) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p\pi}{d_1}\right) (-1)^p \bar{f}_p(d_2)}{\left(\frac{p\pi}{d_1}\right)^2 + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2}} + \\ + \frac{2}{d_2} \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_p(d_2) \cdot \sin \frac{p\pi x}{d_1}}{\left(\frac{p\pi}{d_1}\right)^2 + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2}}.$$

Подставляя значения функций $\bar{f}_k(y)$, $\varphi_{2k-1}(x)$, $V_k(y)$ и $W_{2k-1}(x)$ из (5.5) в условия $\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ и $\Psi_2(0, y) + \Phi_2(0, y) = 0$, или соответственно в $\bar{f}_k(0) + V_k(0) = 0$ и $\varphi_{2k-1}(0) + W_{2k-1}(0) = 0$, получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений.

Введем обозначения:

$$A_p^* = -\alpha p (-1)^p A_p \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1}},$$

$$C_{2p-1}^* = (2p-1)(-1)^{p-1} \cdot C_{2p-1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2}}, \quad (6.6)$$

тогда совокупность двух бесконечных систем приведем к виду

$$A_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} a_{k,2p-1} C_{2p-1}^* + \alpha_k,$$

$$C_{2k-1}^* = \sum_{p=1}^{\infty} b_{2k-1,p} A_p^* + \beta_{2k-1},$$

$$\text{где } a_{k,2p-1} = \frac{2\alpha_k}{\pi} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1}\right) \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \cdot \frac{1}{(2p-1)^2 + \kappa^2 \left(\frac{2d_2}{d_1}\right)^2} \cdot$$

$$\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{th} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \right],$$

$$b_{2k-1,p} = \frac{4(2k-1)}{\alpha\pi} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2}\right) \cdot \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2}\right)^2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot$$

$$\cdot \left[\operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{p\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \right],$$

$$\alpha_k = -\frac{4\alpha \cdot d_1^2}{\kappa^2 \pi^3} \cdot [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1}} +$$

$$+ \frac{2\alpha d_1^2}{\kappa\pi^2} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1}\right) \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \cdot \left[1 - \frac{2}{\kappa\pi} \left(\frac{d_1}{2d_2}\right) \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1}\right],$$

$$\beta_{2k-1} = -\frac{32d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2}} + \frac{32d_1^2}{\pi^4} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\pi}{2(2k-1)} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1}\right)^2 \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2k-1} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1}\right) \cdot \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} + \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi(2k-1)^2} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1} \right)^2 \Big] - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2k-1)}{p^2 [p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2]} \cdot \frac{\operatorname{sh} p \pi \frac{d_2}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{p \pi b_1}{d_1}} \Big\}.$$

Подстановкой $A_k^* = Z_{2k-1}$, $C_{2k-1}^* = Z_{2k}$, $\alpha_k^* = \gamma_{2k-1}$, $\beta_{2k-1}^* = \gamma_{2k}$,
 $C_{2k-1, 2p-1} = C_{2k, 2p} = 0$, $a_{k, 2p-1}^* = C_{2k-1, 2p}$ и $b_{2k-1, p}^* = C_{2k, 2p-1}$, (6.7)

совокупность указанных двух бесконечных систем можно привести к одной системе вида

$$Z_k = \sum_{p=1}^{\infty} E_{kp} \cdot Z_p + \gamma_k, \quad (6.8)$$

где E_{kp} и γ_k определяются соотношением (5.7).

Покажем, что бесконечная система (6.8) вполне регулярна.

Пусть $k = 2i - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |E_{2i-1, p}| &= \sum_{j=1}^{\infty} |E_{2i-1, 2j-1}| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i, 2j-1}^*| = \frac{2\alpha i}{\pi} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \cdot \\ &\cdot \operatorname{th} \frac{i\pi b_1}{d_1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2 + i^2 \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2j-1)\pi d_1}{2d_2} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{(2j-1)\pi d_1}{2d_2} - \right. \\ &\left. - \operatorname{th} \frac{(2j-1)\pi b_2}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2j-1)\pi d_1}{2d_2} \right] < \frac{\alpha i}{\pi} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(b_2-d_1)} \right] \cdot \\ &\cdot \operatorname{th} \frac{i\pi b_1}{d_1} \cdot \frac{\pi}{4i} \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \cdot \operatorname{th} \frac{i\pi d_2}{d_1} \leq \frac{\alpha}{4} \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(b_2-d_1)} \right]. \end{aligned}$$

Если $k = 2i$, то

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |E_{2i, p}| &= \sum_{j=1}^{\infty} |E_{2i, 2j}| = \sum_{j=1}^{\infty} |b_{2i-1, j}^*| = \frac{4}{\alpha\pi} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \cdot \\ &\cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 + (2i-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2} \cdot \operatorname{ch} \frac{j\pi d_2}{d_1} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{j\pi d_2}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{j\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{j\pi d_2}{d_1} \right] < \\ &< \frac{4(2i-1)}{\alpha\pi} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \cdot \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}d_2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2(2i-1)} \cdot \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \cdot \\ &\cdot \left[\operatorname{cth} \frac{(2i-1)\pi d_1}{2d_2} - \frac{1}{(2i-1) \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \pi} \right] \leq \frac{1}{\alpha} \left(1 + e^{-\frac{2\pi d_2}{d_1}} \right). \end{aligned}$$

Примем, что $\alpha = 2 \sqrt{\frac{1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{d_1}}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(b_2 - d_1)}}}$, тогда для любого k

имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |E_{kp}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{d_1}}\right) \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(b_2 - d_1)}\right]},$$

т. е. система (6.8) вполне регулярна.

В качестве примера рассмотрен квадрат ($b_1 = b_2 = d_1 = b$) с двусторонней трещиной различной длины S . Для неизвестных получены следующие оценки (таблицы 4 и 5):

Таблица 4

$S/2b$	1/16	1/8	1/4	3/8
$\tilde{Z}_1/b^2$	0,26273	0,26687	0,21159	0,07542
$\tilde{Z}_2/b^2$	-0,17988	0,00795	0,19450	0,18017
$\tilde{Z}_3/b^2$	0,17941	0,19563	0,19328	0,13049
$\tilde{Z}_4/b^2$	0,09692	0,15592	0,15598	0,08676
$\tilde{Z}_v, v \geq 5$	0	0	0	0

Таблица 5

$S/2b$	1/16	1/8	1/4	3/8
$\tilde{Z}_1/b^2$	0,33347	0,34705	0,28532	0,12457
$\tilde{Z}_2/b^2$	-0,14348	0,06137	0,26499	0,25691
$\tilde{Z}_3/b^2$	0,28208	0,30860	0,29424	0,20511
$\tilde{Z}_4/b^2$	0,17888	0,26528	0,28112	0,19892
$\tilde{Z}_v/b^2, v \geq 5$	0,25583	0,28603	0,27312	0,21465

7. Определение жесткости C . $C = 2G\Theta \int_0^b \int_0^b U(x, y) dx \cdot dy =$

$$= 8G\Theta \left[\int_0^b \int_0^b U(x, y) dx dy + \int_0^b \int_0^{d_2} U(x, y) dx \cdot dy \right]. \quad (6.1)$$

Согласно (6.1), (6.4), (6.5), (6.6) и (6.7) функция напряжений $U(x, y)$ имеет вид:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{b_2} \cdot \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{k \sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} k\pi \frac{b_1}{b_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} \right] \cdot Z_{2k-1} + \right. \\ \left. + \frac{4b_2^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right] \right\}, \quad (7.2)$$

в области ABCD,

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{b_2} \cdot \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{k \sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot Z_{2k-1} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} k\pi \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} \right] + \frac{4b_2^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right] + \frac{4d_2}{b_2 \pi} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi}{b_2} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p-1)(-1)^{p-1}}{(2p-1)^2 + \left(\frac{2d_2 k}{b_2} \right)^2} \cdot \varphi_{2p-1}(b_2) + \frac{8d_2^2 k}{\pi b_2^2} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p-1}(b_2) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}}{(2p-1)^2 + \left(\frac{2d_2 k}{b_2} \right)^2} \right\} \quad (7.3)$$

в области OAEF, где

$$\varphi_{2p-1}(b_2) = \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} \cdot \operatorname{th} \frac{(2p-1) \cdot \pi b_2}{2d_2} \cdot Z_{2p} + \frac{32d_2^2}{(2p-1)^3 \pi^3} \cdot (-1)^{p-1}. \quad (7.4)$$

Подставляя в (7.1) значение $U(x, y)$ из (7.2) и (7.3), для жесткости C получим следующую формулу:

$$C = 8G\theta \left\{ \frac{b_2^2 \sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}}}} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right) \cdot Z_{2k-1} + \frac{4d_2^2}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b_2}{4d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b_2}{2d_2} Z_{2k} - \frac{16b_2^4}{\pi^5} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{b_2} - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2}} \right] + \frac{128d_2^4}{\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b_2}{4d_2} + \frac{b_1 b_2^3}{6} \right\}.$$

Для иллюстрации полученных результатов ниже, в таблице 6, приводятся значения для жесткости стержня квадратного сечения с двусторонней трещиной при различных значениях ее длины S .

Таблица 6

$S/2b$	3/8	1/4	1/8	1/16	0
$\tilde{C}/(2b)^4$	0,066	0,091	0,120	0,133	0,141
$\bar{C}/(2b)^4$	0,071	0,1	0,131	0,140	0,141

8. *Определение напряжений τ_{xz} и τ_{yz} .* Подставляя значение $U(x, y)$ из (7.3) в (6.1), получим:

$$\tau_{xz} = G\theta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{b_2} \cdot \left\{ \frac{\pi}{b_2} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} \right] \cdot Z_{2k-1} - \frac{4b_2}{(k\pi)^2} \left[1 + (-1)^{k+1} \right] \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right\}$$

в области ABCD,

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{b_2} & \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot Z_{2k-1} \cdot \right. \\ & \cdot \frac{\pi}{b_2} \cdot \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} \right] - \frac{4b_2}{(k\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \\ & \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} + \frac{4d_2 k}{b_2^2} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{b_2} (y - d_2) \cdot \\ & \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p-1)(-1)^{p-1}}{(2p-1)^2 + \left(\frac{2d_2 k}{b_2} \right)^2} \varphi_{2p-1}(b_2) - \frac{4d_2 k}{b_2^2} (-1)^{k+1} \cdot \\ & \cdot \left. \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p-1}(b_2) \cdot \sin \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}}{(2p-1)^2 + \left(\frac{2d_2 k}{b_2} \right)^2} \cdot (2p-1) \right\} \end{aligned}$$

в области OAEF,

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi x}{b_2} & \cdot \left\{ \frac{\pi}{b_2} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot \right. \\ & \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} \right] \cdot Z_{2k-1} - \\ & \cdot \left. \frac{4b_2}{(k\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

в области ABCD,

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi x}{b_2} & \left\{ \frac{\pi}{b_2} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot Z_{2k-1} \cdot \right. \\ & \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} \right] - \frac{4b_2}{(k\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \\ & \cdot \left. \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right] + \frac{4d_2 k}{b_2^2} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{b_2} (y - d_2) \right\} \end{aligned}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p-1)(-1)^{p-1} \varphi_{2p-1}(b_2)}{(2p-1)^2 + \left(2 \frac{d_2 k}{b_2}\right)^2} + \frac{8d_2^2 k^2 (-1)^k}{b_2^4} \cdot \left. \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p-1}(b_2) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}}{(2p-1)^2 + \left(2 \frac{d_2 k}{b_2}\right)^2} \right\}$$

в области OAEF,

где $\varphi_{2p-1}(b_2)$ определяется из соотношения (7.4).

III. Кручение призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии внутренней трещины

9. *Постановка задачи. Решение уравнений.* Определение функции напряжений $U(x, y)$ при кручении призматических стержней с двусвязным поперечным сечением сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2$$

при условии, что функция $U(x, y)$ обращается в нуль на внешнем контуре сечения и принимает постоянное значение на внутреннем контуре.

В силу симметрии будем искать функцию напряжений $U(x, y)$ в области OBCDEF (фиг. 3). Для распространения решения на всю область сечения потребуем, чтобы нормальные производные функции $U(x, y)$ на осях симметрии обращались в нуль

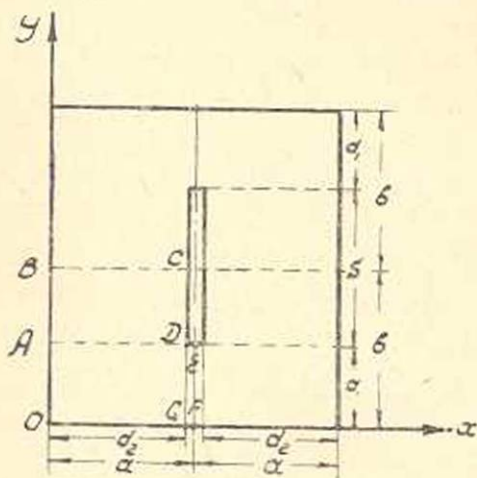
$$\left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0.$$

Полагаем, что функция $U(x, y)$ принимает значение $U_1(x, y)$ в области OAEF и $U_2(x, y)$ в области OBCG.

Как и в пункте первом функции $U_i(x, y)$ ($i=1, 2$) будем искать в виде:

$$U_i(x, y) = \Psi_i(x, y) + \Phi_i(x, y), \quad (i=1, 2), \quad (9.1)$$

где $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) существуют в области OADG, $\Psi_1(x, y)$ — в области OAEF, а функция $\Psi_2(x, y)$ — в области OBCG.



Фиг. 3.

Функции $\Phi_i(x, y)$ и $\Psi_i(x, y)$ ($i=1,2$) внутри области сечения должны удовлетворять уравнениям:

$$\nabla^2 \Phi_i = -2; \quad \nabla^2 \Psi_i = 0, \quad (i=1,2) \quad (9.2)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, 0) = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right)_{y=0} &= 0, \quad \Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = 0, \quad \Psi_1(x, d_1) = U_0, \\ \Psi_2(0, y) = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)_{y=b} &= 0, \quad \Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0, \quad \Psi_2(d_2, y) = U_0, \\ \Phi_1(d_2, y) = \Phi_1(x, 0) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{x=d_2} &= 0, \quad \Phi_1(x, d_1) = \Psi_2(x, d_1) - U_0, \\ \Phi_2(x, d_1) = \Phi_2(0, y) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=d_1} &= 0, \quad \Phi_2(d_2, y) = \Psi_1(d_2, y) - U_0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Представим $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1,2$) в виде рядов:

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_2}, \quad (9.4)$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_2}.$$

Для определения функций $f_k(x)$, $\varphi_k(x)$, $V_k(y)$ и $W_k(y)$ получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 f_k(x) &= (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} U_0 - \frac{4}{k\pi} \cdot [1 + (-1)^{k+1}], \\ V_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2} \right)^2 V_k(y) &= (-1)^k \frac{2k\pi}{d_2^2} U_0 - \frac{4}{k\pi} \cdot [1 + (-1)^{k+1}], \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 \varphi_k(x) = (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_1) \cdot \sin \frac{p\pi x}{d_2} - (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} \cdot U_0,$$

$$W_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2} \right)^2 W_k(y) = (-1)^k \frac{2k\pi}{d_2^2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \cdot \sin \frac{p\pi y}{d_1} - (-1)^k \frac{2k\pi}{d_2^2} \cdot U_0.$$

Общие решения этих уравнений при условиях (9.3) будут

$$\begin{aligned} f_k(x) = B_k \left(\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d_1} \right) + (-1)^{k+1} \cdot \frac{2U_0}{k\pi} + \\ + \frac{4d_1^2}{(k\pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}], \end{aligned}$$

$$V_k(y) = N_k \left(\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} - \operatorname{th} \frac{k\pi b}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \right) + (-1)^{k+1} \cdot \frac{2U_0}{k\pi} + \\ + \frac{4d_2^2}{(k\pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}], \quad (9.6)$$

$$\varphi_k(x) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - d_1) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_1) \frac{p(-1)^p}{\left(\frac{d_1}{d_2} p\right)^2 + k^2} + \\ + (-1)^k \frac{2U_0}{k\pi} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x - d_1) \right] - (-1)^k \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_1) \frac{\sin \frac{p\pi x}{d_2}}{\left(\frac{d_1}{d_2} p\right)^2 + k^2}, \\ W_k(y) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y - d_1) \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \frac{p(-1)^p}{\left(\frac{d_2}{d_1} p\right)^2 + k^2} + \\ + (-1)^k \frac{2U_0}{k\pi} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (y - d_1) \right] - (-1)^k \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \frac{\sin \frac{p\pi y}{d_1}}{\left(\frac{d_2}{d_1} p\right)^2 + k^2}.$$

В силу условий $\Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = 0$ и $\Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0$ имеем:

$$f_k(0) + \varphi_k(0) = 0, \quad V_k(0) + W_k(0) = 0. \quad (9.7)$$

Подставляя в (9.7) значения функций $f_k(x)$, $V_k(y)$, $\varphi_k(x)$ и $W_k(y)$ из (9.6), получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений.

Введем обозначения:

$$R_k = S_k \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \frac{(-1)^k}{k} \cdot \sin \frac{k\pi d_2}{d_1}, \quad N_k = \alpha R_k \cdot d_1 d_2 \cdot \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}. \quad (9.8)$$

Тогда эти системы можно представить в виде:

$$S_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} R_p + \beta_k, \quad R_k = \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} S_p + \gamma_k,$$

где
$$a_{kp} = \frac{2}{\pi} k \alpha \frac{d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (b - d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi b}{d_2}} \cdot \frac{1}{\left(p \frac{d_1}{d_2}\right)^2 + k^2},$$

$$\beta_k = \frac{2U_0}{k\pi^2} \cdot \frac{1}{d_2^2} - \frac{4}{k^2\pi^2} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot [(-1)^k - 1] \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1}} - \\ - \frac{2}{k\pi^2} \cdot \left[1 - \frac{2d_1}{k\pi d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} \right], \quad (9.9)$$

$$c_{kp} = \frac{2\kappa}{\pi z} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d_2)}{d_1}}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d_2}{d_1} p\right)^2 + \kappa^2},$$

$$\gamma_k = \frac{2U_0}{\kappa\pi^2} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot d_1^2} - \frac{4}{\kappa^2\pi^2} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot [(-1)^k - 1] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2}} -$$

$$- \frac{2}{\kappa\pi^2} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left[1 - \frac{2d_2}{\kappa\pi d_1} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi d_1}{2d_2} \right].$$

Подстановкой

$$S_k = Z_{2k-1}, \quad R_k = Z_{2k}, \quad \gamma_k = B_{2k}, \quad \beta_k = B_{2k-1}, \quad (9.10)$$

$$A_{2k, 2p-2p} = A_{2k-1, 2p-1} = 0, \quad a_{kp} = A_{2k-1, 2p}, \quad c_{kp} = A_{2k, 2p-1}$$

совокупность двух бесконечных систем (9.9) можем привести к одной системе

$$Z_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} A_{\nu j} Z_j + B_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (9.11)$$

где $A_{\nu j}$ и B_ν определены соотношением (9.10).

Покажем, что система (9.7) вполне регулярна.

Пусть $\nu = 2k - 1$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{2k-1, j}| = \sum_{p=1}^{\infty} |A_{2k-1, 2p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2}{\pi} \cdot \kappa \cdot \alpha \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2}(b-d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi b}{d_2}} \cdot \frac{1}{\left(p \frac{d_1}{d_2}\right)^2 + \kappa^2} \leq \frac{\kappa \alpha}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot$$

$$\cdot \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_1)} \right] \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{d_2}{d_1} \kappa\right)^2} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{2} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_1)} - e^{-\frac{2p\pi d_1}{d_2}} \right].$$

Если $\nu = 2k$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{2k, j}| = \sum_{p=1}^{\infty} |A_{2k, 2p-1}| = \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| = \frac{2\kappa}{\pi \alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d_2)}{d_1}}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d_2}{d_1} \cdot p\right)^2 + \kappa^2} \leq \frac{\kappa}{\pi \alpha} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(a-d_2)} \right] \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{d_1}{d_2} \kappa\right)^2} \leq \frac{1}{2\alpha} \cdot \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(a-d_2)} \right].$$

При этом использованы следующие неравенства:

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2}(b-d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi b}{d_2}} \leq \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{2p\pi}{d_2}(b-d_1)} - e^{-2\frac{d_1}{d_2}p\pi} \right],$$

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_1}(a-d_2)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_1}} \leq \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{2p\pi}{d_1}(a-d_2)} \right],$$

$$\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq \infty).$$

$$\text{Выберем } \alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(a-d_2)}}{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_1)} - e^{-2\frac{d_1}{d_2}p\pi}}}.$$

Тогда для любого γ имеем неравенства:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{\gamma j}| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_1)} - e^{-2\frac{d_1}{d_2}p\pi} \right] \cdot \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(a-d_2)} \right]},$$

или, поскольку ширина трещины практически равна нулю (т. е. $d_2 = a$), то для любого γ получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{\gamma j}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + e^{-\frac{2\pi}{a}(b-d_1)} - e^{-2\frac{d_1}{a}p\pi}}.$$

Следовательно, система вполне регулярна.

В качестве примера рассмотрен квадрат ($2a = 2b$) с внутренней трещиной длиной $S = a$.

Для неизвестных получены следующие оценки:

$$0,22064 U_0/a^2 - 0,12938 \leq Z_1 \leq 0,58457 U_0/a^2 - 0,17348$$

$$0,49874 U_0/a^2 + 0,10630 \leq Z_2 \leq 0,75823 U_0/a^2 + 0,08465$$

$$\begin{aligned}
 0,16320 U_0/a^2 - 0,08445 &\leq Z_3 \leq 0,50676 U_0/a^2 - 0,14447 \\
 0,1863 U_0/a^2 - 0,06816 &\leq Z_4 \leq 0,56609 U_0/a^2 - 0,10381 \\
 -0,38605 U_0/a^2 = 0,00954 &\leq Z_{\nu_{\geq 5}} \leq 0,60336 U_0/a^2 - 0,12942.
 \end{aligned}$$

10. *Определение постоянной U_0 .* Постоянная U_0 определяется из теоремы Бредта [4] о циркуляции касательного напряжения при кручении, по которой

$$\int_{C_0} T_s \cdot dS = 2G\tau\Omega, \quad (10.1)$$

где C_0 — внутренний контур сечения, Ω — площадь, ограниченная этим контуром, G — модуль сдвига, τ — угол закручивания на единицу длины, T_s — проекция касательного напряжения в какой-либо точке контура на направление касательной к этому контуру в той же точке.

$$T_s = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} - \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial S} \right) G\tau. \quad (10.2)$$

Подставляя значение T_s в (10.1), после некоторых преобразований получим:

$$\int_{d_2}^a \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)_{y=d_1} dx + \int_{d_1}^b \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=d_2} dy = 2(a-d_2)(b-d_1). \quad (10.3)$$

На основании (9.1), (9.4), (9.6), (9.8) и (9.10) из уравнения (10.3) получаем следующее выражение для определения U_0 :

$$\begin{aligned}
 U_0 = \frac{d_1 d_2}{d_2(a-d_2) + d_1(b-d_1)} &\left\{ 2ab - ad_1 - bd_2 + \frac{d_2^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{2k}}{k^2} \cdot \right. \\
 &\cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi(b-d_1)}{d_2} + \frac{d_1^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{2k-1}}{k^2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cdot \\
 &\cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-d_2)}{d_1} - d_1 d_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k + \gamma_k}{k} \left. \right\}. \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования Z_{2k} и Z_{2k-1} в свою очередь зависят от U_0 .

Подставляя в уравнение (10.4) значения Z_{2k} и Z_{2k-1} с избытком и недостатком получаем верхнее и нижнее значения U_0 .

В случае квадрата с внутренней трещиной длиной $S=a$, U_0 принимает следующие значения:

$$0,57335a^2 \leq U_0 \leq 0,6457a^2.$$

11. *Определение жесткости при кручении.* Жесткость при кручении стержней с полым поперечным сечением определяется формулой:

$$C = 2G\Theta \left[-\Omega^* U^* + \Omega_* U_* + \iint_{\Omega} U(x, y) dx \cdot dy \right], \quad (11.1)$$

где G — модуль сдвига,

Θ — угол закручивания на единицу длины стержня,

Ω^* — площадь, ограниченная внешним контуром,

U^* — значение функции напряжений на внешнем контуре,

Ω_* — площадь, ограниченная внутренним контуром,

U_* — значение функции напряжений на внутреннем контуре,

Ω — область поперечного сечения стержня.

Поскольку значение $U(x, y)$ на внешнем контуре принято за нуль и при наличии трещины внутри поперечного сечения $\Omega_* = 0$, то формула для определения жесткости (11.1) принимает следующий вид:

$$C = 2G\Theta \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy = 8G \left[\int_0^a \int_0^{d_1} U(x, y) dx dy + \int_0^a \int_0^b U(x, y) dx dy \right]. \quad (11.2)$$

На основании (9.1), (9.4), (9.6), (9.8) и (9.10) функция напряжений будет иметь вид:

$$U_1(x, y) = \frac{U_0 y}{d_1} + y(d_1 - y) + d_1 d_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (a-x)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d_1}} \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_1} \cdot Z_{2k-1} \text{ в области DEFG}, \quad (11.3)$$

$$U_2(x, y) = \frac{U_0}{d_2} x + x(d_2 - x) + \alpha d_1 d_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b-y)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_2}} \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_2} \cdot Z_{2k} \text{ в области ABCD},$$

$$U_2(x, y) = x(d_2 - x) + \alpha \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b-y)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_2}}.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_2} \cdot Z_{2\kappa} + \frac{2U_0}{\pi} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1}}{\kappa} \cdot \operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{d_2} (y-d_1) \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_2} + \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa} \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_2} (y-d_1) \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \cdot \\
& \cdot \frac{p(-1)^p}{\left(\frac{d_2}{d_1} p\right)^2 + \kappa^2} + \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{p \pi x}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{p \pi d_2}{d_1}} \cdot \sin \frac{p \pi y}{d_1} \text{ в области OADG,} \\
U_1(x, y) = & y(d_1 - y) + d_1 \cdot d_2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa} \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{d_1} (a-x)}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi a}{d_1}} \cdot \\
& \cdot \sin \frac{\kappa \pi y}{d_1} \cdot Z_{2\kappa-1} + \frac{2U_0}{\pi} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1}}{\kappa} \cdot \operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{d_1} (x-d_2) \cdot \sin \frac{\kappa \pi y}{d_1} + \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa} \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_1} (x-d_2) \cdot \sin \frac{\kappa \pi y}{d_1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_1) \cdot \\
& \cdot \frac{p(-1)^p}{\left(\frac{d_1}{d_2} p\right)^2 + \kappa^2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} V_{\kappa}(d_1) \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_1}{d_2}} \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_2} \text{ в области OADG.}
\end{aligned}$$

Подставляя (11.3) в (11.2) и учитывая, что $d_2 = a$, получим:

$$\begin{aligned}
C = & 8G\Theta \left\{ \frac{ad_1^3}{6} + \frac{a^3}{6} (b-d_1) + \frac{U_0 a}{2} (b-d_1) - \frac{2ad_1^3}{\pi^2} \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^3} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi a}{d_1}} \right) \cdot Z_{2\kappa-1} + \frac{4U_0 d_1^2}{\pi^3} \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^3} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{2d_1} + \\
& + \frac{4U_0 a^2}{\pi^3} \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^3} \operatorname{th} \frac{\kappa \pi d_1}{2a} - \frac{16d_1^4}{\pi^5} \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^5} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{2d_1} + \\
& + \frac{16a^4}{\pi^5} \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^5} \operatorname{th} \frac{\kappa \pi d_1}{2a} - \frac{2a^3 d_1 \alpha}{\pi^2} \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^3} \cdot \\
& \cdot \left[1 - \left(\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi d_1}{a} - \operatorname{th} \frac{\kappa \pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_1}{a} \right) \right] \cdot Z_{2\kappa} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

В качестве примера определена жесткость квадрата C с внутренней трещиной длиной $S = a$.

$$\bar{C} = 0,138 G(2a)^4.$$

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 25 III 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. ДАН Армянской ССР, т. IX, № 2, 1948. ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1941.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ОНТИ, М., 1949.
4. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, М.—Л., 1947.

Ն. Օ. Գուլկյան

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՀԵՂԲԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔՈՎ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ԶՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերվում է երկայնական ճեղքեր ունեցող ուղղանկյուն լայնական հատվածքով պրիզմատիկ ձողերի սլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Դիտված են այն դեպքերը, երբ ձողը ունի միակողմանի, երկ-
կողմանի և ներքին ճեղքեր՝ կամավոր երկարությամբ: Լարումների ֆունկ-
ցիայի և կոշտության որոշման համար բերված են բացահայտ բանաձևեր,
որոնք հնարավորություն են տալիս հետազոտելու ճեղքի երկարության ազ-
դեցությունը ձողի կոշտության վրա, կախված հատվածքի երկրաչափական
պարամետրներից: Բացի դրանից այդ բանաձևերը թույլ են տալիս որո-
շելու հատվածքում մաքսիմալ լարումների արժեքները: Որպես օրինակ
մանրամասն հետադրույթ է երկայնական ճեղք ունեցող քանակուսի
հատվածքով ձողի դեպքը: Ստացված են թվական արդյունքներ, որոնք
բերված են աղյուսակներում: