

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Е. А. Александрян

О кручении некоторых призматических стержней

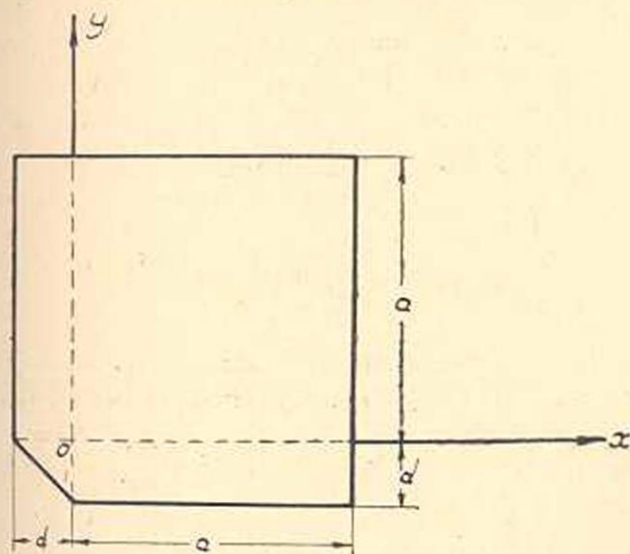
В работе приводится точное решение задачи о кручении некоторых призматических стержней полигонального поперечного сечения с вырезами под углом 45° .

При решении задачи применением метода введения вспомогательных функций [1] решение уравнений задачи с частными производными сведено к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, а определение постоянных интегрирования сведено к решению бесконечных регулярных и вполне регулярных систем линейных уравнений.

Полученные формулы определяют жесткость при кручении в зависимости от геометрических параметров сечения.

§ 1. Кручение стержней с поперечным сечением в виде квадрата с вырезом под углом 45° (фиг. 1).

1. *Постановка задачи.* Функция напряжений $U(x, y)$ при кручении удовлетворяет уравнению Пуассона



Фиг. 1

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2, \quad (1.1)$$

в области сечения и принимает значение, равное нулю на контуре.
Функцию $U(x, y)$ ищем в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{при } x \leq 0, \quad y \leq 0, \\ U_2(x, y) & \text{при } x \geq 0, \quad y \leq 0, \\ U_3(x, y) & \text{при } x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ U_4(x, y) & \text{при } x \leq 0, \quad y \geq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Тогда для непрерывности и однозначности решения достаточно удовлетворить следующим условиям:

$$\nabla^2 U_i = -2 \quad (1.1')$$

$$\begin{cases} U_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ на контуре сечения.} \\ U_1(0, y) = U_2(0, y) \\ U_2(x, 0) = U_3(x, 0) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=0} \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial y} \right)_{y=0} \end{cases} \quad (1.4)$$

Функции $U_i = (x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) ищем в виде:

$$\begin{aligned} U_1(x, y) = & -\frac{1}{2}(x+y)(+y+d) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(x+d) \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \sin \frac{k\pi}{d}(x+d) \right\} + \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(y+d) \sin \frac{k\pi x}{d} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi}{d}(y+d) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad (1.6)$$

$$U_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (1.7)$$

2. *Решение уравнений задачи.* Согласно условию (1.1') для неизвестных функций $f_k(y)$ и $\phi_k(y)$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} f_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 f_k(y) = & -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}] - \frac{2k\pi}{a^2} \left[-\frac{1}{2}(y+d)y + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \operatorname{sh} p\pi \sin \frac{p\pi y}{d} \right], \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\psi_k(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \psi_k(y) = -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}] - \frac{2k\pi}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(0) \sin \frac{p\pi y}{a}. \quad (1.9)$$

Решения этих уравнений будут:

$$f_k(y) = F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + L_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} + \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] - \frac{1}{k\pi} y(y+d) + \frac{ad}{k^2\pi^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} - \frac{2a^2}{k^2\pi^3} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} A_p \operatorname{sh} p\pi \left[\left(\frac{d}{a}\right)^2 k \sin \frac{p\pi y}{d} - \left(\frac{d}{a}\right) p \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \right] \frac{a^2}{a^2 p^2 + k^2 d^2}. \quad (1.10)$$

$$\psi_k(y) = M_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} + \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(0)}{p^2 + k^2} \left[k \sin \frac{p\pi y}{2} - p \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \right]. \quad (1.11)$$

3. *Определение коэффициентов интегрирования.* Из выражений (1.10) и (1.11) исключим коэффициенты F_k , L_k , M_k и N_k ; тогда, обозначая

$$f_k(0) = \psi_k(0) = \delta_k, \quad (1.12)$$

получим

$$f_k(y) = \left\{ \delta_k + \frac{2a^2}{k^2\pi^3} - \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (y+d)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{a}} - \left\{ \frac{2a^2}{k^3\pi^3} - \frac{4a^2}{k^2\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\} \left(1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{a}} \right) - \frac{1}{k\pi} y(y+d) + \frac{2k}{\pi} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} A_p \operatorname{sh} p\pi \frac{\sin \frac{p\pi y}{d}}{p^2 + k^2 \left(\frac{d}{a}\right)^2}. \quad (1.13)$$

$$\psi_k(y) = \left\{ \delta_k - \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (a-y)}{\operatorname{sh} k\pi} + \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} k\pi} \right) + \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\delta_p}{p^2 + k^2} \sin \frac{p\pi y}{a}. \quad (1.14)$$

Для определения неизвестных постоянных δ_k и A_k воспользуемся условиями (1.4). В результате получим совокупность трех бесконечных систем линейных уравнений в виде:

$$\begin{aligned}
 & A_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)\pi = \\
 & = -\frac{4d^2}{\pi^3(2k-1)^3} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \left(2 \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi a}{2d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} \right) - \\
 & - \frac{2}{\pi} \left(\frac{a}{d} \right) \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \delta_p}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2} + \\
 & + \frac{4}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \sum_p^{2,4,6} \frac{p A_p \operatorname{sh} p \pi}{p^2 + (2k-1)^2}, \\
 & A_{2k} \operatorname{sh} 2k\pi = -\frac{d^2}{2k^2 \pi^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} - \\
 & - \frac{2}{\pi} \left(\frac{a}{d} \right) \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \delta_p}{p^2 + 4k^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2} + \\
 & + \frac{4}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \sum_p^{1,3,5} \frac{p A_p \operatorname{sh} p \pi}{p^2 + 4k^2} \quad (1.15) \\
 & \delta_k = \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \left\{ \frac{4a^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[\operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \right] - \right. \\
 & - \frac{2a^2}{k^3 \pi^3} \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2} + \frac{ad}{k^2 \pi^2} \left. \right\} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \delta_p}{p^2 + k^2} - \\
 & - \frac{2}{\pi} \left(\frac{d}{a} \right) \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p A_p \operatorname{sh} p \pi}{p^2 + k^2 \left(\frac{d}{a} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Введя новые обозначения

$$\begin{aligned}
 & k \delta_k = z_{2k-1}, \\
 & -(2k-1) A_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)\pi = z_{4k-2}, \\
 & -2k A_{2k} \operatorname{sh} 2k\pi = z_{4k}, \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

совокупность бесконечных систем (1.15) можно привести к одной системе

$$z_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{2k-1} &= k \cdot b_k = \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \left\{ \frac{4a^2}{k^2 \pi^2} [1 + (-1)^{k+1}] \left[\operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \right] - \frac{2a^2}{k^2 \pi^2} \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} + \frac{ad}{k\pi^2} \right\}, \\ \alpha_{4k-2} &= \frac{4d^2}{\pi^2 (2k-1)^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \left\{ 2 \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi a}{2d} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} \right\}, \\ \alpha_{4k} &= \frac{d^2}{k\pi^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi}, \\ C_{2k-1, 2p-1} &= \frac{2k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \cdot \frac{1}{p^2 + k^2}, \\ C_{2k-1, 2p} &= \frac{2k}{\pi} \frac{d}{a} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \cdot \frac{1}{p^2 + k^2 \left(\frac{d}{a} \right)^2}, \\ C_{4k-2, 2p-1} &= \\ &= \frac{2(2k-1)}{\pi} \cdot \frac{a}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \cdot \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2}, \\ C_{4k-2, 2p} &= \frac{4(2k-1)}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4p^2 + (2k-1)^2}, \\ C_{4k, 2p-1} &= \frac{4k}{\pi} \frac{a}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \cdot \frac{1}{p^2 + 4k^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2}, \\ C_{4k, 2p} &= \frac{8k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \cdot \frac{1}{(2p-1)^2 + 4k^2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Докажем регулярность системы (1.17).

Пусть $i = 2k - 1$,

тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |C_{2k-1,j}| = \frac{2k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2} + \right. \\ \left. + \frac{d}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2 \left(\frac{d}{a} \right)^2} \right\} = 1 - \frac{1}{k\pi} \frac{\left(1 + \frac{a}{d} \right)}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \leq 1. \quad (1.19)$$

Пусть теперь $i = 4k - 2$,

тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |C_{4k-2,j}| = \\ = \frac{2(2k-1)}{\pi} \frac{a}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2} + \\ + \frac{4(2k-1)}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 + (2k-1)^2} = \\ = 1 - \frac{1}{\pi(2k-1)} \frac{2 + \frac{d}{a}}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \leq 1. \quad (1.20)$$

Пусть, наконец, $i = 4k$, тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |C_{4k,j}| = \frac{4k}{\pi} \frac{a}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + 4k^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2} + \\ + \frac{8k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2 + 4k^2} = 1 - \\ - \frac{1}{2k\pi} \frac{\frac{d}{a}}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \leq 1. \quad (1.21)$$

Согласно неравенствам (3.8), (3.9) и (3.10) имеем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |C_{ij}| \leq 1 \quad (1.22)$$

при всяком $i \geq 1$, т. е. система (3.6) регулярна.

Из теории регулярных бесконечных систем известно [2], что если $|z_i| \leq K\rho_i$, где z_i — свободные члены, K — положительная постоянная, а $\rho_i = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} |C_{ij}|$, то регулярная система уравнений

имеет единственное ограниченное решение $|z_i| \leq K$.

В нашей системе применением лимитант для неизвестных коэффициентов z_i получены следующие оценки:

$$\begin{aligned} 0,19034a^2 &= \bar{z}_1 < z_1 < \bar{z}_1 = 0,21019a^2, \\ 0,02931a^2 &= \bar{z}_2 < z_2 < \bar{z}_2 = 0,06515a^2, \\ 0,03411a^2 &= \bar{z}_3 < z_3 < \bar{z}_3 = 0,06927a^2, \\ 0,02468a^2 &= \bar{z}_4 < z_4 < \bar{z}_4 = 0,08316a^2, \\ 0 < z_k &\leq 0,07434a^2, \\ k &= 5, 6, 7, \dots \end{aligned} \quad (1.23)$$

4. *Определение функции напряжений.* Пользуясь соотношениями (1.2), (1.5), (1.6), (1.7), (1.13), (1.14) и обозначениями (1.16), для функции напряжений получим:

$$\begin{aligned} U(x, y) = & -\frac{1}{2}(x+y)(x+y+d) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{2k}}{k \operatorname{sh} k\pi} \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x+d) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \\ & - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \cdot \sin \frac{k\pi}{d} (x+d) + \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (y+d) \sin \frac{k\pi x}{d} - \\ & \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi}{d} (y+d) \right\}, \\ & x \leq 0, y \leq 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} U(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z_{2k-1}}{k} + \frac{2a^2}{k^2\pi^2} - \frac{4a^2}{k^3\pi^2} [1 + (-1)^{k+1}] \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (y+d)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{a}} - \\ & - \left[\frac{2a^2}{k^2\pi^2} - \frac{4a^2}{k^3\pi^2} [1 + (-1)^{k+1}] \right] \left(1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{a}} \right) - \frac{1}{k\pi} y(y+d) - \end{aligned}$$

$$-\frac{2\kappa}{\pi} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z_{2p}}{p} \cdot \frac{\sin \frac{p\pi y}{d}}{p^2 + \kappa^2 \left(\frac{d}{a}\right)^2} \left\{ \sin \frac{\kappa\pi x}{a}, \quad (1.25) \right.$$

$$x \geq 0; \quad y \leq 0.$$

$$U(x, y) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{z_{2\kappa-1}}{\kappa} + \frac{4a^2}{\kappa^3\pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi}{a} (a-y)}{\operatorname{sh} \kappa\pi} + \right.$$

$$+ \frac{4a^2}{\kappa^3\pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \kappa\pi} \right) +$$

$$+ \frac{2\kappa}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z_{2p-1}}{p(p^2 + \kappa^2)} \sin \frac{p\pi y}{a} \left. \right\} \sin \frac{\kappa\pi x}{a}, \quad (1.26)$$

$$x > 0; y \geq 0.$$

$$U(x, y) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{z_{2\kappa-1}}{\kappa} + \frac{2a^2}{\kappa^3\pi^3} - \frac{4a^2}{\kappa^3\pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi}{a} (x+d)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d}{a}} - \right.$$

$$- \left[\frac{2a^2}{\kappa^3\pi^3} - \frac{4a^2}{\kappa^3\pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \right] \left(1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d}{a}} \right) - \frac{1}{\kappa\pi} x(x+d) -$$

$$- \frac{2\kappa}{\pi} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z_{2p} \cdot \sin \frac{p\pi x}{d}}{p \left[p^2 + \kappa^2 \left(\frac{d}{a}\right)^2 \right]} \left. \right\} \sin \frac{\kappa\pi y}{a}. \quad (1.27)$$

$$x \leq 0, y \geq 0.$$

5. *Определение жесткости при кручении.* Жесткость при кручении определяется формулой

$$C = 2G \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy, \quad (1.28)$$

где Ω — область поперечного сечения стержня, G — модуль сдвига.

Подставляя в (1.28) значение функции напряжений из (1.25)–(1.27) и произведя интегрирование, получим:

$$C = G \left\{ \frac{a^4}{3} + \frac{a^2 d}{3} + \frac{a d^3}{6} + \frac{d^4}{12} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{96}{\pi^2} a^4 \sum_k^{1,3,5} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} - \frac{64}{\pi^2} a^4 \sum_k^{1,3,5} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \\
& + \frac{8a^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{z_{2k-1}}{k^3} \left(\operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \right) + \\
& + \frac{4d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{z_{2k}}{k^3} \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2} + \frac{4d^2}{\pi^2} \sum_k^{2,4,6} \frac{z_{2k}}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \\
& + \frac{8d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{z_{2k}}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi a}{2d}. \quad (1.29)
\end{aligned}$$

Подставляя сюда коэффициенты z_k из (1.23), получим верхнюю и нижнюю границы жесткости C .

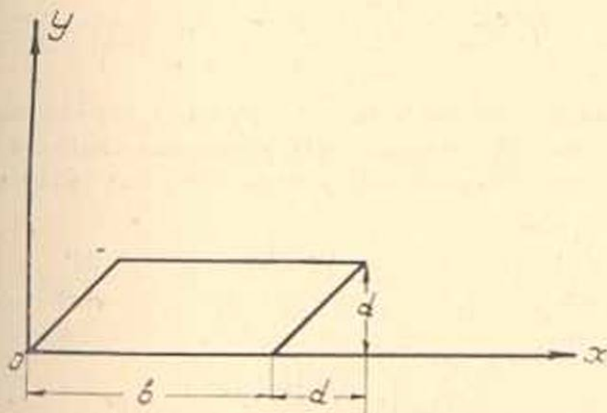
В таблице 1 приведены значения жесткости C при различных отношениях $\frac{d}{a}$.

Таблица 1

$\frac{d}{a}$	0	1/3	1	3	∞
$\bar{C}$	0,141 a^4	0,377 a^4	1,226 a^4	13,114 a^4	0,026 d^4
$\bar{C}$	0,141 a^4	0,412 a^4	1,493 a^4	14,161 a^4	0,026 d^4
C	0,141 a^4	0,395 a^4	1,359 a^4	13,638 a^4	0,026 d^4

Если принять за расчетную формулу жесткости $C = \frac{\bar{C} + \bar{C}}{2}$, то погрешность будет не более 10%.

§ 2. Кручение стержня с сечением в виде параллелограмма (фиг. 2).



Фиг. 2

Функцию напряжений $U(x, y)$ ищем в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & 0 \leq x \leq d \\ U_2(x, y) & d \leq x < b \\ U_3(x, y) & b \leq x \leq b + d. \end{cases} \quad (2.1)$$

Вспомогательные функции $U_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) должны удовлетворять условиям:

$$\nabla^2 U_i = -2 \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} U_i(x, y) = 0 & \text{на контуре сечения} \\ U_1(d, y) = U_2(d, y) \\ U_2(b, y) = U_3(b, y) \\ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=d} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x=d} \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x=b} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)_{x=b}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Положим

$$U_1(x, y) = y(x - y) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi y}{d} - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \sin \frac{k\pi x}{d} \right], \quad (2.4)$$

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} U_3(x, y) = (y - d)(x - b - y) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x - b - d) \cdot \sin \frac{k\pi}{d} (y - d) - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (y - d) \cdot \sin \frac{k\pi}{d} (x - b - d) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где в силу (2.2)

$$f_k(x) = C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d} + D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} + \frac{4d^2}{k^2 \pi^2} [1 + (-1)^{k+1}]. \quad (2.7)$$

Аналогичным образом, как это сделано в первом параграфе работы, определение постоянных интегрирования сводится к решению совокупности двух бесконечных систем линейных уравнений.

$$\begin{aligned} A_k \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b - d)} + \frac{(-1)^k \operatorname{sh} k\pi}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b - d)} B_k = \frac{2d^2}{k^2 \pi^2} (-1)^k - \\ - \frac{2}{\pi} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p}{p^2 + k^2} A_p \operatorname{sh} p\pi, \end{aligned}$$

$$B_k \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \frac{(-1)^k \operatorname{sh} \kappa \pi}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} A_k = \frac{2d^2}{\kappa^2 \pi^2} (-1)^k -$$

$$- \frac{2}{\pi} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p}{p^2 + \kappa^2} B_p \operatorname{sh} p\pi. \quad (2.8)$$

Вычтя из первой системы вторую и введя обозначения

$$\kappa(-1)^k \operatorname{sh} \kappa \pi A_k = A_k^*, \quad (2.9)$$

$$\kappa(-1)^k \operatorname{sh} \kappa \pi B_k = B_k^*,$$

получим:

$$A_k^* - B_k^* = - \frac{2\kappa}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \kappa \pi + \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) - \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^* - B_p^*}{\kappa^2 + p^2}. \quad (2.10)$$

Система (2.10) вполне регулярна, так как

$$\frac{2\kappa}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \kappa \pi + \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) - \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 + p^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{cth} \kappa \pi - \frac{1}{\kappa \pi}}{\operatorname{cth} \kappa \pi - \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) - \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} < 1 - \theta, \quad \theta > 0. \quad (2.11)$$

Следовательно, система (2.10) имеет единственное ограниченное решение, равное $A_k^* - B_k^* = 0$.

Для определения коэффициентов $A_k^* = B_k^*$ получим бесконечную систему:

$$A_k^* = \frac{2d^2}{\kappa^2 \pi^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \kappa \pi + \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) + \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} -$$

$$- \frac{2\kappa}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \kappa \pi + \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) + \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^*}{p^2 + \kappa^2}, \quad (2.12)$$

которая, согласно неравенству (2.11), вполне регулярна.

В качестве примера рассмотрим случай ромба, т. е. когда $b = a\sqrt{2}$. Для этого случая имеют место неравенства

$$\begin{aligned}\bar{A}_1^* &= 0,09301d^2 \leq A_1^* \leq 0,11304d^2 = \bar{A}_1^*, \\ \bar{A}_2^* &= 0,02345d^2 \leq A_2^* \leq 0,03681d^2 = \bar{A}_2^*, \\ \bar{A}_3^* &= 0,01723d^2 \leq A_3^* \leq 0,02550d^2 = \bar{A}_3^*, \\ \bar{A}_k^* &= 0 \leq A_k^* \leq 0,02519d^2 = \bar{A}_k^*, \\ &\quad k = 4, 5, 6, \dots\end{aligned}\quad (2.13)$$

где $\bar{A}_k^*$ и $\bar{A}_k$ — соответственно значения с недостатком и с избытком неизвестных A_k .

Для функции напряжений получим следующие выражения:

$$U(x, y) = y(x - y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A_k^*}{k \operatorname{sh} k\pi} \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \cdot \sin \frac{k\pi x}{d} \right\}, \quad (2.14)$$

$$0 \leq x \leq d$$

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d} \left\{ \frac{A_k^* (-1)^k}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b - d)} \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b - x) - \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x - d) \right] + \frac{4d^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\}, \quad (2.15)$$

$$d \leq x \leq b$$

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A_k^*}{k \operatorname{sh} k\pi} \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x - b - d) \sin \frac{k\pi}{d} (y - d) - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (y - d) \sin \frac{k\pi}{d} (x - b - d) \right\}, \quad (2.16)$$

$$b \leq x \leq b + d.$$

Жесткость при кручении выразится формулой

$$C = \frac{G}{3} \left\{ bd^3 - \frac{d^4}{2} - \frac{24d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{A_k^*}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d) - \right. \\ \left. - \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} A_k^* \left[\operatorname{cth} k\pi + \frac{(-1)^{k+1}}{\operatorname{sh} k\pi} \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Подставляя найденные значения A_k^* из (2.13) в (2.17), при $b=d\sqrt{2}$ для жесткости получим следующие оценки:

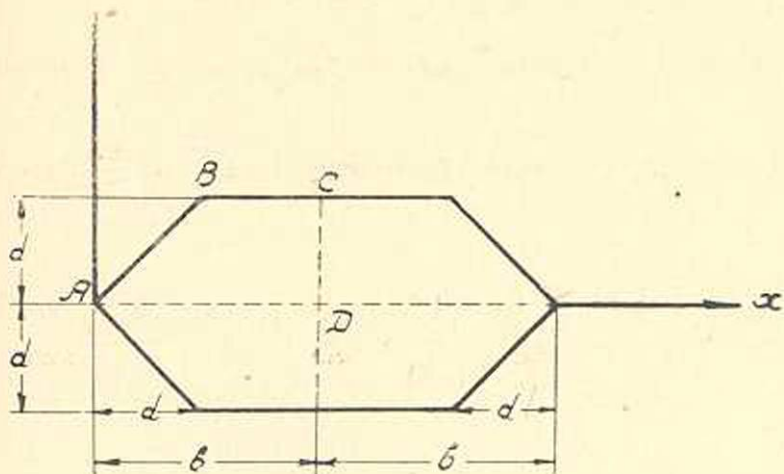
$$\bar{C} = 0,20302 Gd^4 \leq C \leq 0,22097 Gd^4 = \bar{C}. \quad (2.18)$$

За расчетную формулу для жесткости примем

$$C = \frac{\bar{C} + \bar{C}}{2}, \quad (2.19)$$

при этом погрешность будет не более 5% .

§ 3. Кручение стержней стрелковидного поперечного сечения (фиг. 3).



Фиг. 3

Вследствие симметрии достаточно найти функцию напряжений $U(x, y)$ только для части области сечения, т. е. для ABCD.

Функцию $U(x, y)$ ищем в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & 0 \leq x \leq d \\ U_2(x, y) & d \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3.1)$$

При этом для $U_1(x, y)$ должны выполняться следующие условия:

$$\nabla^2 U_1 = -2$$

$$U_1(x, y) = 0 \quad \text{на контуре}$$

$$U_1(d, y) = U_2(d, y)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x=d} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=d} \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=b} = 0.$$

Положим

$$U_1(x, y) = x(y - x) + \sum_k^{1,3,5} A_k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{2d} \cos \frac{k\pi y}{2d} - \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{2d} \cos \frac{k\pi x}{2d} \right] + \\ + \sum_k^{1,3,5} B_k \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (d - x) \cos \frac{k\pi y}{2d} - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (d - y) \cos \frac{k\pi x}{2d} \right], \quad (3.3)$$

$$U_2(x, y) = \sum_k^{1,3,5} f_k(x) \cos \frac{k\pi y}{2d}, \quad (3.4)$$

где $f_k(x) = C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{2d} + D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{2d} + \frac{32d^2}{k^3\pi^3} (-1)^{\frac{k-1}{2}}.$ (3.5)

Пользуясь условиями (3.2) и (3.5), исключим коэффициенты

B_k , C_k и D_k , тогда, введя обозначение $(-1)^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2} A_k = A_k^*$, получим:

$$A_k^* = \frac{16d^2}{k^2\pi^2} \frac{1 + 2\operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)}{\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)} + \frac{8d^2}{k\pi^2} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (b - 2d)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2d}} + \\ + \frac{64d^2}{\pi^4} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)} \sum_p^{1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p(p^2 + k^2)} - \\ - \frac{4k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{th} \frac{\pi k}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)} \sum_p^{1,3,5} \frac{A_p^*}{p^2 + k^2}. \quad (3.6)$$

Система (3.6) вполне регулярна, так как

$$\frac{4k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)} \sum_p^{1,3,5} \frac{1}{p^2 + k^2} = \frac{1}{1 + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d) \cdot \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2}} < 1 - \theta,$$

где $\theta > 0$;

следовательно, она однозначно определяет коэффициенты A_k^* .

Функция напряжений будет иметь вид

$$U(x, y) = x(y - x) +$$

$$+ \sum_k^{1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} A_k^*}{k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{2d} \cos \frac{k\pi y}{2d} - \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{2d} \cdot \cos \frac{k\pi x}{2d} \right] -$$

$$- \frac{8d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{1}{k^2 \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} \left[\frac{2}{k\pi} - (-1)^{\frac{k-1}{2}} \right] \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (d-x) \cos \frac{k\pi y}{2d} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (d-y) \cos \frac{k\pi x}{2d} \right], \quad (3.7)$$

$$0 \leq x \leq d$$

$$U(x, y) = \sum_k^{1,3,5} \cos \frac{k\pi y}{2d} \left\{ \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} A_k^* \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-x)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-d)} - \right.$$

$$\left. - \frac{8d^2}{k^2 \pi^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-x)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-d)} + \frac{32d^2}{k^2 \pi^2} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-x)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-d)} \right] \right\} \quad (3.8)$$

$$d \leq x \leq b.$$

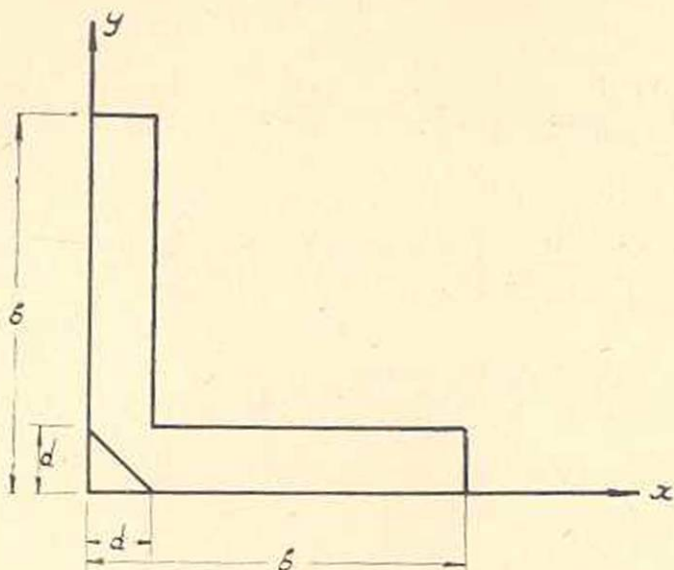
Пользуясь формулой (1.28), для жесткости профиля получим следующее выражение

$$C = G \left\{ \frac{16}{3} bd^3 - 9d^4 + \frac{32d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{A_k^*}{k^2} \left[\operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b-d) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} \right] + \frac{256}{\pi^4} d^4 \sum_k^{1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^4} \left[\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b-d) \right] +$$

$$\left. + \frac{512}{\pi^6} d^4 \sum_k^{1,3,5} \frac{1}{k^6} \left[1 - \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} - 2 \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b-d) \right] \right\} \quad (3.10)$$

§ 4. Кручение стержня с поперечным сечением в виде уголка с вырезом под углом 45° (фиг. 4).



Фиг. 4

Функцию напряжений $U(x, y)$ ищем в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & 0 \leq x \leq d, \quad 0 \leq y \leq d \\ U_2(x, y) & d \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq d \\ U_3(y, x) & 0 \leq x \leq d, \quad d \leq y \leq b. \end{cases} \quad (4.1)$$

При этом должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \nabla^2 U_i = -2 \\ U_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2) \text{ на контуре} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} U_1(d, y) = U_3(d, y) \\ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x=d} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial x} \right)_{x=d} \end{cases} \quad (4.3)$$

Полагаем

$$U_1(x, y) = -\frac{1}{2}(x+y)(x+y-d) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(d-x) \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \sin \frac{k\pi}{d}(d-x) - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(d-y) + \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(d-y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d} \right\}, \quad (4.4)$$

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d},$$

где в силу (4.2)

$$\begin{aligned} \bar{t}_k(x) = C_k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \right] + \\ + \frac{4d^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}} \right]. \end{aligned} \quad (4.4')$$

Тогда воспользовавшись условиями (4.3) и введя обозначение $-kA_k \operatorname{sh} k\pi = A_k^*$, получим

$$\begin{aligned} C_k \left[\operatorname{ch} k\pi - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d} \operatorname{sh} k\pi \right] = (-1)^k \operatorname{sh} k\pi A_k^* + \frac{2d^2}{k\pi} (-1)^k - \\ - \frac{2d^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] + \frac{4d^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{sh} k\pi}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} A_k^* \left[\operatorname{ch} k\pi + \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-d) - \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} k\pi} \right] = \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^*}{p^2 + k^2} [1 - (-1)^{p+k}] - \\ - \frac{4d^2}{k^2\pi^3} \frac{\operatorname{sh} k\pi}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}} [1 + (-1)^{k+1}] \left[\operatorname{ch} k\pi + \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b+d) \right] + \\ + \frac{d^2}{k^2\pi^3} [3 + (-1)^{k+1}] + \frac{2d^2}{\pi} \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-d) + \\ + \frac{2d^2}{k^2\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-d). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Нетрудно убедиться, что система (4.6) вполне регулярна, а ее свободный член ограничен сверху, поэтому эта система однозначно определяет коэффициенты A_k^* .

Согласно соотношениям (4.1), (4.4), (4.4') и (4.5) функцию напряжений можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} U(x, y) = -\frac{1}{2} (x+y-d)(x+y) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^*}{k \operatorname{sh} k\pi} \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (d-x) \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \sin \frac{k\pi}{d} (d-x) - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi}{d} (d-y) + \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (d-y) \sin \frac{k\pi x}{d} \right\}, \\ \text{при } 0 \leq x \leq d; \quad 0 \leq y \leq d. \end{aligned}$$

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{(-1)^k}{k} A_k^* \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b-x)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b-d)} + \frac{2d^2}{k\pi} (-1)^k \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b-x)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b-d)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2d^2}{\kappa^2 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-x)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \\
& + \frac{4d^2}{\kappa^2 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{sh} \kappa \pi}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}} \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-x)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \\
& + \frac{4d^2}{\kappa^2 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}} \right] \sin \frac{\kappa \pi y}{d},
\end{aligned}$$

при $d \leq x \leq b$; $0 \leq y \leq d$.

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ - \frac{(-1)^k}{\kappa} A_k^* \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \right. \\
& + \frac{2d^2}{\kappa^2} (-1)^k \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} - \frac{2d^2}{\kappa^2 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \\
& + \frac{4d^2}{\kappa^2 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{sh} \kappa \pi}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}} \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \\
& \left. + \frac{4d^2}{\kappa^2 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{d}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}} \right] \right\} \sin \frac{\kappa \pi x}{d},
\end{aligned}$$

при $d \leq y \leq b$, $0 \leq x \leq d$.

Согласно формуле (1.28) для жесткости получим следующее выражение:

$$C = G \left\{ \frac{\pi}{3} b d^3 + \frac{4d^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^*}{\kappa^3} \left[\operatorname{cth} \kappa \pi - \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \kappa \pi} \right] + \right.$$

$$+\frac{8d^2}{\pi^2}\sum_k^{1,3,5}\frac{A_k}{k^2}\operatorname{th}\frac{k\pi}{2d}(b-d)-d^4-\frac{16}{\pi^2}d^4\sum_k^{1,3,5}\frac{1}{k^3}\operatorname{th}\frac{k\pi}{2d}(b-d)-$$

$$-\frac{32}{\pi^2}d^4\sum_k^{1,3,5}\frac{1}{k^5}\left[\operatorname{th}\frac{k\pi}{2d}(b-d)+2\operatorname{cth}\frac{k\pi b}{d}-\frac{2}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{d}}\frac{\operatorname{ch}\frac{k\pi}{2d}(b+d)}{\operatorname{ch}\frac{k\pi}{2d}(b-d)}\right].$$

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 15-IV 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х., ПММ, т. XIII, вып. 1, 1949.
2. Князевский Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гос. техиздат, М., 1949.

Ե. Ա. Ալեքանդրյան

ՄԻ ՔԱՆԻ ՊՐԻՉՄԱՏԻԿ ԶՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերվում է 45°-ի հատույթներով պոլիգոնալ բնդլայնական հատվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Կիրառելով օժանդակ ֆունկցիայի մուծման մեթոդը, խնդրի մասնակի ածանցյալներով հավասարումների լուծումը բերված է հաստատուն դորժակիցներով երկրորդ կարգի դժային գիֆերենցիալ հավասարումների լուծման, իսկ ինանդրման հաստատունների որոշումը բերված է անվերջ սեզույար և լիմիին սեզույար դժային հավասարումների սխեմների լուծման:

Ստացված բանաձևերով որոշվում է ձողի կոշտությամբ ոլորման ժամանակ, կախված հատվածքի երկրաչափական պարամետրներից: