

МАТЕМАТИКА

Т. М. Тер-Микаэлян

К непрерывности однолистных функций в замкнутых областях, ограниченных некоторыми спрямляемыми кривыми

В настоящей статье рассматривается характер непрерывности в замкнутом круге $|w| \leq 1$ функции $w = f(z)$, конформно отображающей круг $|w| < 1$ на область D , ограниченную некоторой спрямляемой кривой.

В общем виде этот вопрос до конца разрешен М. А. Лаврентьевым [1], который ввел для этого понятие относительного расстояния $\rho(z_1, z_2)$ между двумя точками z_1 и z_2 произвольной ограниченной области D , положив

$$\rho(z_1, z_2) = \min \{ \rho_1(z_1, z_2), \rho_2(z_1, z_2) \},$$

где ρ_1 — нижняя граница длин линий, содержащихся в D и соединяющих точки z_1 и z_2 , а ρ_2 — нижняя граница длин линий, разбивающих область D на две связанные области и отделяющих точки z_1 и z_2 от точки $z = 0$ ($z = 0 \in D$). Граничной точкой z области D М. А. Лаврентьев называет каждую последовательность $z_1, z_2, \dots$ точек D , имеющую все свои предельные точки на границе Γ области D и такую, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(z_n, z_m) = 0.$$

Относительное расстояние $\rho(z^{(1)}, z^{(2)})$ между двумя граничными точками $z^{(1)} = \{z_n^{(1)}\}$ и $z^{(2)} = \{z_n^{(2)}\}$ определяется как $\lim \rho(z_n^{(1)}, z_n^{(2)})$; если оно равно нулю, то точки $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ считаются идентичными.

Так, введенное метризованное понятие граничной точки совпадает с понятием простого конца Каратеодори.

При этих обозначениях М. А. Лаврентьев доказывает следующую теорему.

Пусть функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$ отображает круг $|w| < 1$ на область D , содержащую внутри себя круг $|z| < 1$. Если z_1 и z_2 — две любые точки области D (граничные или внутренние) и w_1 и w_2 — точки единичного круга, соответствующие им при отображении $w = f(z)$, то имеет место следующее двойное неравенство

$$e^{-\frac{K_1}{\rho^2(z_1, z_2)}} < |w_1 - w_2| < K \sqrt{\rho(z_1, z_2)}, \quad (1)$$

где K — абсолютная константа, K_1 — константа, зависящая лишь от диаметра d области D .

В дальнейшем, методом близким к методу, предложенному М. А. Лаврентьевым [1], указанное двойное неравенство уточняется для следующего частного вида областей.

Обозначим через $D(q)$ произвольную однолистную, односвязную область, содержащую внутри себя круг $|z| < 1$, ограниченную спрямляемой кривой Γ , удовлетворяющей следующему условию: отношение длины $l(\gamma)$ произвольной дуги γ границы Γ к длине $d(\gamma)$ ее хорды ограничено одной и той же константой q , не зависящей от дуги γ ,

$$\frac{l(\gamma)}{d(\gamma)} < q,$$

если только $l(\gamma) < \frac{l(\Gamma)}{2}$, где $l(\Gamma)$ — длина границы Γ .

Для областей $D(q)$ доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. Если на границе области $D(q)$ дана одна дуга γ_ε длины ε , то при конформном отображении $w = f(z)$ области $D(q)$ на круг $|w| < 1$, дуге γ_ε границы области $D(q)$ соответствует на окружности $|w| = 1$ дуга γ_w , длина η которой удовлетворяет неравенствам

$$M \varepsilon^{60q^2} < \eta < 2\pi \varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi - 2/q}}, \quad (2)$$

где M — константа, зависящая от длины $l(\Gamma)$ границы Γ и числа q . При этом верхняя оценка точная в том смысле, что показатель при ε не может быть понижен.

Теорема 2. Пусть точка z_0 области $D(q)$ отстоит от границы области на расстоянии ε . Тогда при конформном отображении $w = f(z)$, $f(0) = 0$, области $D(q)$ на единичный круг $|w| < 1$ точка $w_0 = F(z_0)$, соответствующая точке z_0 , отстоит от окружности $|w| = 1$ на расстоянии h , которое удовлетворяет неравенствам

$$M \varepsilon^{60q^2} < h < 6\pi \varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi - 2/q}}, \quad (3)$$

где M зависит от $l(\Gamma)$ и числа q . Правая оценка точная в указанном в теореме 1 смысле.

В правых частях неравенств (2) и (3) уточняется для этого частного вида областей общая оценка М. А. Лаврентьева: показатель $\frac{1}{2}$ при ε в (1) заменяется показателем $\frac{\pi}{2\pi - 2/q}$, который больше $\frac{1}{2}$ и стремится к $\frac{1}{2}$, когда $q \rightarrow \infty$, т. е. когда мы рассматриваем произвольные области, ограниченные спрямляемыми кривыми.

Перепишем неравенство (3) в виде

$$\frac{1}{360} h^{2(1-\frac{1}{\pi q})} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{M} h^{\frac{1}{60q^2}}$$

и заметив, что для круга $|w| < 1$ функцией Грина с полюсом в точке $w=0$ будет функция $\ln |w|$, мы можем сформулировать теорему 2 в следующем виде:

Теорема 2'. Линии уровня функции Грина области $D(q)$ с полюсом в точке $z=0$, на которых функция принимает значение $\ln(1-h)$, $0 < h < 1$, удалены от границы области $D(q)$ на расстояние не мень-

шее $\frac{1}{360} h^{2(1-\frac{1}{\pi q})}$ и не большее $M_1 h^{\frac{1}{60q^2}}$, где M_1 зависит от $I(\Gamma)$ и q .

Сформулируем предварительно некоторые понятия и теоремы, которыми мы воспользуемся при доказательстве теорем 1 и 2.

Пусть область D ограничена жордановой кривой Γ и на Γ задана конечная система попарно непересекающихся дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Рассмотрим гармоническую в D функцию $u(z)$, принимающую значение 1 во внутренних точках дуг γ_i и значение 0 в прочих точках границы Γ . Такая функция всегда существует [2]. Гармонической мерой $\omega(\Sigma \gamma_i, z, D)$ дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ границы Γ области D в точке z называется значение в точке z указанной гармонической функции $u(z)$ [3]. Если мы отображим функцией $w=f(z)$, $f(z_0)=0$, $z_0 \in D$, область D на круг $|w| < 1$, то сумма длин дуг окружности $|w|=1$, соответствующих при этом отображении дугам $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будет равна $2\pi u(z_0)$ [4].

Заменим теперь дуги $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ также попарно непересекающимися дугами $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$, лежащими вне области D и обозначим через D^* область, содержащую внутри себя область D , ограниченную дугами $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$ и границей Γ . Как гласит принцип расширения области [5], если $z_0 \in D$, то

$$\omega(\Sigma \gamma_i, z_0, D) \geq \omega(\Sigma \gamma_i^*, z_0, D^*).$$

Геометрически это значит, что, если мы отображим функциями $w=f(z)$, $f(0)=0$, и $w=f^*(z)$, $f^*(0)=0$ соответственно области D и D^* на круг $|w| < 1$, то сумма длин дуг окружности $|w|=1$, соответствующих дугам $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, не меньше суммы длин дуг той же окружности, соответствующих дугам $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$.

Приведем, наконец, одно неравенство, принадлежащее Р. Неванлинна [6].

Пусть γ — дуга жордановой границы Γ области D и $z_0 \in D$. Соединим точку z_0 с произвольной точкой A дуги γ гладкой кривой L и пусть длина этой кривой от точки A до точки $z_t \in L$ есть l , а расстояние от точки z_t до дополнения $\Gamma - \gamma$ дуги γ до границы Γ

равно $s(l)$. Если $\omega(\gamma, z, D)$ означает гармоническую меру дуги γ в точке $z \in D$ и $m(l)$ означает минимум ω в пересечении D с кругом $(z - z_l) \frac{s(l)}{\varepsilon}$, $\varepsilon = 2, 71, \dots$, то

$$\frac{dm(l)}{dl} < -4 \frac{m(l)}{s(l)}, \quad (4)$$

где под $\frac{dm}{dl}$ понимается нижняя производная.

Перейдем к доказательству правой части неравенства (2), переписав его в виде

$$\omega(\gamma, 0, D(q)) < \varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi - 2/q}}.$$

Возьмем для этого на γ такую точку z^* , чтобы окружность K с центром в точке z^* и радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ содержала дугу γ внутри себя. Без ограничения общности мы можем считать, что точка z^* расположена на отрицательной части действительной оси. Пусть γ^* — дуга окружности K , лежащая внутри области $D(q)$ и разбивающая $D(q)$ на две односвязные области, из которых одна D^* содержит точку $z=0$, а граница другой содержит точку z^* . Мы будем говорить в таких случаях, что дуга γ^* отделяет в области $D(q)$ точку $z=0$ от точки z^* . В силу принципа расширения области $\omega(\gamma, 0, D) \leq \omega(\gamma^*, 0, D^*)$.

Обозначим через $\tilde{D}^*$ дополнение области D^* до расширенной плоскости. Так как граница Γ^* области D^* есть жорданова кривая, то $\tilde{D}^*$ есть односвязная область, содержащая внутри себя точку $z=\infty$. Пусть K_r — окружность с центром в точке z^* и радиуса r . Кривая Γ^* выделяет на окружности K_r счетное множество интервалов, лежащих в области $\tilde{D}^*$. Обозначим через α_r те из них, которые отделяют в области $\tilde{D}^*$ точку $z=\infty$ от точки z^* . Покажем, что длина каждого из интервалов α_r не меньше $\frac{2r}{q}$. Действительно, обозначим через S и F концы интервала α_r . Длина дуги SF границы Γ , содержащей точку z^* , не меньше $2r$; следовательно, длина хорды SF окружности K_r не меньше $\frac{2r}{q}$ и, тем более, длина интервала α_r не меньше $\frac{2r}{q}$.

Совершим теперь замену переменной, положив $z' = 2 \frac{z - z^*}{\varepsilon}$ и обозначим через γ' , Γ' , D' соответственно образы γ^* , Γ^* , D^* . Окруж-

ность K перейдет при этом в единичную окружность $|z|=1$, а дуга γ^* — в дугу γ' этой окружности. При этом, если $\bar{D}'$ есть дополнение D' до расширенной плоскости, то каждый интервал α_r окружности K_r радиуса r и с центром в точке $z'=0$, лежащий внутри области $\bar{D}'$ и отделяющий в области $\bar{D}'$ точку $z'=0$ от точки $z'=\infty$, по длине не меньше $2r/q$.

Если расстояние от точки z^* до точки $z=0$ было равно r_0 , то точка $z=0$ переходит в точку $\frac{2r_0}{\varepsilon}$ на действительной оси и

$$\omega(\gamma^*, 0, \bar{D}^*) = \omega\left(\gamma', \frac{2r_0}{\varepsilon}, \bar{D}'\right).$$

Совершим теперь преобразование инверсии и обозначим через ξ полученную переменную. При этой инверсии область D' перейдет в область D_ε , лежащую внутри единичного круга, граница которой состоит из дуги γ' единичного круга и из жордановой кривой γ_ε , лежащей внутри единичного круга, причем концы дуги γ_ε совпадают с концами дуги γ' . При этом точка $\xi=0$ лежит вне области D_ε . Наконец, точка $\frac{2r_0}{\varepsilon}$ переходит в точку $\varepsilon/2r_0$ и

$$\omega\left(\gamma', \frac{2r_0}{\varepsilon}, \bar{D}'\right) = \omega\left(\gamma', \frac{\varepsilon}{2r_0}, \bar{D}_\varepsilon\right).$$

Кроме того, если $\bar{D}_\varepsilon$ обозначает дополнение области D_ε и α_r обозначает любой из тех интервалов окружности K_r с центром в точке $\xi=0$ и радиуса r , которые лежат внутри области $\bar{D}_\varepsilon$ и отделяют в области $\bar{D}_\varepsilon$ точку $\xi=0$ от точки $\xi=\infty$, то длина α_r не меньше $\frac{2r}{q}$.

Нам достаточно установить — какова форма границы области D_ε , удовлетворяющей только что высказанным свойствам, при которой гармоническая мера $\omega\left(\gamma', \frac{\varepsilon}{2r_0}, \bar{D}_\varepsilon\right)$ достигает своего максимума или, что то же самое, при которой гармоническая мера $\omega\left(\gamma_\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2r_0}, \bar{D}_\varepsilon\right)$ достигает своего минимума.

Положим для этого $\zeta = \xi^{\frac{\pi}{\pi-1/q}}$. В силу указанного свойства дополнения $\bar{D}_\varepsilon$ область D_ε перейдет при этом преобразовании в однолиственную область D_ζ , лежащую внутри единичного круга $|\zeta| < 1$, границей которой служит дуга единичной окружности и дуга γ_ζ , соответствующая дуге γ_ε , лежащая внутри единичного круга, причем концы γ_ζ лежат на единичной окружности и точка $\zeta=0$ не принад-

лежит области D_ε . Как это доказывается у Р. Неванлинна [7] минимум гармонической меры дуги γ_ε в точке, лежащей на отрезке $(0,1)$, достигается для случая, когда кривая γ_ε совпадает с отрезком $(-1,0)$. В области D_ε этому отрезку соответствует угол с вершиной в точке $\xi = 0$, раствора $\frac{2}{q}$, биссектрисой которого служит отрицательная часть действительной оси.

Итак, нам надо вычислить гармоническую меру дуги γ' единичной окружности в точке $\varepsilon/2r_0$ относительно области D_ε , состоящей из единичного круга, из которого удален указанный выше угол.

Для этого возведем ξ в степень $\delta = \frac{\pi}{2\left(\pi - \frac{1}{q}\right)}$; тогда наша об-

ласть перейдет в единичный полукруг, опирающийся на мнимую ось и лежащий в правой полуплоскости, а точка $\varepsilon/2r_0$ перейдет в точку $(\varepsilon/2r_0)^\delta$ на действительной оси, и нам остается вычислить гармоническую меру полуокружности в точке $(\varepsilon/2r_0)^\delta$ относительно указанного полукруга. Последняя равна [8] величине $2(1 - \Theta/\pi)$, где Θ — угол, под которым виден из точки $(\varepsilon/2r_0)^\delta$ отрезок $(-i, +i)$.

Следовательно

$$\begin{aligned}\omega(\gamma, 0, D) &\leq 2\left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r_0}{\varepsilon}\right)^\delta\right) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{2r_0}{\varepsilon}\right)^\delta\right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{2r_0}\right)^\delta \leq \frac{4}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{2r_0}\right)^\delta < \varepsilon^\delta,\end{aligned}$$

так как $\delta > \frac{1}{2}$ и потому $\pi 2^\delta > 3,14 \sqrt{2} > 4$ и $r_0 > 1$.

Выясним теперь степень точности полученной нами верхней оценки.

Из приведенных рассуждений следует, что указанная верхняя оценка достигается для следующего случая. Рассмотрим окружность K

радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ и с центром в точке $z = -1$. Проведем из точки $z = -1$

две бесконечные полупрямые, так, чтобы они образовывали угол α раствора $2/q$, биссектрисой которого служит часть $x < -1$ действительной оси. Обозначим через γ дугу окружности K , лежащую вне

угла α , через ε_1 — длину дуги γ , равную $\varepsilon \left(\pi - \frac{1}{q}\right)$ и через D — об-

ласть, содержащую точку $z = 0$ и ограниченную дугой γ и частями полупрямых, лежащих вне окружности K .

Тогда

$$\omega(\gamma, 0, D) = \frac{4}{\pi 2^{\delta}} \varepsilon^{\delta} = \frac{4}{\pi 2^{\delta} \left(\pi - \frac{1}{q}\right)^{\delta}} \varepsilon_1^{\delta} < \varepsilon_1^{\delta},$$

где $\delta = \frac{\pi}{2\pi - \frac{2}{q}}$.

Обозначим через D_R часть области D , лежащую внутри круга $|z| < R$. При ε достаточно малом область D_R содержит внутри себя круг, близкий к кругу $|z| < 1$. Далее, если K_r — окружность радиуса r с центром в точке $z = -1$, то длина дуги α_r окружности K_r , лежащей вне области D_R , равна $2r/q$, а длина $l(\gamma_r)$ куса γ_r границы области D_R , лежащей внутри окружности K_r , равна

$$2r - 2 \frac{\varepsilon}{2} + 2\pi \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{q} \frac{\varepsilon}{2} = 2r + \varepsilon \left(\pi - 1 - \frac{1}{q} \right).$$

Так как при достаточно малом $r > \varepsilon$ длина хорды дуги α_r близка к длине дуги α_r , то мы можем считать, что $\frac{l(\gamma_r)}{d(\gamma_r)} = q$. Итак, область D_r есть область типа $D(q)$.

Так как радиус R может быть сколь угодно велик, то полученная нами верхняя оценка $\varepsilon \frac{\pi}{2\pi - 2/q}$ является точной в том смысле, что показатель при ε для областей типа $D(q)$ не может быть понижен.

Доказательство левой части неравенства (2) проведем в несколько шагов.

1. Покажем, прежде всего, что если $r < \frac{s}{2(2q+1)}$, то на расстоянии r от произвольной точки A границы Γ в области $D(q)$ существует точка B , которая служит центром окружности радиуса $s = \frac{r}{2q}$, принадлежащей области $D(q)$.

Действительно, проведем окружность K с центром в точке A и радиуса r . Кривая Γ выделяет на окружности K счетное множество интервалов, содержащихся в области $D(q)$; среди них есть хотя один, разбивающий область $D(q)$ на две односвязные части, из которых одна содержит точку $z = 0$, а граница другой содержит точку A . Если при любом положении точки B на этом интервале окружность K_s с центром в точке B и радиуса $s = \frac{r}{2q}$ будет пересекать гра-

ницу Γ , то существует на границе Γ дуга $\tilde{\gamma}$, содержащая внутри себя точку A и не имеющая с окружностью K_s иных общих точек, кроме своих концов C и F . Так как $q > 1$, то

$$l(\tilde{\gamma}) > 2r - 2s = 2r - \frac{r}{q} = r \left(2 - \frac{1}{q} \right) > r,$$

и

$$d(\tilde{\gamma}) \leq 2s = \frac{r}{q}.$$

Следовательно

$$\frac{l(\tilde{\gamma})}{d(\tilde{\gamma})} > \frac{r}{\frac{r}{q}} = q,$$

что неверно, так как каждая из точек С и F удалена от точки А на расстояние не большее

$$r + \frac{r}{2q} = r \left(1 + \frac{1}{2q} \right) < \frac{s}{2(2q+1)} \cdot \frac{2q+1}{2q} = \frac{s}{4q}$$

и, следовательно, каждая из дуг СА и FА по длине не больше $\frac{s}{4}$, а

потому и $l(\tilde{\gamma}) < \frac{s}{2}$.

2. Докажем теперь следующее предложение. Пусть L обозначает дугу границы Γ длины l . Будем катить вдоль границы Γ окружность K радиуса s так, чтобы окружность все время принадлежала замкнутой области $\bar{D}(q)$. Пусть L' — кривая, которую опишет центр окружности K , когда окружность при движении вдоль Γ будет иметь общие точки с дугой L . Покажем, что длина кривой не больше $2l + 2\pi s$.

Заменим для этого границу Γ близкой к ней ломанной и обозначим через β тот из двух углов, образованных соседними звеньями ломанной, внутри которого проходит окружность K , когда она катится по ломанной Γ_k так, чтобы лежала внутри той из двух областей, ограниченных ломанной Γ_k , которая не содержит бесконечно удаленной точки. Обозначим через L_k те из звеньев ломанной Γ_k , которых коснется окружность K при движении вдоль Γ_k и будем считать соседними два последовательных звена системы L_k . Когда окружность K катится по двум соседним звеньям системы L_k , угол между которыми есть β , ее центр опишет кривую длины равной сумме длин этих звеньев плюс величина $s(\beta - \pi)$, если $\beta > \pi$, и не большей суммы длин этих звеньев, если $\beta < \pi$. Таким образом, длина кривой L' , которую опишет центр окружности K , когда она катится вдоль L_k , не больше длины L_k плюс $\sum_{\beta > \pi} s(\beta - \pi)$ для всех углов меж-

ду двумя соседними звеньями ломанной L_k , для которых $\beta > \pi$.

Ясно, что $\sum_{\beta > \pi} (\beta - \pi)$ не может быть больше

$$2\pi \left(\frac{\text{длина } L_k}{\text{длина } K} + 1 \right) < 2\pi \left(\frac{l}{2\pi s} + 1 \right) = \frac{l}{s} + 2\pi,$$

так как ломанную Γ_k можно взять сколь угодно близкой по длине к границе Γ .

Итак, длина L' не больше

$$l + s \left(\frac{l}{s} + 2\pi \right) = 2l + 2\pi s.$$

3. Положим теперь $r_0 = \frac{\pi}{4(2q+1)}$.

Соединим отрезком L_1 точку $z=0$ с ближайшей точкой той части границы Γ , которая лежит вне окружности K_0 радиуса r_0 и с центром в произвольной фиксированной точке A дуги γ .

Возьмем окружность K_{s_0} с центром в точке $z=0$ и радиуса $s_0 = \frac{r_0}{4q}$. Окружность $K_{s_0} \subset D$, ибо область $D(q)$ содержит внутри себя круг $|z| < 1$ и $s_0 < 1$. Будем сдвигать центр окружности K_{s_0} вдоль L_1 до тех пор, пока K_{s_0} не коснется границы Γ . При этом центр опишет отрезок L_1 , длина которого меньше s . Далее будем катить окружность K_{s_0} вдоль границы Γ , пока центр ее не совпадет с некоторой точкой B_{s_0} на окружности K_0 . При этом центр окружности опишет кривую L_2 , длина которой не больше

$$2s + 2\pi s_0 = 2s + \frac{\pi^2}{8q(2q+1)}.$$

Покажем, что при этом движении окружность K_{s_0} все время принадлежит области $D(q)$. Для этого будем катить окружность K_{s_0} вдоль Γ пока это возможно, не выходя за пределы области $D(q)$. Если мы остановимся раньше, чем центр K_{s_0} попадет на окружность K_0 , то окружность K_{s_0} будет иметь с Γ не менее двух общих точек, причем две из них, C и F , будут ограничивать дугу CAF границы Γ , содержащую внутри себя точку A и не имеющую с K_{s_0} иных общих точек, кроме своих концов C и F . Ясно при этом, что хорда CF принадлежит области $D(q)$ и разбивает $D(q)$ на две области D_1 и D_2 , из коих D_1 содержит внутри себя точку $z=0$, а граница другой содержит точку A . Если длина дуги CF , дополняющей дугу CAF до Γ , не больше $s/2$, то хорда CF не может быть меньше π/q , ибо область $D(q)$ содержит круг $|z| < 1$, а область D_1 содержит точку $z=0$. Это неверно, так как длина CF не больше диаметра окружности K_{s_0} , равного $2s_0 = \frac{r_0}{2q} = \frac{\pi}{8q(2q+1)} < \frac{\pi}{q}$. Если же длина дуги CAF меньше $s/2$, то она во всяком случае не больше

$$2r_0 - 2s_0 = 2r_0 - \frac{r_0}{2q} = r_0 \left(2 - \frac{1}{2q} \right) > r_0, \quad q > 1.$$

В то же время длина хорды CF не больше $2s_0 = r_0/2q$ и, следовательно, отношение длины дуги CAF к длине ее хорды CF не меньше $2q$, что тоже невозможно.

4. Построим теперь кривую L_3 , соединяющую точку A с точкой B_{r_0} и удовлетворяющую следующему условию: если длина этой кривой от точки A до точки z_l равна l , то точка z_l служит центром окружности радиуса $s(l) = l/15q^2$, целиком принадлежащей области $D(q)$.

Для этого окружность K_{s_0} радиуса $s_0 = r_0/4q$ и с центром в точке B_{r_0} будем катить вдоль Γ до тех пор, пока ее центр не окажется лежащим в точке $B_{r_0/2}$ на окружности радиуса $r_0/2$ и с центром в точке A , что возможно в силу п. 1. Проведем радиус, соединяющий центр $B_{r_0/2}$ с той точкой окружности, с которой Γ имеет общую точку (или с любой из них, если их несколько). Возьмем окружность $K_{s_0/2}$ с центром в точке $B_{r_0/2}$ и радиуса $\frac{s_0}{2} = \frac{r_0}{8q}$ и сдвинем

центр этой окружности вдоль проведенного радиуса, пока окружность $K_{s_0/2}$ не коснется границы. После этого будем катить эту окружность вдоль границы, пока ее центр не окажется лежащим в точке $B_{r_0/4}$ на окружности радиуса $s_0/4$ и с центром в точке A . Заменяем теперь окружность $K_{s_0/2}$ окружностью $K_{s_0/4}$ с центром в той же точке, но радиуса $s_0/4$ и сдвинем центр этой окружности вдоль радиуса, соединяющего точку $B_{r_0/4}$ с ближайшей точкой границы, пока окружность $K_{s_0/4}$ не коснется границы Γ .

Если обозначить через L_3 кривую, которую опишут центры окружностей, то продолжая так шаг за шагом мы получим в пределе кривую, оканчивающуюся в точке A .

Пусть z — некоторая точка этой кривой, служащая центром окружности радиуса $r_0/2^n q$. Вычислим длину l этой кривой от точки A до точки z . Эта длина равна сумме длин прямолинейных участков кривой L_3 , равной

$$\frac{r_0}{2^{n+1}q} + \frac{r_0}{2^{n+2}q} + \dots = \frac{r_0}{2^n q},$$

плюс сумма длин криволинейных участков, которая не больше

$$2l_1 + 2\pi \frac{r_0}{2^n q} + 2l_2 + \frac{r_0}{2^{n+1}q} + \dots = 2(l_1 + l_2 + \dots) + 2\pi \frac{r_0}{2^{n-1}q},$$

где l_1 — длина того куска границы Γ , по которому катится окружность радиуса $r_0/2^n q$, l_2 — длина того куска Γ , по которому катится окружность радиуса $r_0/2^{n+1} q$ и т. д. Следовательно, сумма $l_1 + l_2 + \dots$ не больше длины куска границы Γ от точки A до точки границы, ближайшей к точке z , и потому не больше

$$\left(\frac{r_0}{2^{n-2}} + \frac{r_0}{2^n q} \right) q.$$

Итак,

$$l \leq \frac{r_0}{2^n q} + 2\pi \frac{r_0}{2^{n-1} q} + \frac{r_0 q}{2^{n-3}} + \frac{r_0}{2^{n-1}} = r_0 \frac{8q^2 + 2q + 4\pi + 1}{2^n q}.$$

Таким образом,

$$S(l) > \frac{r_0}{2^n q} > \frac{l}{8q^2 + 2q + 4\pi + 1} > \frac{l}{15q^2},$$

так как $q > \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $2q + 4\pi + 1 \leq 7q^2$; здесь $s(l)$ — расстояние от точки z_l кривой L_3 до границы Γ .

Следовательно, длина $l(L_3)$ всей кривой L_3 , соответствующая случаю $n=2$, не больше

$$l(L_3) \leq r_0 \frac{8q^2 + 2q + 4\pi + 1}{2^2 q} = \frac{\pi}{4(2q+1)} \cdot \frac{8q^2 + 2q + 4\pi + 1}{4q}.$$

5. Обозначим через L^* кривую, соединяющую точку A с точкой $z=0$ и составленную из кривых L_3 , L_2 и L_1 . Если z_l — точка кривой L^* , l — длина этой кривой от точки A до точки z_l и $s(l)$ — расстояние от точки A до границы Γ , то при $z \in L_3$ имеем $s(l) > \frac{l}{15q^2}$, а при $z \in L_2 + L_1$ имеем

$$s(l) = s_0 = \frac{r_0}{4q} = \frac{\pi}{16q(2q+1)} = p(q).$$

Заменим теперь кривую L^* гладкой кривой $\tilde{L}$, соединяющей точку $z=0$ с точкой A , длина $l(\tilde{L})$ которой равна сумме длин кривых $L_1 + L_2 + L_3$ и которая удовлетворяет следующему условию: если l — длина куска этой кривой, отсчитанная от точки A до некоторой точки z и $s(l)$ — расстояние от этой точки до границы Γ , то при $\varepsilon \leq l \leq l(L_3)$ имеем $s(l) > \frac{l-a}{15q^2}$, а при $l(L_3) < l \leq l(\tilde{L})$ имеем $s(l) > p(q) - a$, где a — произвольно малое число, меньшее ε .

Принтегрируем теперь неравенство (4) вдоль кривой $\tilde{L}$ в пределах от ε до $l(\tilde{L})$. Получим

$$-4 \int_{\varepsilon}^{l(\tilde{L})} \frac{dl}{s(l)}$$

$$\omega(\gamma, 0, D(q)) \geq m(l(L)) \geq m(\varepsilon)$$

=

$$\begin{aligned}
& 60q^2 \int_{\varepsilon}^{l(L_3)} \frac{al}{l-a} - 4 \int_{l(L_2)}^{\tilde{l}(L)} \frac{al}{p(q)-a} \\
& = m(\varepsilon) e^{-\int_{\varepsilon}^{l(L_3)} \frac{al}{l-a}} \cdot e^{-\int_{l(L_2)}^{\tilde{l}(L)} \frac{al}{p(q)-a}} = \\
& = m(\varepsilon) e^{\frac{60q^2 l(L_3)}{l(L_3)-a}} \cdot e^{-\left\{ 60q^2 l(L_2) + \frac{4l(L_1+L_2)}{p(q)-a} \right\}} = \\
& = m(\varepsilon) (\varepsilon-a)^{60q^2} \cdot e^{-N(q, l(L_1+L_2), l(L_3))}.
\end{aligned}$$

Следовательно, ввиду произвольности a ,

$$\omega(\gamma, 0, D(q)) > m(\varepsilon) \varepsilon^{60q^2} e^{-N}.$$

$$\text{Так как при этом } l(L_3) \leq \frac{\pi}{4(2q+1)} \cdot \frac{8q^2 + 2q + 4\pi + 1}{4q},$$

$$l(L_1) < S, \quad l(L_2) \leq 2s + \frac{\pi^2}{8q(2q+1)},$$

то

$$e^{-N(q, l(L_1+L_2), l(L_3))} > M_1(s, q).$$

6. Докажем теперь, что

$$m(\varepsilon) > m_1(q),$$

где $m_1(q)$ зависит лишь от q .

Для этого заметим, что точка z_ε кривой L_3 , отстоящая от A на расстояние не большее ε , служит центром окружности радиуса $s(\varepsilon) = \varepsilon/15q^2$, принадлежащей области $D(q)$, а $m(\varepsilon)$ есть минимум гармонической меры дуги γ в точках круга K , концентрическим с предыдущим и радиуса $s(\varepsilon)/e$. Далее, относительная длина $\rho(\gamma)$ дуги γ в области $D(q)$ не меньше ε/q и $m(\varepsilon)$ только уменьшится, если заменить область $D(q)$ той ее связанной частью D' , которая лежит внутри круга радиуса $q(2\varepsilon + \varepsilon/15q^2)$ с центром в точке A и содержит круг K .

Растянем теперь всю плоскость в

$$\frac{1}{s(\varepsilon) - s(\varepsilon)/e} = \frac{15q^2}{\varepsilon} \cdot \frac{e}{e-1}$$

раз и обозначим через γ^* , K^* , D^* соответственно образы γ , K , D' . Тогда расстояние каждой точки круга K^* до границы области D^* будет не меньше единицы, диаметр d области D^* будет не больше

$$2\left(2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{15q^2}\right) q \frac{15q^2}{\varepsilon} \frac{e}{e-1} = N_1(q)$$

и, наконец, относительная длина $\rho(\gamma^*)$ дуги γ^* в области D^* — не меньше $\frac{\varepsilon}{q} \frac{15q^2}{\varepsilon} \frac{e}{e-1} = 15q \frac{e}{e-1}$.

В силу левой части неравенства (1)

$$m(\varepsilon) > e^{\frac{-K_1(a)}{\rho^2(\gamma^*)}} > e^{\frac{-K_1(N_1(q))}{15^2 q^2 \left(\frac{e}{e-1}\right)^2}}.$$

откуда $m(\varepsilon) \geq m_1(q)$.

Таким образом мы доказали и левую часть неравенства (2).

Для доказательства теоремы 2 нам надо будет предварительно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть D_w — область, содержащая точку $w = 0$ и ограниченная дугой окружности $|w| = 1$ и кривой γ_w принадлежащей кругу $|w| < 1$, концы которой лежат на окружности $|w| = 1$. Если диаметр кривой γ_w равен $d < 1$, то гармоническая мера $\omega(\gamma_w, 0, D_w)$ дуги γ_w в точке $w = 0$ относительно области D_w не больше $\frac{4}{\pi} d$:

$$\omega(\gamma, 0, D_w) \leq \frac{4}{\pi} d. \quad (5)$$

Эта теорема является обратной к теореме М. А. Лаврентьева [9], согласно которой

$$\frac{1}{4\pi} d \leq \omega(\gamma_w, 0, D_w). \quad (6)$$

Для доказательства будем считать, что точка w' дуги γ , лежащая на окружности $|w| = 1$, совпадает с точкой $w = 1$. Так как расстояние от точки w' до любой точки γ_w не больше d , то дуга γ целиком попадет внутрь окружности радиуса d и с центром в точке $w = 1$.

Рассмотрим теперь окружность K , ортогональную окружности $|w| = 1$, проходящую через точку $w = 1 - d$, центр которой лежит в точке $w^* = 1 + \frac{d^2}{2(1-d)}$ и радиус которой равен $\frac{d(2-d)}{2(1-d)}$.

Если окружность K пересекает окружность $|w| = 1$ в точках $w_1 = e^{i\varphi}$ и $w_2 = e^{-i\varphi}$, то по правилу решения прямоугольных треугольников

$$\sin \varphi = \frac{d(2-d)}{d^2 - 2d + 2} \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \frac{2(1-d)}{d^2 - 2d + 2}.$$

Ясно, что кривая γ лежит внутри окружности K . Если обозначить через γ^* дугу окружности K , лежащую внутри окружности $|w| = 1$ и через D^* — область, содержащую точку $w = 0$ и ограниченную дугой γ^* и дугой окружности $|w| = 1$, то в силу принципа расширения области,

$$\omega(\gamma, 0, D) \leq \omega(\gamma^*, 0, D^*).$$

Для вычисления последней гармонической меры отображим область D^* преобразованием

$$\frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{(e^{-i\varphi} - z)(e^{i\varphi} - 1 + d)}{(e^{i\varphi} - z)(e^{-i\varphi} - 1 + d)}$$

на полукруг, опирающийся на отрезок $(-1, +1)$ действительной оси и лежащей в верхней полуплоскости. При этом дуга γ^* перейдет в отрезок $(-1, +1)$, а точка $w=0$ — в точку

$$\xi_0 = i \frac{(1-d) \sin \varphi}{1 - (1-d) \cos \varphi} = i \frac{d^2 - 3d + 2}{2-d}$$

на мнимой оси.

Гармоническая мера $\omega(\gamma^*, 0, D^*)$ равна гармонической мере отрезка $(-1, +1)$ в точке ξ_0 полукруга, а последняя равна величине

$$\frac{2}{\pi} \left(\Theta - \frac{\pi}{2} \right),$$

где Θ — угол, под которым виден отрезок $(-1, +1)$ из точки ξ_0 [8]. Таким образом,

$$\begin{aligned} \omega(\gamma^*, 0, D^*) &= \frac{2}{\pi} \left(2 \arctg \frac{1}{|\xi_0|} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi} \arctg \frac{1 - |\xi_0|}{1 + |\xi_0|} = \\ &= \frac{4}{\pi} \arctg \frac{d}{2-d}, \end{aligned}$$

откуда

$$\omega(\gamma^*, 0, D^*) \leq \frac{4}{\pi} \frac{d}{2-d} \leq \frac{4}{\pi} d.$$

Таким образом теорема 3 полностью доказана.

С помощью оценок (6) и (5) можно доказать неравенство (3).

Докажем сначала правую часть этого неравенства. Заметим для этого, что при доказательстве правой части неравенства (2) было доказано, что если A — точка границы Γ и γ^* — дуга окружности радиуса ε и с центром в точке A , разбивающая область $D(q)$ на две односвязные области, из которых одна — D^* содержит точку $z=0$, а граница другой содержит точку A , то

$$\omega(\gamma^*, 0, D^*) < (2\varepsilon)^{\frac{\pi}{2\pi - 2/q}}. \quad (7)$$

Отобразим теперь область $D(q)$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $z=0$ перешла в точку $w=0$. При этом дуга γ^* перейдет в дугу γ_w , принадлежащую кругу $|w| < 1$, концы которой лежат на окружности $|w| = 1$. Обозначим через D_w область,

содержащую точку $w=0$ и ограниченную дугой единичной окружности и дугой γ_w . Так как при этом $\omega(\gamma^*, 0, D^*) = \omega(\gamma_w, 0, D_w)$, то из неравенств (7) и (6) получаем

$$h < 4\pi(2\varepsilon)^{\frac{\pi}{2\pi-2/q}} < 6\pi\varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi-2/q}},$$

где h — диаметр континуума γ_w .

Докажем теперь левую часть неравенства (3).

Для этого соединим точку w_0 с окружностью $|w|=1$ двумя отрезками длины $h+d$, совокупность которых мы обозначим через γ_w , так, чтобы они отсекали на окружности $|w|=1$ дугу длины не больше h и обозначим через D_w область, содержащую точку $w=0$ и ограниченную дугой окружности $|w|=1$ и дугой γ_w . Так как диаметр кривой γ_w равен $h+d$, то согласно неравенству (5) имеем

$$\omega(\gamma_w, 0, D_w) \leq \frac{4}{\pi}(h+d). \quad (8)$$

Кривой γ_w соответствует в области $D(q)$ жорданова дуга γ^* области $D(q)$, концы которой лежат на границе области $D(q)$, а области D_w соответствует в области $D(q)$ область D^* , ограниченная жордановой кривой и при этом

$$\omega(\gamma_w, 0, D_w) = \omega(\gamma^*, 0, D^*). \quad (9)$$

Остается вычислить последнюю гармоническую меру.

Для этого обозначим через z^* один из концов дуги γ^* , лежащий на границе Γ области $D(q)$ и через f — наибольшее расстояние от точки z^* до прочих точек дуги γ^* .

Проведем окружность K радиуса $f+b$, $b>0$, и с центром в точке z^* . Соединим точку z^* с точкой $z=0$ гладкой кривой $\tilde{L}$, удовлетворяющей свойствам, описанным в п. 5 и заметим, что расстояние от точек $\tilde{L}$ до границы Γ области $D(q)$ совпадает с расстоянием от этих точек до дополнения дуги γ^* до границы области D^* . Пусть l_0 — длина кривой $\tilde{L}$ от точки z^* до последней точки встречи кривой $\tilde{L}$ с окружностью K . Ясно, что $l_0 > \varepsilon$. Соединим точку z' с любой точкой дуги γ^* гладкой кривой L' длины l_0 и обозначим через L^* кривую, составленную из кривой L' и куска кривой $\tilde{L}$ от точки z' до точки $z=0$. Пронтегрируем неравенство (4) вдоль кривой L^* в пределах от l_0 до $l(L^*)$. Также, как и в п. 5, получим

$$\omega(\gamma^*, 0, D^*) \geq m(l_0) l_0^{60q^2} e^{-N(q, l(L^*))}$$

и так как $l_0 > \varepsilon$, то

$$\omega(\gamma^*, 0, D^*) \geq m(l_0) \varepsilon^{60q^2} M_1(s_1q),$$

где $M_1(s_1q)$ зависит только от s и q .

Нам остается оценить $m(l_0)$ снизу. Для этого заметим, что расстояние от точки z' до точек границы области D^* , не принадлежащих дуге γ^* , не меньше $\frac{l_0}{15q^2} + \frac{f}{15q^2}$, относительная длина дуги γ^* в области D^* не меньше f/q и расстояние от точки z^* дуги γ^* до точки z' равно $f+b$. Так как b может быть взято сколь угодно малым, то также, как и в п. 6, можно доказать, что

$$\text{Итак,} \quad \begin{matrix} \text{ЕЩЕ} \\ \text{ОТ} \end{matrix} m(l_0) > m_1(q). \quad \omega(\gamma^*, 0, D^*) \geq M_2 \varepsilon^{60q^2}, \quad (10)$$

где M_2 зависит лишь от s и q .

В силу (8), (9) и (10) имеем

$$h + a \geq \frac{\pi M_2}{4} \varepsilon^{60q^2}$$

и, так как a^* может быть взято сколь угодно малым, то

$$h \geq M \varepsilon^{60q^2},$$

где M зависит лишь от s и q .

Теорема полностью доказана.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 15 IV 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лаврентьев М. А. ДАН СССР, IV, 5, 1936.
2. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941, стр. 29.
3. Неванлинна Р. Там же, стр. 32.
4. Неванлинна Р. Там же, стр. 13.
5. Неванлинна Р. Там же, стр. 70.
6. Неванлинна Р. Там же, стр. 84.
7. Неванлинна Р. Там же, стр. 105.
8. Неванлинна Р. Там же, стр. 49.
9. Лаврентьев М. А. Труды Физико-математического института им. В. А. Стеклова, отдел математики, V, 1934, стр. 188.

Թ. Մ. Տեր-Միքայելյան

ՈՐՈՇ ՈՒՂՂԵԼԻ ԿՈՐԵՐՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿԱԿԱԾ ՏԻՐՈՒՅՅՆԵՐՈՒՄ
ՍԻԱԹԵՐԹ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրված է $|w| \leq 1$ փակ շրջանում, $|w| < 1$ շրջանը կոնֆորմ կերպով այնպիսի Γ ուղղիկ կորով սահմանափակված $D(q)$ տիրույթի վրա արտապակերպ $w = \tilde{f}(z)$ ֆունկցիայի անընդհատու-

թյան բնույթը, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝ Γ կորի ցանկացած γ աղեղի հարաբերությունն իր լարի երկարությանը, անկախ γ աղեղից, սահմանափակ է q հաստատունով:

Թեորեմ. Եթե $D(q)$ տիրույթի եզրի վրա աված է ε երկարության մեկ γ_ε աղեղ, ապա $w = \tilde{f}(z)$ կոնֆորմ կերպով $D(q)$ տիրույթը $|w| < 1$ շրջանի վրա, արտապատկերման ժամանակ $D(q)$ տիրույթի եզրի γ_ε աղեղին համապատասխանում է $|w| = 1$ շրջանագծի վրա γ_w աղեղը, որի η երկարությունը բավարարում է հետևյալ անհավասարություններին.

$$M\varepsilon^{60q^2} < \eta < 2\pi\varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi-2/q}},$$

որտեղ M -ը հաստատուն է, կախված Γ եզրի $l(\Gamma)$ երկարությունից և q թվից:

Նշված թեորեմում տիրույթների մասնավոր գեպքի համար ճշտված են ակադեմիկոս Մ. Ա. Լավրենտևի ստացած ընդհանուր գնահատականները: