

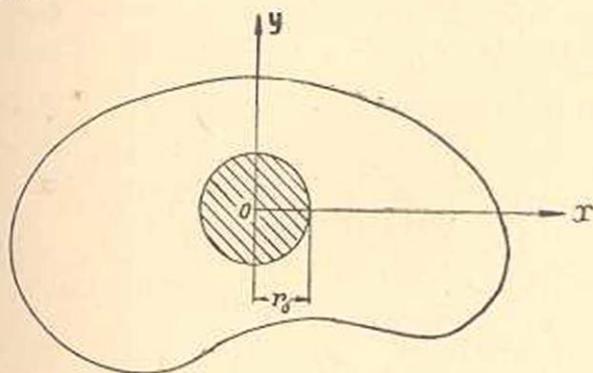
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О. М. Сапонджян

Изгиб свободно опертой полигональной плиты

В работе дано решение задачи об изгибе свободно опертой полигональной плиты при действии нагрузки равномерно распределенной по площади круга. В качестве примера решена задача об изгибе правильной многоугольной плиты.

1. *Определение прогиба упругой поверхности.* Общее выражение прогиба упругой поверхности плиты, при действии нагрузки равномерно распределенной по площади круга (фиг. 1) радиусом r_0 и центром в начале координат плоскости xu , нами ранее представлено в виде [1]:



Фиг. 1.

в замкнутой области нагруженного круга

$$w_0 = \frac{\rho z^2 \bar{z}^2}{64D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2 \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + z\bar{z} - \frac{5}{4} r_0^2 \right] + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.1)$$

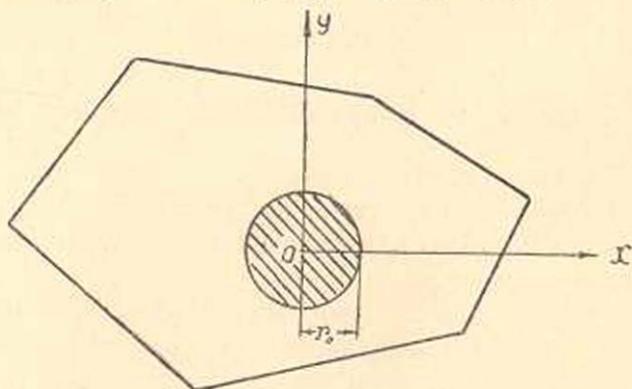
в замкнутой нагруженной области плиты

$$w_1 = \frac{P}{16\pi D} \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln z\bar{z} + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.2)$$

где ρ — интенсивность нагрузки, $P = \pi r_0^2 \rho$ — равнодействующая нагрузки, $Eh^3/12(1 - \sigma^2)$ — жесткость плиты, h — толщина плиты, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$ и

$\kappa(z)$ — функции комплексного переменного, голоморфные во всей области плиты, $\bar{\varphi}(\bar{z})$ и $\bar{\kappa}(\bar{z})$ — функции, сопряженные с функциями $\varphi(z)$ и $\kappa(z)$.

Для решения задачи об изгибе свободно опертой полигональной плиты при действии нагрузки равномерно распределенной по площади круга (фиг. 2) применяем формулы (1.1) и (1.2).



Фиг. 2.

Функции $\varphi(z)$ и $\kappa(z)$ определяем из условий опирания

$$w_1 = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^2 w_1 = 0, \quad (1.3)$$

или согласно (1.2)

$$\begin{aligned} z_s \varphi(z_s) + z_s \bar{\varphi}(\bar{z}_s) + \kappa(z_s) + \bar{\kappa}(\bar{z}_s) = \\ = - \frac{P}{16\pi D} \left(z_s \bar{z}_s + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln z_s \bar{z}_s, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\varphi'(z_s) + \bar{\varphi}'(\bar{z}_s) = - \frac{P}{16\pi D} (2 + \ln z_s \bar{z}_s), \quad (1.5)$$

где s — контур плиты.

Пусть функция $z = \omega(\zeta)$ при $\omega(0) = 0$ (1.6) конформно преобразует область единичного круга плоскости комплексного переменного ζ в область многоугольника на плоскости z .

Тогда, обозначив

$$\varphi_1(\zeta) = \varphi(z), \quad \kappa_1(\zeta) = \kappa(z),$$

а через $t = e^{i\theta}$ — аффикс произвольной точки на окружности единичного круга, и имея в виду, что $\ln t \bar{t} = 0$, из (1.4) и (1.5) получим:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\bar{t}) \varphi_1(t) + \omega(t) \bar{\varphi}_1(\bar{t}) + \kappa_1(t) + \bar{\kappa}_1(\bar{t}) = \\ = - \frac{P}{16\pi D} \left[\omega(t) \bar{\omega}(\bar{t}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \left[\ln \frac{\omega(t)}{t} + \ln \frac{\bar{\omega}(\bar{t})}{\bar{t}} \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{\varphi_1'(t)}{\omega'(t)} + \frac{\bar{\varphi}_1'(\bar{t})}{\bar{\omega}'(\bar{t})} = - \frac{P}{16\pi D} \left[2 + \ln \frac{\omega(t)}{t} + \ln \frac{\bar{\omega}(\bar{t})}{\bar{t}} \right]. \quad (1.8)$$

Из (1.8) легко можно определить функцию $\varphi_1(\zeta)$. Действительно, обозначив через

$$g(\zeta) = \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{P}{16\pi D} \left[1 + \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \right], \quad (1.9)$$

согласно (1.8) получим:

$$g(t) + \bar{g}(\bar{t}) = 0. \quad (1.10)$$

Так как $g(\zeta)$ голоморфна в области единичного круга, то единственным решением уравнения (1.10) будет:

$$g(\zeta) = ic,$$

где c — произвольная действительная постоянная.

Таким образом решение уравнения (1.8) представится в следующем виде:

$$\frac{\varphi_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = -\frac{P}{16\pi D} \left[1 + \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \right] + ic. \quad (1.11)$$

Мнимую часть функции $\varphi'(0)$, т. е. $\text{Im}[\varphi'(0)]$, можно зафиксировать произвольно [2], поэтому можем принять

$$\text{Im}[\varphi'(0)] = \text{Im} \left[\frac{\varphi_1'(0)}{\omega'(0)} \right] = -\frac{P}{16\pi D} \text{Im}[\ln \omega'(0)].$$

Тогда из (1.11) получим: $c = 0$, и потому

$$\varphi_1'(\zeta) = -\frac{P}{16\pi D} \left[1 + \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \right] \omega'(\zeta).$$

Интегрируя и полагая $\varphi_1(0) = 0$ [2], получим окончательно

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{P}{16\pi D} \left[\omega(\zeta) \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} + \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right]. \quad (1.12)$$

Внеся (1.12) в (1.7), получим:

$$z_1(t) + \bar{z}_1(\bar{t}) = -\frac{Pr_0^2}{32\pi D} \left[\ln \frac{\omega(t)}{t} + \ln \frac{\bar{\omega}(\bar{t})}{\bar{t}} \right] + \frac{P}{16\pi D} \Omega(t), \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) \int_0^1 \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \omega(t) \int_0^1 \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} = \\ &= 2 \text{Re} \left[\bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) \int_0^1 \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из (1.13), полагая $I_m[z(0)] = 0$ [2], найдем:

$$z_1(\zeta) = -\frac{Pr_0^2}{32\pi D} \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} + \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{t-\zeta} dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta \right], \quad (1.15)$$

где γ — окружность единичного круга.

Бигармоническая функция

$$\Phi = \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \alpha(z) + \bar{\alpha}(\bar{z}), \quad (1.16)$$

согласно (1.12) и (1.15), примет вид

$$\Phi = -\frac{P}{16\pi D} \operatorname{Re} \left\{ \left[\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \ln \frac{\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta \bar{\zeta}} + \right. \\ \left. + 2\bar{\omega}(\bar{\zeta}) \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{t-\zeta} dt \right\}, \quad (1.17)$$

или же

$$\Phi = -\frac{P}{16\pi D} \operatorname{Re} \left\{ \left[\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \ln \frac{\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta \bar{\zeta}} + \right. \\ \left. + 2\bar{\omega}(\bar{\zeta}) \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-|\zeta|^2) \Omega(e^{i\theta})}{1+|\zeta|^2-2|\zeta| \cos(\theta-\arg \zeta)} d\theta \right\}. \quad (1.18)$$

Функция $\Omega(e^{i\theta})$ непрерывна на окружности γ . В этом случае входящий в (1.18) интеграл Пуассона представляет собою регулярную в области единичного круга гармоническую функцию, непрерывную вплоть до γ , причем на γ этот интеграл принимает значение $\Omega(e^{i\theta})$. В силу этого бигармоническая функция (1.18) также будет непрерывной в области единичного круга, вплоть до γ , причем на γ она принимает значение

$$\Phi_{\gamma} = -\frac{P}{16\pi D} \left[\omega(t) \bar{\omega}(\bar{t}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \ln \omega(t) \bar{\omega}(\bar{t}).$$

Внося это выражение в (1.2), найдем, что на контуре плиты $w_1 = 0$.

Легко проверить обратным путем, что удовлетворяется и второе условие (1.3).

Имея в виду (1.16) и внося (1.17) в (1.1) и (1.2), найдем окончательное решение задачи об изгибе опертой полигональной плиты при действии нагрузки равномерно распределенной по площади круга

в замкнутой области нагруженного круга

$$w_0 = \frac{\rho z^2 \bar{z}^2}{64D} - \frac{P}{16\pi D} \left\{ \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \frac{z\bar{z}}{r_0^2 \zeta \bar{\zeta}} - \right. \\ \left. - z\bar{z} + \frac{5}{4} r_0^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\bar{z} \int_0^z \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Omega(t)}{t-\zeta} dt \right] \right\}, \quad (1.19)$$

в замкнутой ненагруженной области плиты

$$w_1 = \frac{P}{16\pi D} \left\{ \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \zeta \bar{\zeta} - 2 \operatorname{Re} \left[\bar{z} \int_0^z \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega(t)}{t-\zeta} dt \right] \right\}. \quad (1.20)$$

Полагая в (1.19) $z=0$, $\zeta=0$, найдем прогиб в центре нагруженного круга

$$w(0,0) = \frac{P}{32\pi^2 D} \left[\int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta - \pi r_0^2 \ln \frac{|\omega'(0)|^2}{r_0^2} + \frac{5\pi}{2} r_0^2 \right]. \quad (1.21)$$

При $r_0=0$, (1.21) дает значения прогиба под сосредоточенной силой P , приложенной в начале координат

$$w(0,0) = \frac{P}{32\pi^2 D} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta. \quad (1.22)$$

2. *Выражения изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил.* Пользуясь выражениями (1.12), (1.15) и известными формулами теории изгиба тонких плит, получим:

в замкнутой области нагруженного круга

$$M_1 + M_2 = -\frac{\rho(1+\sigma)}{4} z\bar{z} + \frac{P}{4\pi} \left(1 + \ln \frac{z\bar{z}}{r_0^2 \zeta \bar{\zeta}} \right), \quad (2.1)$$

$$M_1 - M_2 + 2i H_1 = -\frac{\rho(1-\sigma)}{8} z^2 + \frac{P(1-\sigma)}{4\pi} \left\{ \frac{\bar{z}}{z} - \right. \\ \left. - \frac{\bar{z}}{\zeta \omega'(\zeta)} - \frac{r_0^2}{2[\omega'(\zeta)]^2} \left[1 - \frac{1}{\zeta^2} - \frac{\omega''(\zeta)}{\zeta \omega'(\zeta)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega(t)}{(t-\zeta)^2} dt - \frac{1}{[\omega'(\zeta)]^2} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right\}, \quad (2.2)$$

$$N_1 - iN_2 = -\frac{p}{2} \bar{z} + \frac{P}{2\pi} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\zeta \omega'(\zeta)} \right], \quad (2.3)$$

в замкнутой ненагруженной области плиты

$$M_1 + M_2 = -\frac{P(1+\sigma)}{4\pi} \ln \zeta \bar{\zeta}, \quad (2.4)$$

$$M_1 - M_2 + 2iH_1 = \frac{P(1-\sigma)}{8\pi} r_0^2 \frac{\omega'(\zeta) + \zeta \omega''(\zeta)}{\zeta^2 [\omega'(\zeta)]^3} - \frac{P(1-\sigma)}{4\pi} \left\{ \frac{\bar{z}}{\zeta \omega'(\zeta)} - \frac{\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t)}{(t-\zeta)^2} dt + \frac{1}{[\omega'(\zeta)]^2} \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right\}, \quad (2.5)$$

$$N_1 - iN_2 = -\frac{P}{2\pi} \frac{1}{\zeta \omega'(\zeta)}, \quad (2.6)$$

где M_1 , M_2 и H_1 , $H_2 = -H_1$ — изгибающие и крутящие моменты, N_1 , N_2 — перерезающие силы, σ — коэффициент Пуассона.

Формула (2.6) совпадает с формулой Г. Ю. Джанелидзе, выведенной для случая нагрузки, сосредоточенной в начале координат [3].

Полагая в (2.1) — (2.3) $z \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow 0$, получим для центра нагруженного круга

$$M_1 + M_2 = \frac{P}{4\pi} (1+\sigma) \left[1 + \ln \frac{|\omega'(0)|^2}{r_0^2} \right], \quad (2.7)$$

$$M_1 - M_2 + 2iH_1 = -\frac{P(1-\sigma)}{4\pi} \left\{ \frac{r_0^2}{24} \frac{9[\omega''(0)]^2 - 4\omega'(0)\omega'''(0)}{[\omega'(0)]^4} - \frac{\omega''(0)}{[\omega'(0)]^3} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} \Omega(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{[\omega'(0)]^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} \Omega(e^{i\theta}) d\theta \right\}, \quad (2.8)$$

$$N_1 - iN_2 = \frac{P}{4\pi} \frac{\omega''(0)}{[\omega'(0)]^2}. \quad (2.9)$$

Выражения (2.7) — (2.9) имеют вполне определенные значения, так как $\omega'(0) \neq 0$, а функции $\Omega(e^{i\theta})$ непрерывна на окружности γ .

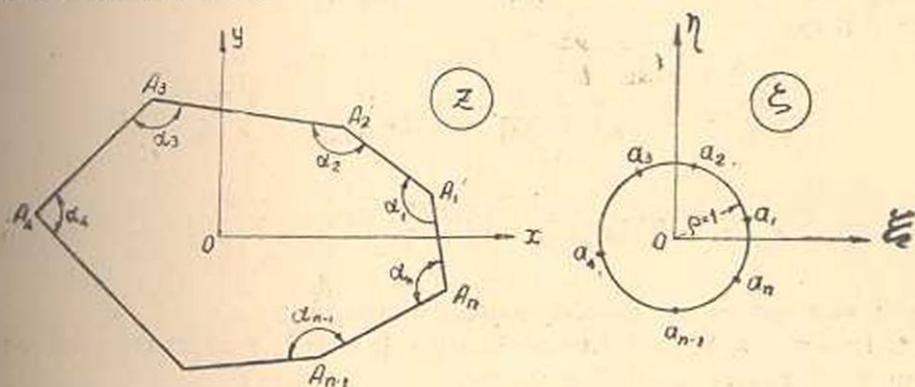
Конформное отображение единичного круга на внутреннюю область многоугольника осуществляется формулой Кристоффеля-Шварца

$$z = \omega(\zeta) = c \int_{\zeta_0}^{\zeta} (a_1 - \zeta)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (a_2 - \zeta)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (a_n - \zeta)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\zeta, \quad (2.10)$$

где c — постоянный параметр, p — число сторон многоугольника, a_1, a_2, \dots, a_n — точки на окружности γ , соответствующие вершинам многоугольника — A_1, A_2, \dots, A_n , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — внутренние углы многоугольника (фиг. 3).

Легко можно показать, что функция $\omega(t)$ на γ удовлетворяет условию Гельдера $h(\mu)$, причем $\mu = \alpha_{\min}/\pi$, где α_{\min} — наименьший внутренний угол многоугольника.

Тогда, согласно (1.14), $\Omega(t)$ также будет удовлетворять на γ условию $h(\alpha_{\min}/\pi)$. Этим обеспечиваются условия непрерывности изгибающих и крутящих моментов в области плиты (из формулы поперечных сил непосредственно видно, что они также удовлетворяют этим условиям).



Фиг. 3.

Пользуясь формулой (2.10), можно показать, что углы наклона упругой поверхности и внутренние усилия плиты непрерывны вплоть до контура, кроме, может быть, угловых точек.

3. *Поведение перерезывающих сил в угловых точках.* Согласно (2.6) и (2.10) имеем:

$$N_1 - iN_2 = -\frac{P}{2\pi c\zeta} (a_1 - \zeta)^{1 - \frac{\alpha_1}{\pi}} (a_2 - \zeta)^{1 - \frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (a_n - \zeta)^{1 - \frac{\alpha_n}{\pi}}, \quad (3.1)$$

откуда непосредственно видно, что на вершине угла α_k при $0 < \alpha_k < \pi$,

$$N_1 = N_2 = 0,$$

а при

$$\pi < \alpha_k < 2\pi,$$

$$N_1 - iN_2 \rightarrow \infty.$$

Таким образом, на вершине входящего угла перерезывающая сила (распределенная) принимает бесконечно большое значение. Однако легко можно вывести формулу

$$N ds = -\frac{P}{2\pi} d\theta, \quad (3.2)$$

где N — перерезывающая сила на контуре.

Из (3.2) следует, что равнодействующая перерезывающих сил, действующих в окрестности любого угла многоугольника, стремится к нулю.

Заметим, что из (3.2) следует условие равновесия плиты

$$\int_0^{2\pi} N ds = -P.$$

4. *Поведение угла наклона упругой поверхности плиты в угловых точках.* Обозначим через ν — внешнюю нормаль контура, β — угол между ν и x , а $\partial w / \partial \nu$ — угол наклона упругой поверхности на контуре. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \nu} = 2e^{i\beta} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{8\pi D} e^{i\beta} \left[\frac{r_0^2}{2\zeta \omega'(\zeta)} - \int_0^{\zeta} \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right]_{\zeta \rightarrow t_0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где t_0 = произвольно фиксированная точка на γ .

При $\pi < \alpha_k < 2\pi$ согласно (2.10) $\omega'(a_k) = 0$, вследствие чего для вершины угла α_k из (4.1) получим:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)_{A_k} \rightarrow \infty.$$

Этот результат указывает на то, что наше решение в случае входящего угла неточно.

Рассмотрим теперь случай $0 < \alpha_k < \pi$.

Обозначим:

$$\lambda = \frac{\int_0^{a_k} \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}}{\int_0^{a_k} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta}, \quad (4.2)$$

и представим (1.14) в виде:

$$\begin{aligned} \Omega(t) = \lambda \omega(t) \int_0^t \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \int_0^t \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} - \lambda \left[\omega(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \right] \left[\int_0^t \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \frac{1}{\lambda} \int_0^t \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Внося (4.3) в (4.1) и пользуясь известными свойствами интеграла типа Коши, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{P}{8\pi D} e^{i\beta} \left[\frac{r_0^2}{2\zeta \omega'(\zeta)} - \int_0^{\bar{\zeta}} \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} + \lambda \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{t-\zeta} dt \right]_{\zeta \rightarrow t_0}, \quad (4.4)$$

где

$$U(t) = \frac{U^*(t)}{1 - \frac{\alpha_k}{\pi} (a_k - t)}, \quad (4.5)$$

$$U^*(t) = \left(1 + \frac{1}{\lambda} e^{-2i\beta} \right) V(t) \left[\int_0^t \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \frac{1}{\lambda} \int_0^t \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right], \quad (4.6)$$

$$V(t) = \omega'(t) (a_k - t)^{1 - \frac{\alpha_k}{\pi}},$$

причем функция $V(t)$ и ее производные непрерывны в точке a_k .

В силу (4.2) и (4.6) $U^*(a_k) = 0$. Первая же производная функции $U^*(t)$ непрерывна в окрестности a_k за исключением точки a_k , где она претерпевает разрыв конечной величины. При наличии указанных условий функция $U(t)$ в окрестности a_k (включая a_k) будет удовлетворять условию $h(\mu)$ [4], причем $\mu = \frac{\alpha_k}{\pi}$.

Благодаря этому

$$\lim_{\zeta \rightarrow a_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{t-\zeta} dt = B_k, \quad (4.7)$$

где B_k — конечное число.

Имея в виду также, что согласно (2.10) и (4.2)

$$\omega'(a_k) \rightarrow \infty \quad (0 < \alpha_k < \pi)$$

и

$$\lambda \int_0^{a_k} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \int_0^{a_k} \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} = 0, \quad (4.8)$$

из (4.4), полагая $t_0 = a_k$, получим окончательно

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)_{A_k} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \alpha_k < \pi. \quad (4.9)$$

Таким образом угол наклона упругой поверхности на вершине угла $0 < \alpha_k < \pi$ равен нулю.

5. Поведение изгибающих и крутящих моментов в угловых точках плиты. Внеся (4.3) в (2.5), имеем:

$$M_1 - M_2 + 2i H_1 = \frac{P(1-\sigma)}{4\pi} \left\{ \frac{r_0^2}{2} \left[\frac{1}{\zeta^2 [\omega'(\zeta)]^2} + \frac{\omega''(\zeta)}{\zeta [\omega'(\zeta)]^3} \right] - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta \omega'(\zeta)} - \lambda \frac{\omega(\zeta)}{\zeta \omega'(\zeta)} + \lambda \frac{\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{t-\zeta} dt - \frac{\lambda}{[\omega'(\zeta)]^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right\}. \quad (5.1)$$

В силу того, что $U(t)$ удовлетворяет условию $h(\alpha_k/\pi)$ при $0 < \alpha_k < \pi$, для окрестности a_k имеем оценку [4],

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right| < \frac{\text{const}}{|a_k - \zeta|^{1 - \frac{\alpha_k}{\pi}}}. \quad (5.2)$$

Тогда, имея в виду также (2.10), получим:

$$\lim_{\zeta \rightarrow a_k} \left[\frac{1}{(\omega'(\zeta))^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right] \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

$(0 < \alpha_k < \pi).$

Далее, имея в виду (2.10), (4.7) и (5.3), из (5.1) получим:

$$(M_1 - M_2 + 2i H_1)_{A_k} = \frac{P(1-\sigma)(\pi - \alpha_k)}{8\pi^2 [V(a_k)]^2} \left[\frac{r_0^2}{a_k} + 2\lambda B_k \right] \lim_{\zeta \rightarrow a_k} (a_k - \zeta)^{1 - \frac{2\alpha_k}{\pi}}. \quad (5.4)$$

где $V(a_k) \neq 0$.

Учитывая также, что согласно (2.4) на контуре $M_1 + M_2 = 0$, из (5.4) имеем:

$$\text{при } 0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}$$

$$(M_1)_{A_k} = (M_2)_{A_k} = (H_1)_{A_k} = (H_2)_{A_k} = 0,$$

$$\text{при } \alpha_k = \frac{\pi}{2}$$

$$(M_1 + iH_1)_{A_k} = \frac{P(1-\sigma)}{32\pi [V(a_k)]^2} \left[\frac{r_0^2}{a_k} + 2\lambda B_k \right],$$

$$\text{при } \frac{\pi}{2} < \alpha_k < \pi$$

$$(M_1 + iH_1)_{A_k} \rightarrow \infty.$$

Таким образом, изгибающие и крутящие моменты на вершине острого угла обращаются в нуль, на вершине прямого угла принимают конечное значение, а на вершине тупого угла становятся бесконечно большими.

Легко проверить, что указанные величины на вершине входящего угла ($\pi < \alpha_k < 2\pi$) также стремятся к бесконечности.

Крутящий момент на боковой поверхности плиты определяется формулой

$$H = -\frac{i}{4} [e^{2i\beta}(M_1 - M_2 + 2iN_1) - e^{-2i\beta}(M_1 - M_2 - 2iN_1)],$$

из которой, имея в виду результаты п. 5, получим:

$$(H)_{\lambda_k} = 0 \quad \text{при } 0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}.$$

Это показывает, что опорная сосредоточенная реакция, заменяющая крутящие моменты, на вершине острого угла равна нулю.

$$\text{При } \alpha_k = \frac{\pi}{2}$$

$$(H)_{\lambda_k}^{\text{лев.}} = - (H)_{\lambda_k}^{\text{прав.}} = \frac{P(1-\sigma)}{32\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{ie^{2i\beta_k^{\text{прав.}}}}{[V(a_{\lambda_k})]^2} \left(\frac{r_0^2}{a_k} + 2\lambda B_k \right) \right]. \quad (5.5)$$

В этом случае заменяющая сосредоточенная опорная реакция будет:

$$(Q)_{\lambda_k} = 2(H)_{\lambda_k}^{\text{прав.}}. \quad (5.6)$$

$$\text{При } \frac{\pi}{2} < \alpha_k < 2\pi$$

$$(H)_{\lambda_k}^{\text{лев.}} \rightarrow \infty, \quad (H)_{\lambda_k}^{\text{прав.}} \rightarrow \infty.$$

Определим результирующий крутящий момент, действующий на произвольном отрезке АВ какой-либо стороны многоугольника.

Имеем по известной формуле

$$H = D(1-\sigma) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right);$$

можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s},$$

где ρ — радиус кривизны кривой s .

Тогда

$$H = D(1-\sigma) \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} \right],$$

откуда

$$\int_A^B H ds = D(1-\sigma) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_B - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_A \right] - D(1-\sigma) \int_A^B \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} ds.$$

Последний интеграл на контуре, при $w = 0$, обращается в нуль. Поэтому

$$\int_{\lambda}^{\beta} H ds = D(1-\sigma) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)_{\beta} - \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)_{\lambda} \right]. \quad (5.7)$$

Из этой формулы следует, что при $0 < \alpha_k < \pi$ результирующий крутящий момент вблизи угловой точки (слева и справа от вершины) стремится к нулю, а при $\pi < \alpha_k < 2\pi$ он стремится к бесконечности.

Из той же формулы следует, что если каждый из двух соседних внутренних углов многоугольника меньше π , то крутящие моменты действующие по общей стороне этих углов, статически эквивалентны нулю.

6. Проверка найденного решения. Найденное решение удовлетворяет на контуре многоугольника условиям $w_1 = 0$ и $\nabla^2 w_1 = 0$. Однако необходимо отметить, что для угловых точек полигональной плиты условие $\nabla^2 w_1 = 0$ не выражает равенства нулю изгибающего момента, так как в этих точках радиус кривизны обращается в нуль. При $w_1 = 0$ на контуре, изгибающий момент на контуре выражается формулой

$$M_v = -D \left[\nabla^2 w_1 - \frac{1-\sigma}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial v} \right]. \quad (6.1)$$

Поэтому для угловых точек следовало бы использовать условие

$$\left(\nabla^2 w_1 - \frac{1-\sigma}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial v} \right)_{\rho \rightarrow 0} = 0. \quad (6.2)$$

Но тогда задача становится весьма сложной и при решении ее могут возникнуть серьезные затруднения математического характера. Поэтому мы заранее отказались от точного удовлетворения контурных условий и основывались на условиях (1.3).

Теперь проверим, удовлетворяет ли найденное решение условию (6.2). Для этого, очевидно, надо проверить условие

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial v} \right) = 0. \quad (6.3)$$

Заменим угол α_k дугой окружности малого радиуса ρ . Точку пересечения этой дуги с биссектрисой угла α_k обозначим через z^* . Далее, найдем значение выражения $\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial v}$ в указанной точке z^* , и, затем, приблизим эту точку по биссектрисе угла α_k к вершине многоугольника, полагая при этом $0 < \alpha_k < \pi$.

Опуская промежуточные выкладки, напомним окончательный результат

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right) = - \frac{P(\pi - \alpha_k)}{16\pi^2 D} \operatorname{Re} \left\{ \frac{c_k e^{i\delta}}{[V(a_k)]^2} \left[\frac{r_0^2}{a_k} + 2\lambda B_k \right] \lim_{\zeta^* \rightarrow a_k} (a_k - \zeta)^{1 - \frac{2\alpha_k}{\pi}} \right\}, \quad (6.4)$$

где δ — угол между биссектрисой угла α_k и осью ox , ζ^* — точка внутри единичного круга, соответствующая точке z^* , а

$$c_k = - \frac{e^{i\delta}}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} \left(i - \sin \frac{\alpha_k}{2} \right).$$

Из (6.4) следует:

при $0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right) = 0,$$

при $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right)$ — принимает конечное значение, и при $\frac{\pi}{2} < \alpha_k < \pi$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right) \rightarrow \infty.$$

Таким образом, найденное решение дает точный результат, когда все внутренние углы многоугольника острые, т. е. в случае треугольника с острыми углами.

Если имеется в многоугольнике прямой угол, то в вершине его возникает изгибающий момент, величина которого, согласно (6.1) и (6.4), равна:

$$(M_v)_{\lambda_k} = \frac{(V\sqrt{2} - 1) P(1 - \sigma)}{32\pi D} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{2i\delta}}{[V(a_k)]^2} \left[\frac{r_0^2}{a_k} + 2\lambda B_k \right] \right\}. \quad (6.5)$$

Изолированный изгибающий момент (6.5) не может оказать никакого влияния на плиту. Поэтому условия $w_1 = 0$, $\nabla^2 w_1 = 0$ дают точное решение и в случае прямого угла.

В случае тупого угла

$$(M_v)_{\lambda_k} \rightarrow \infty, \quad (H)_{\lambda_k}^{\text{лев.}} \rightarrow \infty, \quad (H)_{\lambda_k}^{\text{прав.}} \rightarrow \infty.$$

Однако легко проверить, что равнодействующая изгибающих моментов, распределенных по дуге окружности малого радиуса ρ , описанной внутри тупого угла, стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$. Кроме того стремится к нулю и равнодействующая крутящих моментов, действующих в окрестности угловой точки (слева и справа). Поэтому можно полагать, что моменты $(M_v)_{\Lambda_k}$, $(H)_{\Lambda_k}^{acc}$ и $(H)_{\Lambda_k}^{tran}$ не окажут существенного влияния на общую работу плиты, если только число тупых углов невелико. Если, например, увеличить число сторон правильного многоугольника до бесконечности, т. е. перейти к кругу, то условия $w_1 = 0$, $\nabla^2 w_1 = 0$ дадут погрешность для расчетных величин в пределах 20–30%.

Вопрос применения этих условий к полигональным плитам с тупыми углами требует дополнительных исследований. Большую пользу для выяснения этого вопроса могут оказать эксперименты.

7. *Представление отображающей функции в виде ряда. Случай правильного многоугольника.* Приводим некоторые результаты, имеющие практическое значение.

Пусть отображающая функция представлена в виде ряда

$$z = \omega(\zeta) = \sum_1^{\infty} c_k \zeta^k \quad (7.1)$$

Тогда, согласно (1.21) и (1.14) значение прогиба в центре нагруженного круга (начало координат) будет:

$$w(0,0) = \frac{P}{16\pi D} \left[2 \sum_1^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k} - \frac{r_0^2}{2} \ln \frac{|c_1|^2}{r_0^2} - \frac{5}{4} r_0^2 \right] \quad (7.2)$$

Прогиб под сосредоточенной силой P будет:

$$w(0,0) = \frac{P}{8\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k} \quad (7.3)$$

где c_k — коэффициенты разложения отображающей функции в ряд Тейлора.

В случае правильного многоугольника (центр многоугольника принят за начало координат, а ось ox проходит через одну из вершин многоугольника)

$$\omega(\zeta) = c \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{(1-\zeta^n)^{\frac{2}{n}}} = c \left[\zeta + \frac{2\zeta^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{2(n+2)\zeta^{2n+1}}{n^2(2n+1) \cdot 2!} + \frac{2(n+2)(2n+2)\zeta^{3n+1}}{n^3(3n+1) \cdot 3!} + \dots \right] \quad (7.4)$$

$$c = \frac{R}{\int_0^1 \frac{d\xi}{(1-\xi^n)^{\frac{2}{n}}}} = \frac{R n \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right)}, \quad (7.5)$$

где n — число сторон многоугольника, R — радиус окружности, описанной вокруг правильного многоугольника, Γ — гамма функция.

На основе (7.5) составлена таблица 1 для значений $\frac{c}{R}$.

Таблица 1

n	3	4	5	6	8	12
$\frac{c}{R}$	0,5661	0,7628	0,8514	0,8985	0,9442	0,9759

Внося (7.4) и (7.2), получим:

$$w(0,0) = \frac{Pc^2}{8\pi D} \left[1 + \frac{4}{n^2(n+1)^2} + \frac{4(n+2)^2}{n^4(2n+1)^2(2!)^2} + \right. \\ \left. + \frac{4(n+2)^2(2n+2)^2}{n^6(3n+1)^2(3!)^2} + \dots \right] - \frac{Pr_0^2}{16\pi D} \left(\ln \frac{c}{R} + \frac{5}{4} \right). \quad (7.6)$$

Для сечений, проходящих через центр нагруженного круга (начало координат), согласно (2.7)–(2.9) и (7.4), имеем:

$$M(0,0) = M_1(0,0) = M_2(0,0) = \frac{P(1+\sigma)}{8\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{c}{r_0} \right), \quad (7.7)$$

$$H_1(0,0) = H_2(0,0) = 0,$$

$$N_1(0,0) = N_2(0,0) = 0.$$

Перерезывающая сила, действующая в срединных точках сторон многоугольника, равна:

$$N = -\frac{P}{2\pi c} 2^{\frac{2}{n}}. \quad (7.8)$$

Вычисления показывают, что при $n \geq 3$ можно ограничиться первым членом ряда (7.6). Погрешность, допущенная при этом для $w(0,0)$, не превышает 0,9%.

Таким образом, взамен (7.6) можно пользоваться формулой

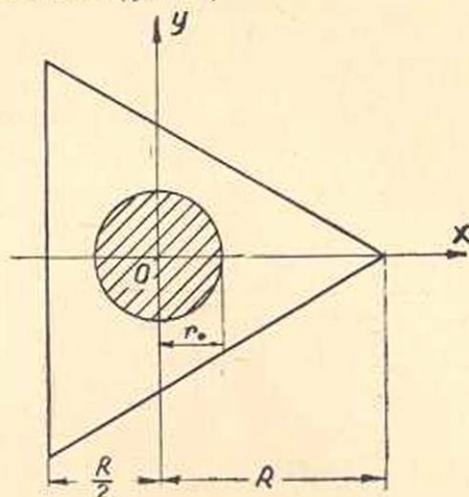
$$w(0,0) = \frac{Pc^2}{8\pi D} - \frac{Pr_0^2}{16\pi D} \left(\ln \frac{c}{r_0} + \frac{5}{4} \right). \quad (7.9)$$

Прогиб в центре многоугольника в случае сосредоточенной силы P , приложенной в этом же центре, будет:

$$w(0,0) = \frac{Pc^2}{8\pi D}. \quad (7.10)$$

На основе формул (7.6) и (7.7) составлены таблицы 2, 3 и 4, при $\sigma = 0,3$.

Треугольная плита (фиг. 4).

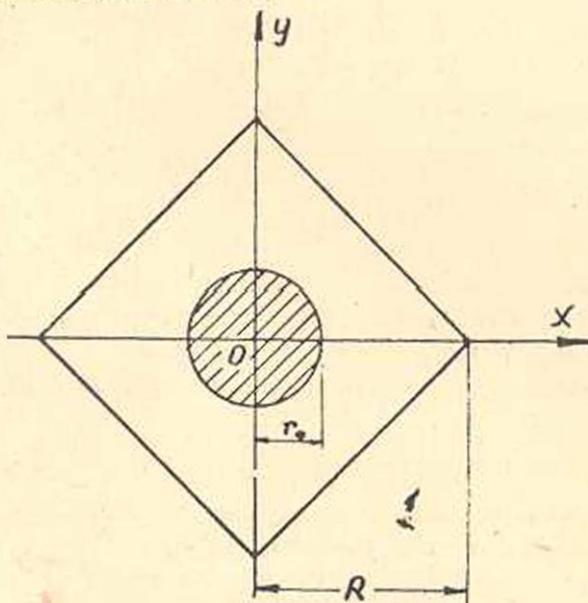


Фиг. 4.

Таблица 2

$\frac{R}{r_0}$	∞	1000	100	10	5	4	3	2
$\frac{Dw(0,0)}{PR^2}$	0,01286	0,01286	0,01285	0,01227	0,01104	0,01029	0,00823	0,00603
$\frac{1}{P} M(0,0)$	∞	0,7071	0,4690	0,2310	0,1593	0,1362	0,1065	0,0645

Квадратная плита (фиг. 5.).

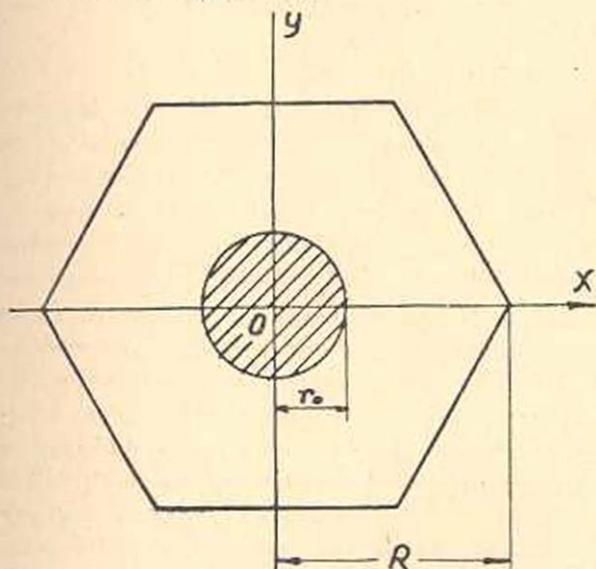


Фиг. 5

Таблица 3

$\frac{R}{r_0}$	∞	1000	100	10	5	4	3	$\sqrt{2}$
$\frac{Dw(0,0)}{PR^2}$	0,02320	0,02320	0,02319	0,02255	0,02114	0,02026	0,01488	0,01001
$\frac{1}{P}M(0,0)$	∞	0,7380	0,4999	0,2618	0,1901	0,1658	0,0946	0,0596

Шестиугольная плита (фиг. 6.).



Фиг. 6.

Таблица 4

$\frac{R}{r_0}$	∞	1000	100	10	5	4	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$\frac{Dw(0,0)}{PR^2}$	0,03218	0,03218	0,03217	0,03149	0,2999	0,02904	0,02305	0,01299
$\frac{1}{P}M(0,0)$	∞	0,7553	0,5171	0,2789	0,2072	0,1841	0,1124	0,0556

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 19-IV 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сапонджян О. М. Частное решение дифференциального уравнения упругой поверхности тонкой плиты. Сборник трудов Ереванского политехнического института, № 3, 1948.

2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости, Л., 1935.
3. Джанелидзе Г. Ю. Определение перерезывающих сил при изгибе опертых тонких пластинок. ПММ, т. X, вып. 2, 1946.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946.

Օ. Մ. Սափոնճյան

ԱԶԱՏ ՇԵՆՎԱԾ ԳՈՒԼԻԳՈՆԱԼ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Բ

Հոդվածում տրվում է եզրագծով ազատ շենված պոլիգոնալ (բազմանկյուն) սալի ծոման խնդրի ընդհանուր լուծումը, երբ սալին կիրառված արտաքին ուժերն ուղղահայաց են սալի միջին հարթությանը և հավասարաչափ բաշխված շրջանի մակերեսի վրա: Որպես մասնավոր դեպք նետազտոված է կանոնավոր բազմանկյուն սալի ծոման խնդիրը:

Մոդիլը ընդհանուր ձևով լուծելիս սալի ծոման դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալը ներկայացված է կոմպլեքս փոփոխականի անալիտիկ ֆունկցիաների միջոցով, ըստ է. Գուրսայի բանաձևի: Շրջանի մակերեսի վրա հավասարաչափ բաշխված ուժերի դեպքում, ինչպես ցույց է տրված [1] աշխատության մեջ, դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը կունենա (1.1) և (1.2) տեսքը: Այդպես մասնակցող $\varphi(z)$ և $\chi(z)$ անալիտիկ ֆունկցիաները սրտված են սալի եզրային պայմաններից, օգտագործելով Ն. Բ. Մուսխելիշվիլու մշակած կոնֆորմ արտապատկերման մեթոդը [2].

Հոդվածում բերվում է նշված խնդրի ընդհանուր վերջնական լուծումը, (1.19) և (1.20) բանաձևերի տեսքով, որոնց մեջ մասնակցում է միավոր շրջանի ախրույթը բազմանկյան ներսի ախրույթի վրա կոնֆորմ կերպով արտապատկերող ֆունկցիան: Ելնելով Կրիստոֆֆել-Շվարցի արտապատկերման ֆունկցիայից ցույց է տրված, որ սալի հատվածքներում գործող ներքին ճիգերն անընդհատ են սալի ախրույթում, ընդհուպ մինչև եզրագիծը, բացառությամբ, կարող է պատահել, միայն անկյունային կետերից: Հոդվածում ուսումնասիրված է ճիգերի վարքը անկյունային կետերում: