

МАТЕМАТИКА

В.-К. И. Карабегов

О разрешимости задачи Дирихле для линейных уравнений эллиптического типа

1. В работе рассматривается задача Дирихле для уравнения

$$L(u) + cu = 0, \quad (A)$$

где

$$L(u) = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

есть дифференциальный оператор эллиптического типа, удовлетворяющий условиям, приведенным в работе О. А. Олейник [1].

В работе [1] показано, что если  $c \leq 0$ , то задачу Дирихле для уравнения (A) и произвольной ограниченной области  $G$  можно решить методом Винера.

В настоящей работе вводится достаточное условие для применимости того же метода к решению задачи Дирихле в случае, когда коэффициент „с“ имеет произвольный знак.

Описывается также процесс, с помощью которого можно построить так называемую „обобщенную собственную функцию“ в случае, когда упомянутое условие не выполнено.

2. Пусть  $L(u) + cu = 0$  (1) — уравнение вида (A),  $G$  — ограниченная область в  $N$ -мерном пространстве,  $\Gamma$  — граница области  $G$ ,  $E_0$  — множество иррегулярных граничных точек. (По поводу определения регулярности точки см. [1] и [2].) Мы будем говорить, что для области  $G$  и уравнения (1) удовлетворяется „обобщенное условие единственности“ [условие (O)], если:

тождественно равна нулю каждая функция  $u$  такая, что

- а)  $u$  удовлетворяет уравнению (1) внутри  $G$ ,
- б)  $|u(P)| \leq M$  внутри  $G$ ,
- в)  $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = 0$ , когда  $Q$  принадлежит множеству  $\Gamma - E_0$ .

В формулировке обычного условия единственности условие (в) заменяется требованием  $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = 0$ , когда  $Q$  принадлежит  $\Gamma$ .

Ясно, что если область и уравнение удовлетворяют условию (O), то для них выполнено обычное условие единственности.

Однако можно построить примеры таких областей, для кото-

рых обычное условие единственности [для некоторого уравнения вида (A)] выполняется, а условие (O) [для того же уравнения] не выполняется.

3. Пусть для некоторой области  $G$  условие (O) не имеет места. Тогда существует хотя бы одно, отличное от тождественного нуля, ограниченное внутри области  $G$  решение уравнения (1), предел которого равен нулю в каждой регулярной граничной точке.

Такое решение будем называть *обобщенной собственной функцией*.

Как известно [2], условие (O) имеет место для любой области, если в качестве (1) взять уравнение Лапласа.

Имеет место следующая

**Теорема 1.** Для уравнения вида  $L(u)=0$  в любой ограниченной области  $G$  выполняется условие (O)

*Доказательство.* Известно [2], что множество  $E_0$  иррегулярных

точек границы  $\Gamma$  области  $G$  представляет сумму  $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ , где  $E_n$  —

замкнутое множество емкости нуль.

Как показал Эванс, для каждого замкнутого множества  $F$  емкости нуль существует такое распределение массы  $\mu(e)$ , что

$$1) \mu(F) = 1,$$

$$2) \omega_F(P) = \int_F \frac{d\mu(Q)}{PQ^{N-2}} = \begin{cases} +\infty, & \text{когда } P \text{ принадлежит } F, \\ < +\infty & \text{во всех остальных точках.} \end{cases}$$

Построим функцию  $\omega_n(P)$  — потенциал Эванса для каждого из замкнутых множеств  $E_n$ .

Пусть

$$\omega_n(P) = \int_{E_n} \frac{d\mu_n(Q)}{PQ^{N-2}}.$$

Построим функцию

$$\Omega_n(P) = \int_{E_n} \frac{d\mu_n(Q)}{\varrho(P, Q)},$$

где  $\frac{1}{\varrho(P, Q)}$  есть фундаментальное решение уравнения  $L(u)=0$ .

Составим ряд 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n(P)}{2^n}.$$

Этот ряд будет представлять функцию  $\Omega(P)$ , ограниченную в каждой области, лежащей внутри  $G$  и стремящуюся к  $+\infty$ , когда  $P$  приближается к множеству  $E_0$ . Кроме того,  $\Omega(P)$  удовлетворяет внутри  $G$  уравнению  $L(u) = 0$ .

Предположим, что  $u(P) \neq 0$  есть обобщенная собственная функция для уравнения  $L(u) = 0$  и области  $G$ .

$$\text{Рассмотрим функцию } v(P) = \frac{u(P)}{\Omega(P)}.$$

Она будет удовлетворять уравнению

$$\Omega(P) \cdot \sum_{i,k}^N a_{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i^N \bar{b}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

где коэффициенты  $a_{ik}$  те же, что и в данном операторе  $L$ , а коэффициенты  $\bar{b}_i$  — регулярны внутри  $G$ .

Кроме того, функция  $v$  обращается в нуль в каждой точке  $\Gamma$  и ограничена в области  $G$ . Следовательно  $v \equiv 0$ , а потому и  $u \equiv 0$ . Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что если функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$L(u) + \lambda u = 0 \quad (1, \lambda)$$

внутри  $G$ , ограничена и  $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = f(Q)$ , когда  $Q$  регулярная точка  $\Gamma$ , то

$$u(P) - \lambda \int_G \Gamma(P, Q) c(Q) u(Q) dV_Q = H_\Gamma(P). \quad (3)$$

Здесь  $H_\Gamma(P)$  есть обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения  $L(u) = 0$  и области  $G$ .  $L$  — оператор входящий в правую часть уравнения  $(1, \lambda)$ .  $\Gamma(P, Q)$  — функция Грина, построенная для того же уравнения  $L(u) = 0$  и области  $G$  (см. [1]).

Действительно, функция

$$\Phi(P) \equiv H_\Gamma(P) - u(P) + \lambda \int_G \Gamma(P, Q) c(Q) u(Q) dV_Q$$

есть обобщенная собственная функция для уравнения  $L(u) = 0$  и потому  $\Phi(P) \equiv 0$ .

4. Так как ядро интегрального уравнения (3) регуляризуемо, то множество тех значений  $\lambda$ , при которых не выполняется условие (О) (при фиксированных уравнении и области), не будет иметь предельных точек в конечной части комплексной плоскости  $\lambda$ .

5. Покажем теперь применимость процесса Винера для построения обобщенного решения задачи Дирихле в том случае, когда условие (О) выполняется для области  $G$  и уравнения

$$L(u) + cu = 0. \quad (1)$$

Пусть  $f(P)$  — непрерывная функция, заданная на границе  $\Gamma$  области  $G$  и непрерывно продолженная на всю область  $G$ .

Последовательность нормальных областей  $\{G_n\}$  аппроксимирует область  $G$  изнутри.

$u_{n,f}(P)$  — решение задачи Дирихле для области  $G_n$ , уравнения (1) и граничной функции  $f$ .

Положим  $M_n = \max |u_{n,f}(P)|$ . Тогда имеет место

**Теорема II.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty$ , то условие (O) для области

$G$  и уравнения (1) не выполняется, т. е. существует нетривиальная обобщенная собственная функция.

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность функций

$$V_n(P) = \frac{u_{n,f}(P)}{M_n}. \text{ Покажем, что существует подпоследовательность}$$

этой последовательности, сходящаяся к нетривиальной обобщенной собственной функции.

Ясно, что  $|v_n(P)| \leq 1$  и существует точка  $P_n$  в замкнутой области  $\bar{G}_n$  такая, что  $|v_n(P_n)| = 1$ .

Выделим из  $\{v_n(P)\}$  подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри  $G$ . Обозначим ее снова через  $\{v_n(P)\}$ .

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(P) = v_0(P)$ . Очевидно, что  $|v_0(P)| \leq 1$ . Ясно, что  $v_n(P)$  удовлетворяет интегральному уравнению:

$$v_n(P) - \int_{G_n} \Gamma_n(P, Q) v_n(Q) dV_Q = \frac{H_{n,f}(P)}{M_n}. \quad (4, n)$$

Устремляя  $n$  к бесконечности, получим:

$$v_0(P) - \int_G \Gamma(P, Q) c(Q) v_0(Q) dV_Q = 0 \quad (4, 0)$$

Остается убедиться, что  $v_0(P) \neq 0$ .

Пусть  $v_0(P) \equiv 0$ . Покажем, что в этом случае последовательность  $\{v_n(P)\}$  будет сходиться к нулю равномерно во всей области  $G$  (а не только внутри).

Так как по предположению  $M_n \rightarrow \infty$ , то функции  $\frac{H_{n,f}(P)}{M_n}$

стремятся к нулю равномерно во всей области  $G$ .

Зададим  $\varepsilon > 0$  и выберем нормальную область  $G_\varepsilon$  столь близкую к  $G$ , чтобы иметь:

$$\int_{G-G_\varepsilon} |\Gamma_n(P, Q) c(Q)| dV_Q < \frac{\varepsilon}{3},$$

каковы бы ни были  $n$  и  $P$ .

Это возможно в силу того, что

$$|\Gamma_n(P, Q)| \leq \frac{C}{PQ^{N-2}}, \quad \text{где}$$

$PQ$  — расстояние между точками  $P$  и  $Q$ , а  $N$  — размерность пространства.

В области  $G_\varepsilon$ , лежащей внутри  $G$ , функции  $v_n(P)$  равномерно стремятся к нулю и, следовательно, начиная с некоторого  $n$ , будем иметь:

$$|v_n(P)| \leq \left| \int_{G-G_\varepsilon} \right| + \left| \int_{G_\varepsilon} \right| + \left| \frac{H_{n,r}(P)}{M_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

равномерно относительно  $P$ .

Между тем мы имели, что  $|v_n(P_n)| = 1$ .

Полученное противоречие показывает, что функция  $v_0(P)$  отлична от тождественного нуля. Теорема II доказана.

б. Теперь нам остается показать, что если для уравнения (1) и области  $G_0$  выполнено условие (O), то задача Дирихле будет разрешима для всех нормальных областей, лежащих внутри  $G_0$  и достаточно близких к этой области.

С этой целью рассмотрим последовательность нормальных областей  $\{G_n\}$ , аппроксимирующих  $G_0$  изнутри, и соответствующие интегральные уравнения:

$$u_0(P) - \lambda \int_{G_0} \Gamma_0(P, Q) c(Q) u_0(Q) dV_Q = H_0(P) \quad (5,0)$$

$$u_n(P) - \lambda \int_{G_n} \Gamma_n(P, Q) c(Q) u_n(Q) dV_Q = H_n(P) \quad (5,n)$$

Имеет место следующая

**Теорема III.** Число  $\lambda_0$  будет собственным значением для уравнения (5,0) тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  такая, что  $\lambda_n$  есть собственное значение для уравнения (5,n).

( $\lambda_0$  и  $\lambda_n$ , вообще говоря, комплексные числа).

**Доказательство.** Легко показать, что каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ , можно подобрать такой полином  $T_\varepsilon(P, Q)$  в  $2N$ -мерном пространстве ( $P$  и  $Q$  — точки  $N$ -мерного пространства), что

$$\int_{G_0} \int_{G_0} |K_0(P, Q) - T_\varepsilon(P, Q)| dP dQ < \varepsilon \quad (6)$$

$$|T_\varepsilon(P, Q)| < \frac{C_1}{PQ^{N-2}} + C_2 \quad (7)$$

[ $C_1 > 0$  и  $C_2 > 0$  не зависят от  $\varepsilon$ ;  $K_0(P, Q)$  — ядро интегрального уравнения (5,0)].

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} \int_{G_n} |K_n(P, Q) - K_0(P, Q)| dP dQ = 0$ ,

то, начиная с некоторого  $n$ , будем иметь

$$\int_{G_n} \int_{G_n} |K_n(P, Q) - T_1(P, Q)| dP dQ < \varepsilon.$$

Выберем теперь  $\varepsilon > 0$  и положим:

$$K_0(P, Q) = T_1(P, Q) + R_0(P, Q), \quad (8,0)$$

$$K_n(P, Q) = T_1(P, Q) + R_n(P, Q). \quad (8,n)$$

Ясно, что

$$\int_{G_n} \int_{G_n} |R_n(P, Q)| dP dQ < \varepsilon$$

(начиная с достаточно большого  $n$ , которое мы будем считать равным единице).

Построим резольвенты ядер  $R_i(P, Q)$  ( $i = 0, 1, \dots$ )

$$\Gamma_i(P, Q, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} R_i^{(k)}(P, Q). \quad (9,i)$$

Здесь  $R_i^{(k)}$  есть  $k$ -тая итерация ядра  $R_i$ .

Построим числовой ряд, мажорирующий все ряды (9, i) одновременно.

Рассмотрим в качестве ядра функцию  $\frac{C}{PQ^{n-2}}$ , мажорирующую ядра интегральных уравнений (5, i). Итерации этого ядра (по области  $G_0$ ) будут ограниченными, начиная с некоторого номера  $m_0$ . Пусть  $M_0 > 0$  есть число, превосходящее итерации того же ядра с номерами:

$$m_0, m_0+1, \dots, 2m_0.$$

Тогда, обозначая через  $\Omega$  объем области  $G_0$ , получим:

$$\begin{aligned} |R_i^{(2m_0+1)}(P, Q)| &\leq \int_{G_i} \int_{G_i} |R_i^{(m_0)}(P, S_1)| |R_i(S_1, S_2)| |R_i^{(m_0)}(S_2, Q)| dS_1 dS_2 \leq \\ &\leq M_0^2 \int_{G_i} \int_{G_i} |R_i(S_1, S_2)| dS_1 dS_2 \leq \varepsilon M_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R_i^{(n(2m_0+1))}(P, Q)| &= \left| \int_{G_i} \int_{G_i} \int_{G_i} R_i^{(m_0)}(P, S_1) R_i^{(n-1)(2m_0+1)}(S_1, S_2) R_i(S_2, S_3) R_i^{(m_0)}(S_3, Q) \right. \\ &\quad \left. dS_1 dS_2 dS_3 \right| \leq \Omega^{n-1} (M_0^2 \varepsilon)^n \quad (i=0, 1, \dots; n=2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Аналогично

$$|R_i^{((2m_0+1)+k)}(P, Q)| \leq \varepsilon M_0^2, \quad |R_i^{(n(2m_0+1)+k)}(P, Q)| \leq \Omega^{n-1} (M_0^2 \varepsilon)^n \quad (k=1, 2, \dots, 2m_0).$$

Выберем теперь  $\varepsilon > 0$  столь малым, чтобы иметь

$$(|\lambda_0| + \eta)^{2m_0+1} M^2 \Omega \varepsilon < \alpha,$$

$$\text{где } \eta > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда ряд:

$$\frac{1}{\Omega} \left\{ \alpha + \bar{\lambda} \alpha + \dots + \bar{\lambda}^{-2m_0} \alpha + \alpha^2 + \bar{\lambda} \alpha^2 + \dots + \bar{\lambda}^{-2m_0} \alpha^2 + \dots \right\} \bar{\lambda} = |\bar{\lambda}_0| + \eta$$

будет мажорировать все ряды (9, i) одновременно (начиная с  $2m_0$ -го члена).

Заменяем теперь уравнения (5, i) эквивалентными им уравнениями с вырожденными ядрами:

$$u_i^*(P) - \int_{G_i} K_i^*(P, Q) u_i^*(Q) dQ = H_i^*(P). \quad (10, i)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\text{если } T_i(P, Q) = \sum_{l=1}^L \varphi_l(P) \xi_l(Q), \text{ то:}$$

$$u_i^*(P) = u_i(P) - \lambda \int_{G_i} R_i(P, Q) u_i(Q) dQ,$$

$$K_i^*(P, Q) = \sum_{l=1}^L \varphi_l(P) B_l^* \xi_l(Q),$$

$$B_l^* \xi_l(Q) = \xi_l(Q) + \lambda \int_{G_i} \Gamma_i(P, Q, \lambda) \xi_l(P) dP,$$

$$\Gamma_i(P, Q, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} R_i^{(k)}(P, Q).$$

Как известно, собственное значение  $\lambda$  уравнения (10) будет нулем функции

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - m_{11}(\lambda)\lambda, -m_{12}(\lambda)\lambda, \dots, -m_{1L}(\lambda)\lambda \\ \vdots \\ -m_{L1}(\lambda)\lambda, -m_{L2}(\lambda)\lambda, \dots, 1 - m_{LL}(\lambda)\lambda \end{vmatrix}$$

Здесь

$$m_{kl}(\lambda) = \int_G \varphi_k(P) B_l^* \xi_l(P) dP = \int_G \varphi_k(P) \xi_l(P) dP + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \int_G \int_G R^{(j)}(P, Q) \varphi_k(P) \xi_l(Q) dP dQ$$

есть аналитическая функция от  $\lambda$  в круге  $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ .

Следовательно, функция  $\Delta(\lambda)$  будет аналитической в том же круге.

Легко доказать, что при каждом фиксированном  $n$  имеет место равенство:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{G_i} \int_{G_i} R_i^{(n)}(P, Q) \varphi_k(P) \xi_i(Q) dP dQ = \int_{G_0} \int_{G_0} R_0^{(n)}(P, Q) \varphi_k(P) \xi_i(Q) dP dQ.$$

Отсюда следует, что каждый коэффициент  $a_{ik}^{(n)m}$  ряда  $m_{ik}^{(n)}(\lambda) = a_{ik}^{(n)0} + \lambda a_{ik}^{(n)1} + \dots$ , при  $n \rightarrow \infty$  стремится к соответствующему коэффициенту  $a_{ik}^{(0)m}$  ряда  $m_{ik}^{(0)}(\lambda) = a_{ik}^{(0)0} + \lambda a_{ik}^{(0)1} + \dots$ .

Так как для всех рядов  $m_{ik}^{(0)}(\lambda)$ ,  $m_{ik}^{(n)}(\lambda)$  существует общий мажорантный числовой ряд

$$M_{ik} \Omega \{ \alpha + \bar{\lambda} \alpha + \dots + \bar{\lambda}^{2m} \alpha + \alpha^2 + \bar{\lambda} \alpha^2 + \dots + \bar{\lambda}^{2m} \alpha^2 + \dots \}, \quad \text{где}$$

$M_{ik} = \max \{ |\varphi_i|, |\xi_k| \}$ , то при  $|\lambda - \lambda_0| < \eta$  функции  $m_{ik}^{(n)}(\lambda)$  равномерно сходятся к функции  $m_{ik}^{(0)}(\lambda)$ . Следовательно, функции  $\Delta_n(\lambda)$  равномерно сходятся к функции  $\Delta_0(\lambda)$  в том же круге.

По известной теореме о нулях равномерно сходящейся последовательности аналитических функций получим, что если  $\lambda = \lambda_0$  есть нуль функции  $\Delta_0(\lambda)$ , то найдется последовательность  $\{\lambda_n\}$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$  и  $\Delta_n(\lambda_n) = 0$ .

Обратно, если  $\Delta_n(\lambda_n) = 0$  и числа  $\lambda_n$  стремятся к числу  $\lambda_0$ , то  $\lambda_0$  будет нулем предельной функции  $\Delta_0(\lambda)$ .

Так как нули функции  $\Delta(\lambda)$  являются собственными значениями соответствующих интегральных уравнений, то теорема III полностью доказана.

7. Теперь становится очевидным, что если для области  $G_0$  и уравнения (1) выполнено условие (O), то задачу Дирихле можно решать методом Винера.

Действительно, так как  $\lambda_0 = 1$  в этом случае не является собственным значением уравнения (5,0), то все уравнения  $u_n(P) -$

$$- \int_{G_n} K_n(P, Q) u_n(Q) dQ = 0, \quad \text{начиная с некоторого, будут иметь только}$$

тривиальные решения.

Следовательно задача Дирихле для уравнения (1) будет разрешимой при любой непрерывной граничной функции  $f$  для всех областей последовательности  $\{G_n\}$ , начиная с некоторой.

Таким образом, каждой непрерывной функции  $f$ , заданной на границе  $\Gamma$  области  $G$ , можно сопоставить последовательность  $\{u_{n,i}\}$ . Далее, в силу теоремы II,  $|u_{n,i}(P)| < M$ . Следовательно, из последовательности  $\{u_{n,i}\}$  можно выделить равномерно сходящуюся подпо-

следовательность, предел которой и будет искомым обобщенным решением задачи Дирихле.

8. В случае, когда  $\lambda_0 = 1$  является собственным значением, т. е. условие (O) не выполнено, собственные значения  $\lambda_n$ , сходящиеся к  $\lambda_0$  (существование которых доказывается в теореме III), могут оказаться комплексными.

Тогда соответствующие им собственные функции  $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$  будут комплексными.

Пусть  $\max_{P \in G_n} |w_n(P)| = M_n$ . Рассмотрим нормированные собственные функции  $v_n(P) = \frac{w_n(P)}{M_n}$ .

Пусть  $v_n(P) = a_n(P) + ib_n(P)$ . Из последовательности  $\{v_n(P)\}$  можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к функции  $v_0(P)$ , удовлетворяющей интегральному уравнению

$$v_0(P) - \int_{G_0} \Gamma(P, Q) c(Q) v_0(Q) dV_Q = 0.$$

Следовательно, функции  $a_n(P)$  и  $b_n(P)$  сходятся к функциям  $a_0(P)$  и  $b_0(P)$ , удовлетворяющим тому же уравнению. Так как  $v_n(P)$  — нормированные функции, то их предел не может быть тождественным нулем. Это следует из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы II. Значит, хотя одна из функций  $a_0(P)$  и  $b_0(P)$  будет отличной от тождественного нуля, т. е. будет обобщенной собственной функцией уравнения (1).

Итак, процессом Винера можно построить решение задачи Дирихле для области  $G_0$  и уравнения (1), если условие (O) выполнено.

Если же это условие не выполнено, то тем же процессом можно построить хотя бы одну обобщенную собственную функцию.

Сектор математики и механики  
Академии наук Армянской ССР

Поступило 15 IV 1952

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Олейник О. А. О задаче Дирихле. Мат. сб., т. I, 1949.
2. Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, УМН, т. VIII, 1941.

## Վ. - Վ. 2. Կարաբեգով

ԳԾԱՅԻՆ ԷԼԻՊՏԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ  
ԼՈՒԾԵԼՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում հետազոտված է Դիրիխլեի խնդիրը

$$L(u) + cu = 0$$

(A)

համապատասխան համար.

Այստեղ

$$L(u) = \sum_{i, k}^N \alpha_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i^N b_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

էլիպտիկ դիֆերենցիալ օպերատոր է և բավարարում է [1] աշխատութեան պայմաններին.

[1] աշխատութեան մեջ ցույց է տրված, որ եթե  $c \leq 0$ , ապա (A) համասարման և ցանկացած սահմանափակ G տիրույթի համար Դիրիլեյի խնդիրը կարելի է լուծել Վիների մեթոդով:

Հոգովածում ապացուցվում է, որ եթե  $c$  գործակիցը կամայական նշան ունի, ապա նույն մեթոդի կիրառման համար բավական է, որ G տիրույթը և (A) համասարմամբ բավարարեն «միակութեան ընդհանրացված պայմանին», որը կայանում է հետևյալում:

ամեն մի  $u$  ֆունկցիա նույնաբար համասար է զերոյի, եթե նա բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

ա)  $u$ -ն բավարարում է G-ի ներքը (A) համասարմանը,

բ)  $|u(P)| \leq M$  G-ի ներքը,

գ)  $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = 0$ , երբ Q-ն պատկանում է  $\Gamma - E_0$

բազմութեանը, որտեղ  $\Gamma$ -ն G տիրույթի եզրագիծն է, իսկ  $E_0$ -ն՝ եզրագծի խեղաչափ կետերի բազմությունը: