

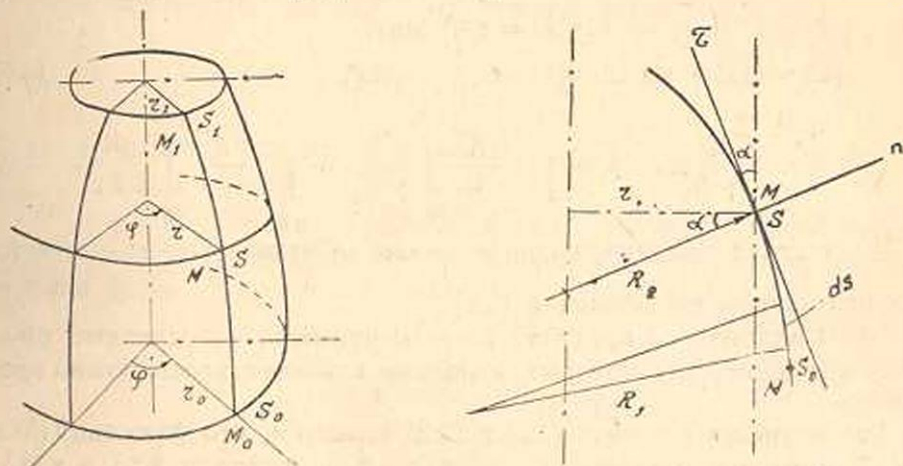
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян

Длинные анизотропные оболочки вращения

1. Положение какой-либо точки M на срединной поверхности симметрично собранной слоистой оболочки вращения будем определять углом φ , являющимся азимутом плоскости, проведенной через точку M и ось вращения z , и меридиональной дугой s (фиг. 1).

Считаем, что материал каждого слоя подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеются три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, одна из которых параллельна срединной поверхности, а остальные две перпендикулярны к меридианам и параллелям срединной поверхности.



Фиг. 1.

Считаем, что для всего пакета тонкой слоистой оболочки в целом справедлива гипотеза недеформируемых нормалей [1—4].

Наконец, рассматриваем такие оболочки вращения, которые несут нагрузку, симметрично приложенную относительно оси вращения z .

2. Как известно [4] эта задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dV}{ds} - \left(\frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} - \frac{\nu_2}{R_1 R_2} \right) V = \frac{\Omega}{C_{11}} \frac{W}{R_2} + \Phi_1(s)$$

$$\frac{d^2 W}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dW}{ds} - \left(\frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} + \frac{\mu_2}{R_1 R_2} \right) W = - \frac{1}{D_{11}} \frac{V}{R_2} + \Phi_2(s) \quad (2.1)$$

относительно двух искомых функций: W — функции перемещений и V — функции напряжений.

В этих уравнениях: C_{ik} и D_{ik} — жесткости растяжения и изгиба [3,4], μ_1 и ν_1 — обобщенные коэффициенты Пуассона [2–4], $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$ — грузовые члены [5].

Систему (2.1) решаем методом асимптотического интегрирования, при этом ограничиваясь точностью $\sqrt{\frac{h}{R}}$ по сравнению с единицей [6,7], для искомых величин окончательно получим [4]:

$$W = A_1 \theta(\beta) + B_1 \eta(\beta) + A_2 \theta(\beta_1) + B_2 \eta(\beta_1), \quad (2.2)$$

$$V = \frac{\Omega}{AC_{11}} [-A_1 \eta(\beta) + B_1 \theta(\beta) - A_2 \eta(\beta_1) + B_2 \theta(\beta_1)] - \frac{F_2(s)}{\cos \alpha}, \quad (2.3)$$

где: A_1 , A_2 и B_1 , B_2 — постоянные интегрирования,

$$A = \sqrt{\frac{\Omega}{C_{11} D_{11}}}, \quad \Omega = C_{11} C_{22} - C_{12}^2 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= e^{-x} \cos x, & \eta(x) &= e^{-x} \sin x, \\ \varphi(x) &= \theta(x) + \eta(x), & \psi(x) &= \theta(x) - \eta(x)^*, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{A}{2}} \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{R_2}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{A}{2}} \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{R_2}} - \sqrt{\frac{A}{2}} \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{R_2}}, \quad (2.6)$$

$\frac{F_2(s)}{\cos \alpha}$ — частное решение, которое ничем не отличается от частного решения изотропной оболочки [5,8].

3. В инженерной практике широко применяются длинные оболочки вращения, для которых взаимным влиянием краев можно пренебречь.

Рассматривая решения (2.2) и (2.3) замечаем, что функции $\theta(\beta)$ и $\eta(\beta)$ убывают при удалении от края $s=0$, а функции $\theta(\beta_1)$ и $\eta(\beta_1)$ — при удалении от края $s=L$ (см. таблицы функций).

Эти функции, как известно [5], уже при $\beta = \pi$ имеют значения порядка 0,04. Поэтому, если исследуемая точка находится на окружности, удаленной от края оболочки настолько, что при данных упругих постоянных $\beta \gg \pi$, то влиянием этого края на напряженное состояние точек исследуемой окружности, или более удаленных точек, можно пренебречь.

Это условие можно сформулировать несколько иначе, а именно: если упругие постоянные (C_{11} , C_{22} , C_{12} , D_{11}) материала оболочки такие, что при заданной s , $\beta \gg \pi$, то влиянием краев на напряженное состояние части оболочки соответствующей s можно пренебречь.

* Таблица этих функций приведена, например, у А. И. Лурье [5].

Если приближенно в выражении β , (2.6), пренебречь изменением R_2 , получим:

$$\beta = \sqrt{\frac{A}{2R_2}} s. \quad (3.1)$$

Здесь начало координаты s принято: $s_0 = 0$.

Вместо β подставляя π для минимальной длины оболочки (по дуге меридиана) получим:

$$s_{\min} = \pi \sqrt{\frac{2R_2}{A}}. \quad (3.2)$$

Таким образом если длина оболочки по дуге меридиана $L \gg s_{\min}$ то взаимным влиянием краев можно пренебречь. Это означает, что при $L \gg s_{\min}$, нагрузка приложенная к краю $\beta = 0$ практически не влияет на напряженное состояние другого края, и наоборот. Благодаря этому в длинных оболочках краевые условия на двух границах оболочки вращения рассматриваются отдельно [5,7].

Таким образом, формула (3.2) дает зону распространения краевого эффекта в анизотропных слоистых оболочках вращения.

При однородных анизотропных оболочках имеем [9]:

$$A = \frac{1}{\delta} \sqrt{3 \left(\frac{E_\varphi}{E_s} - \mu_z^2 \right)}, \quad (3.3)$$

где δ — половина толщины оболочки, E_φ и E_s — модули упругости материала оболочки.

Подставляя значение A из (3.3) в (3.2), получим минимальную длину однородной ортотропной оболочки, при которой взаимным влиянием краев можно пренебречь:

$$s_{\min} = \frac{\pi R_2 \sqrt{\frac{2\delta}{R_2}}}{\sqrt[4]{3 \left(\frac{E_\varphi}{E_s} - \mu_z^2 \right)}}. \quad (3.4)$$

В частном случае изотропной оболочки, учитывая:

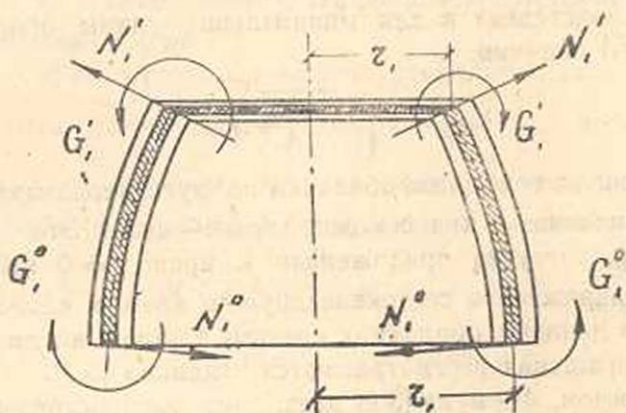
$$E_\varphi = E_s, \quad \mu_z = \frac{1}{m}, \quad 2\delta = h,$$

получим известный критерий А. И. Лурье [5]:

$$s_{\min} = \pi R_2 \sqrt{\frac{h}{R_2}} \sqrt[4]{\frac{m^2}{3(m^2 - 1)}}. \quad (3.5)$$

Эти формулы выведены с некоторым приближением с целью получения простых выражений для всех типов оболочек вращения. Однако, при необходимости в каждом частном случае квадратуру формулы β , (2.6), можно вычислить и дать точные границы распространения краевого эффекта.

Сравнивая выражения (3.2) и (3.5) замечаем, что в отличие от изотропных оболочек, в анизотропных оболочках соответствующим выбором упругих постоянных можно существенно изменить влияние краевых условий (при заданной L) на общее напряженное состояние оболочки.



Фиг. 2

4. Представим длинную оболочку вращения, по краям которой действуют изгибающие моменты G_1^0 и G_1^1 и перерезывающие силы N_1^0 и N_1^1 (фиг. 2) [5, 7].

Учитывая вышеуказанные свойства длинных оболочек, отбрасываем функции β_1 , когда вычисляем величины относящиеся к краю $s=0$, и функции β — при вычислении величин относящихся к краю $s=s_1$.

При $s=0$ для поперечных сил и моментов получим [4]:

$$N_1 = N_1^0 = AD_{11} \frac{1}{R_2} B_1, \quad (4.1)$$

$$G_1 = G_1^0 = D_{11} \sqrt{\frac{A}{2R_2}} (B_1 - A_1).$$

При $s=s_1$ получим:

$$N_1 = N_1^1 = \frac{AD_{11}}{R_2} B_2, \quad (4.2)$$

$$G_1 = G_1^1 = D_{11} \sqrt{\frac{A}{2R_2}} (A_2 - B_2).$$

Совместно решая (4.1) и (4.2) для постоянных A_1 , A_2 , B_1 и B_2 получим удобные выражения, представленные с помощью начальных параметров:

$$B_1 = \frac{R_2^0}{AD_{11}} N_1^0, \quad A_1 = \frac{R_2^0}{D_{11}A} N_1^0 - \frac{1}{D_{11}} \sqrt{\frac{2R_2^0}{A}} G_1^0,$$

$$B_2 = \frac{R_2'}{AD_{11}} N_1', \quad A_2 = \frac{R_2'}{AD_{11}} N_1' + \frac{1}{D_{11}} \sqrt{\frac{2R_2'}{A}} G_1^0 \quad (4.3)$$

Подставляя значения постоянных $A_1 \dots B_2$ в (2.2) и (2.3), для искомых функций получим:

$$W = \frac{1}{AD_{11}} \left[R_2^0 N_1^0 \varphi(\beta) - \sqrt{2AR_2^0} G_1^0 \theta(\beta) + R_2' N_1' \varphi(\beta_1) + \right. \\ \left. + \sqrt{2AR_2'} G_1' \theta(\beta_1) \right], \quad (4.4)$$

$$V = \left[R_2^0 N_1^0 \psi(\beta) + \sqrt{2R_2^0 A} G_1^0 \eta(\beta) + R_2' N_1' \psi(\beta_1) - \right. \\ \left. - \sqrt{2R_2' A} G_1' \eta(\beta_1) \right] - \frac{F_z(s)}{\cos \alpha}. \quad (4.5)$$

Для внутренних усилий получим [4,5]:

$$T_1 = - \left[R_2^0 N_1^0 \psi(\beta) + \sqrt{2R_2^0 A} G_1^0 \eta(\beta) + R_2' N_1' \psi(\beta) - \right. \\ \left. - \sqrt{2R_2' A} G_1' \eta(\beta_1) \right] \frac{\sin \alpha}{r} + \frac{1}{R_2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right), \quad (4.6)$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{A}{2R_2}} \left[-2R_2^0 N_1^0 \theta(\beta) + \sqrt{2R_2^0 A} G_1^0 \psi(\beta) + 2R_2' N_1' \theta(\beta_1) + \right. \\ \left. + \sqrt{2R_2' A} G_1' \psi(\beta_1) \right] - \frac{1}{R_1 \cos^2 \alpha} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right) + R_2 Z, \quad (4.7)$$

$$N_1 = \left[R_2^0 N_1^0 \psi(\beta) + \sqrt{2AR_2^0} G_1^0 \eta(\beta) + R_2' N_1' \psi(\beta_1) - \right. \\ \left. - \sqrt{2AR_2'} G_1' \eta(\beta_1) \right] \frac{\cos \alpha}{r}, \quad (4.8)$$

$$G_1 = -2R_2^0 \sqrt{\frac{1}{2AR_2}} N_1^0 \eta(\beta) + \sqrt{\frac{R_2^0}{R_2}} G_1^0 \varphi(\beta) + \\ + 2R_2' \sqrt{\frac{1}{2AR_2}} N_1' \eta(\beta_1) + \sqrt{\frac{R_2'}{R_2}} G_1' \varphi(\beta_1), \quad (4.9)$$

$$G_2 = \mu_2 G_1 - \frac{D_{22}}{D_{11}A} \left[R_2^0 N_1^0 \varphi(\beta) - \sqrt{2AR_2^0} G_1^0 \theta(\beta) + \right. \\ \left. + R_2' N_1' \varphi(\beta_1) + \sqrt{2AR_2'} G_1' \theta(\beta_1) \right] \frac{\sin \alpha}{r}. \quad (4.10)$$

Краевые условия будут такие же, как и в изотропных оболочках [5,7].

Для слоистых оболочек существенный практический интерес представляют нормальные напряжения в каждом слое, которые определяются посредством следующих формул [4]:

$$\sigma_s^m = \frac{E_s^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} \left[\frac{C_{11}}{\Omega} (\mu_2^m - \nu_2) \frac{dV}{ds} + \frac{C_{22}}{\Omega} (\mu_2^m \nu_1 - 1) \frac{\sin \alpha}{r} V + \right. \\ \left. + \frac{(C_{22} - \mu_2^m C_{12})}{\Omega} \frac{1}{r} F_1(s) - \gamma \frac{dW}{ds} \right], \quad (4.11)$$

$$\sigma_\varphi^m = \frac{E_\varphi^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} \left[\frac{C_{11}}{\Omega} (1 - \mu_1^m \nu_2) \frac{dV}{ds} + \frac{C_{22}}{\Omega} (\nu_1 - \mu_1^m) \frac{\sin \alpha}{r} V + \right. \\ \left. + \frac{(C_{22} \mu_1^m - C_{12})}{\Omega} \frac{1}{r} F_1(s) + \gamma \left(W \frac{\sin \alpha}{r} - \mu_1^m \frac{dW}{ds} \right) \right]. \quad (4.12)$$

В этих формулах $F_1(s)$ — грузовой член, как в изотропных оболочках [4,5].

5. Для примера рассмотрим длинную цилиндрическую оболочку, которая в среднем сечении нагружена силами, равномерно распределенными по окружности этого сечения (фиг. 3).

Пусть интенсивность нагрузки будет q .

Как и в изотропных оболочках, рассмотрим часть оболочки справа от загруженного сечения; центр загруженного сечения примем за начало отсчета параметров β . Таким образом, при $\beta = 0$ для правой части оболочки имеем условия, идентичные условиям заделанного края, т. е. [5].

$$RN_1^0 - \sqrt{2AR} G_1^0 = 0.$$

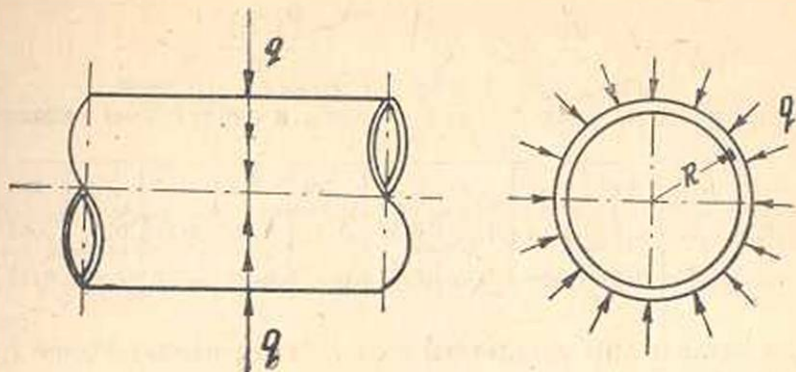
Тогда учитывая характер нагружения, получим:

$$N_1^0 = \frac{1}{2} q, \quad G_1^0 = \frac{R}{2\sqrt{2AR}} q.$$

Имея значения N_1^0 и G_1^0 посредством формул (4.4) и (4.5) для основных искомым получим:

$$V = \frac{Rq}{2} \theta(\beta), \quad W = \frac{Rq}{2AD_{11}} \eta(\beta).$$

Для нормальных напряжений в окрестностях сечения, где приложена нагрузка q , из (4.11) и (4.12) получим:



Фиг. 3.

$$\sigma_s^m = - \frac{E_s^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} \sqrt{\frac{A}{2R}} \left[\frac{C_{11}}{\Omega} (\mu_2^m - \nu_2) + \gamma \frac{1}{AD_{11}} \right] \frac{Rq}{2},$$

$$\sigma_\varphi^m = - \frac{E_\varphi^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} \sqrt{\frac{A}{2R}} \left[\frac{C_{11}}{\Omega} (1 - \mu_1^m \nu_2) + \gamma \frac{\mu_1^m}{AD_{11}} \right] \frac{Rq}{2}.$$

Пусть ортотропная оболочка однослойная и коэффициент Пуассона материала оболочки равен нулю. В этом случае для жесткостей имеем [9]:

$$D_{11} = \frac{E_s h^3}{12}, \quad C_{11} = E_s h, \quad C_{22} = E_\varphi h.$$

В силу этого

$$A = \sqrt{\frac{\Omega}{C_{11} D_{11}}} = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{12 E_\varphi}{E_s}}.$$

Для максимальных напряжений получим:

$$\sigma_s = - \frac{3q}{2h^2} \sqrt{hR} \sqrt[4]{\frac{E_s}{3E_\varphi}},$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{q}{2h} \sqrt{hR} \sqrt[4]{\frac{3E_\varphi}{E_s}}.$$

Установим законы изменения нормальных напряжений σ_s и σ_φ в зависимости от $e = \frac{E_\varphi}{E_s}$ — отношений модулей упругости.

Видоизменяя формулы нормальных напряжений, получим:

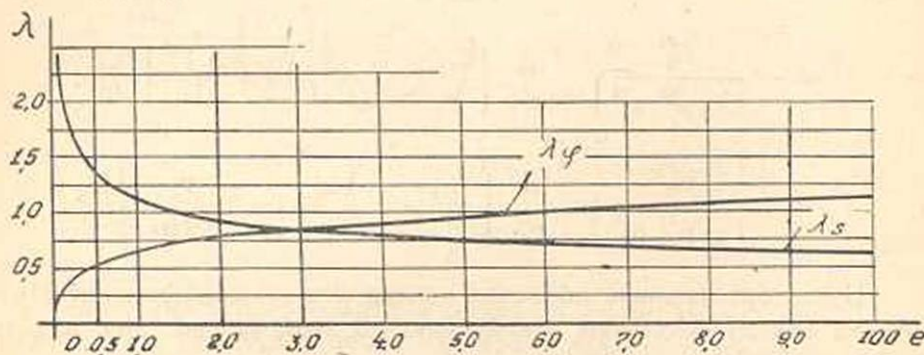
$$\sigma_s = - \frac{q \sqrt{Rh}}{h^2} 1,14 \sqrt[4]{e^{-1}} = - \frac{q \sqrt{Rh}}{h^2} \lambda_s,$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{q \sqrt{Rh}}{h^2} 0,66 \sqrt{e} = -\frac{q \sqrt{Rh}}{h^2} \lambda_{\varphi}.$$

Коэффициенты этих формул сведены в следующую таблицу:

e	0,1	0,25	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	10,0
λ_s	2,03	1,61	1,36	1,14	0,96	0,87	0,81	0,76	0,72	0,70	0,67	0,64
λ_{φ}	0,37	0,47	0,55	0,66	0,79	0,87	0,93	0,99	1,04	1,08	1,12	1,17

Для наглядности результаты этой таблицы представлены графически (фиг. 4).



Фиг. 4.

Таблица и график показывают, что для этой задачи с точки зрения прочности целесообразнее иметь большие жесткости в кольцевом направлении оболочки.

Институт строительных материалов и сооружений
Академии наук Армянской ССР

Поступило 14 XI 1951

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рабинович А. Л. О расчете ортотропных слоистых панелей на растяжение, сдвиг и изгиб. Министерство Авиационной Пром. СССР, Труды № 675, 1948.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ОГИЗ, 1947.
3. Амбарцумян С. А. Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. ДАН Армянской ССР, т. VIII, № 5, 1948.
4. Амбарцумян С. А. Расчет слоистых оболочек вращения. ДАН Армянской ССР, том XI, № 2, 1949.
5. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
6. Штаерман И. Я. Об интегрировании дифференциальных уравнений равновесия упругих оболочек. Изв. Киевского политехн. и сельскохозяй. ин-та, 1924.
7. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Издат. Военно-Морской Академии им. А. Н. Крылова, 1947.
8. Амбарцумян С. А. Безмоментная теория анизотропных оболочек. Известия АН Армянской ССР, т. I, № 6, 1948.
9. Амбарцумян С. А. Некоторые вопросы теории анизотропных оболочек. Известия АН Армянской ССР, № 5, 1947.

Ս. Ս. Համբարձումյան

ՊՏՏՄԱՆ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԵՐԿԱՐ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ արված է անիզոտրոպ երկար թաղանթների ամբողջական հաշվումը սիմետրիկ բեռի տակ: Ստացված են հաշվային բանաձևեր թաղանթի յուրաքանչյուր շերտում նորմալ լարումները որոշելու համար: