

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян

Изгиб призматического стержня с крестообразным поперечным сечением

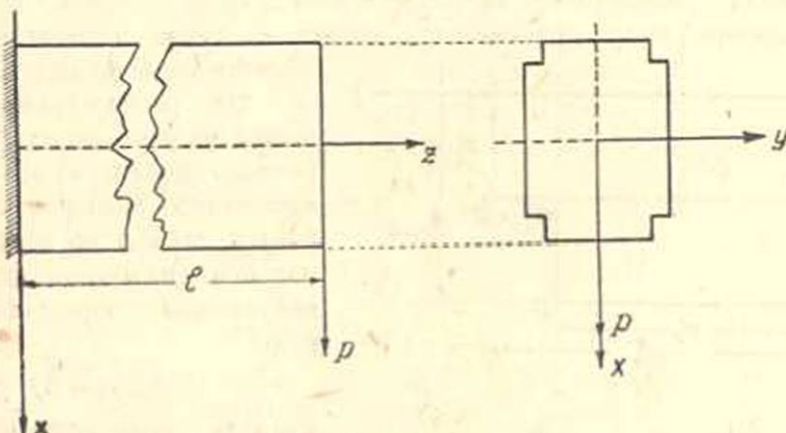
В работе приведено точное решение задачи Сен-Венана об изгибе призматического стержня с поперечным сечением в виде креста.

При решении задачи применен метод введения вспомогательных функций Н. Х. Арутюняна [1, 2], с помощью которого решение дифференциального уравнения с частными производными задачи сведено к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, а постоянные интегрирования определяются из решения вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

Решение задачи приводится в общей алгебраической форме в зависимости от геометрических параметров сечения.

§ 1. Постановка задачи

В работе рассматривается изгиб заделанного одним концом призматического стержня под действием силы P , приложенной к свободному концу стержня вдоль вертикальной оси симметрии поперечного сечения (фиг. 1).



Фиг. 1

Берем начало координат в плоскости заделанного конца в центре тяжести сечения, ось z направляем по оси стержня, а оси x и y направляем по осям симметрии поперечного сечения.

Предполагается (в отличие от чистого изгиба), что из шести составляющих напряжений отличны от нуля только Z_z , X_z и Y_z , причем напряжение Z_z принимается равным

$$Z_z = -\frac{P(l-z)x}{I}, \quad (1.1)$$

где l — длина призматического стержня, I — момент инерции поперечного сечения относительно оси y : $I = \iint_{\Omega} x^2 dx dy$, Ω — область поперечного сечения стержня.

При таких предположениях задача об изгибе призматического стержня сводится к определению функции напряжений $F(x, y)$, которая в области поперечного сечения удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{P}{1+\nu} \frac{\nu}{1+\nu} y - \frac{P}{2I} f(y), \quad (1.2)$$

и условию на контуре сечения

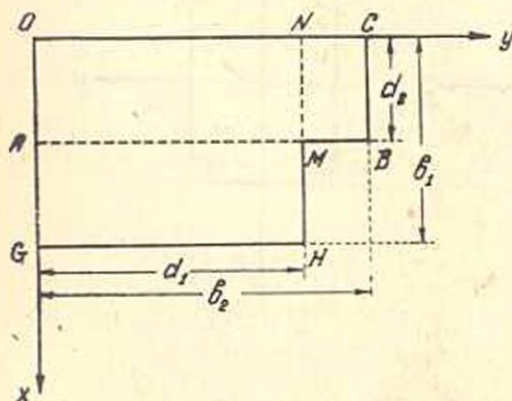
$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2I} [x^2 - f(y)] \frac{dy}{ds}, \quad (1.3)$$

где ν — коэффициент Пуассона, $f(y)$ — произвольная функция, подлежащая определению из условий на контуре, ds — элемент дуги контура.

Напряжения $X_z(x, y)$ и $Y_z(x, y)$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} X_z(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P}{2I} [x^2 - f(y)], \\ Y_z(x, y) &= -\frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ввиду симметричности области поперечного сечения, функция напряжений $F(x, y)$ отыскивается только в одной четвертой части области сечения (фиг. 2).



Фиг. 2

Для распространения решения на всю область поперечного сечения, на основании мембранной аналогии [3], требуется, чтобы на вертикальной оси симметрии функция напряжений обращалась в нуль:

$$F(x, y) = 0, \quad (1.5)$$

а вдоль горизонтальной оси симметрии обращалась в нуль его нормальная производная:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.2), (1.3), (1.5) и (1.6) полностью определяют функцию напряжений $F(x, y)$ для рассматриваемой задачи.

§ 2. Введение вспомогательных функций

Полагаем, что в области OABC (фиг. 2) функция $F(x, y)$ принимает значение $F_1(x, y)$, а в области ONHG — значение $F_2(x, y)$.

Функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ должны удовлетворять граничным условиям (1.3), (1.5) и (1.6). Выберем здесь:

$$f(y) = b_1^2, \quad (2.1)$$

тогда из уравнений (1.3), (1.5) и (1.6) для функций $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ получим следующие граничные условия:

$$F_1(x, 0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{x=0} = 0,$$

$$F_1(x, b_2) = -\frac{P}{2I} (b_1^2 - d_2^2) (b_2 - d_1), \quad (2.2)$$

$$F_1(d_2, y) = \begin{cases} -\frac{P}{2I} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1) & (d_1 \leq y \leq b_2) \\ F_2(d_2, y) & (0 \leq y \leq d_1) \end{cases}$$

и

$$F_2(x, 0) = 0,$$

$$F_2(b_1, y) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad (2.3)$$

$$F_2(x, d_1) = \begin{cases} 0 & (d_2 \leq x \leq b_1) \\ F_1(x, d_1) & (0 \leq x \leq d_2) \end{cases}$$

Ищем решения в виде:

$$F_i(x, y) = \Psi_i(x, y) + \Phi_i(x, y) \quad (i=1, 2), \quad (2.4)$$

где вспомогательные функции $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) существуют только в области OAMN и удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5)$$

и дополнительным условиям

$$\Phi_1(x, d_1) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=d_1} = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi_2(d_2, y) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{x=d_2} = 0,$$

а функции $\Psi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) существуют: $\Psi_1(x, y)$ — в области OABC, $\Psi_2(x, y)$ — в области ONHG и удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{P}{I} \frac{v}{1+v} y. \quad (2.7)$$

Согласно (2.2) и (2.3), функции $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ подчинены условиям:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x, 0) + \Phi_1(x, 0) &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0, \\ \Psi_1(x, d_2) &= -\frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (b_2 - d_1), \\ \Psi_1(d_2, y) &= -\frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1).\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\right)_{x=0} + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0, \\ \Psi_2(x, 0) &= 0, \\ \Psi_2(b_1, y) &= 0, \\ \Psi_2(x, d_1) &= 0.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Функции $\Psi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) ищем в виде рядов:

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}, \quad (2.10)$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}. \quad (2.11)$$

Заметим, что для определения функции $\Psi_1(x, y)$ граничные условия неоднородны.

Решение, определенное рядом (2.10), отличается от решений, получаемых по методу Фурье-Лапласа, ибо каждый отдельный член этого ряда не является частным решением дифференциального уравнения (2.7), а представляет собою лишь один из членов разложения искомой функции в ряд Фурье по одним косинусам от аргументов, нечетно кратных $\frac{\pi x}{2d_2}$ в интервале $0 \leq x \leq d_2$.

Действительно, при $x = d_2$ каждый отдельный член ряда (2.10) обращается в нуль, истинное же значение функции $\Psi_1(d_2, y)$ есть $\frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (d_1 - y)$.

Это объясняется тем, что ряд (2.10) обладает слабой сходимостью, но эту сходимость можно усилить выделением из ряда членов, соответствующих скачкообразному изменению функции $\Psi_1(x, y)$ на границе $x = d_2$ [4].

Аналогичным образом для функции $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) получим условия:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0, \quad \Phi_1(d_2, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(d_2) \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1), \\ \Phi_1(x, d_1) &= 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=d_1} = 0,\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, 0) &= 0, \\ \Phi_2(d_2, y) &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{x=d_2} &= 0,\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$\Phi_2(x, d_1) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(d_1) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}.$$

Здесь также полагаем

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}, \quad (2.14)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}. \quad (2.15)$$

§ 3 Решение уравнений задачи

Из (2.10) имеем:

$$f_k(y) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Psi_1(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx. \quad (3.1)$$

Умножив уравнение (2.7) на $\frac{2}{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}$ и интегрируя его по x от нуля до d_2 , для функции $\Psi_1(x, y)$ получим:

$$\begin{aligned}& \int_0^{d_2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} - \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} y \right) \frac{2}{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = \\&= \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx + f_k(y) - \\& - \frac{2}{d_2} \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} y \int_0^{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = 0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx &= \frac{2}{d_2} \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \right]_0^{d_2} + \\&+ \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx \Big] =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2\kappa-1)\pi}{d_2^2} \left[\Psi_1(x, y) \sin \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} \right]_{d_2} - \\
&- \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} \int_0^{d_2} \Psi_1(x, y) \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} dx = \\
&= (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} (2\kappa-1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) (d_1 - y) - \left[\frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} \right]^2 f_{\kappa}(y), \quad (3.3)
\end{aligned}$$

при этом использованы условия (2.8) и значение (3.1).

Подставив (3.3) в (3.2), получим:

$$\begin{aligned}
f_{\kappa}''(y) - \left[\frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} \right]^2 f_{\kappa}(y) = & (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} \left[(2\kappa-1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{8}{(2\kappa-1)\pi} \right] y - (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} (2\kappa-1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) d_1. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Общее решение уравнения (3.4) имеет вид:

$$\begin{aligned}
f_{\kappa}(y) = & A_{\kappa} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} + B_{\kappa} \operatorname{ch} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} + \\
& + \frac{2d_2}{(2\kappa-1)\pi} \int_0^y K_{\kappa}(\xi) \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (y-\xi) d\xi, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{\kappa}(\xi) = & (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} \left[(2\kappa-1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{8}{(2\kappa-1)\pi} \right] \xi - \\
& - (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} (2\kappa-1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) d_1. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Подставив (3.6) в (3.5) и произведя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned}
f_{\kappa}(y) = & A_{\kappa} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} + B_{\kappa} \operatorname{ch} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} + \\
& + (-1)^{\kappa+1} \frac{2P}{l} \frac{1}{(2\kappa-1)\pi} \left[b_1^2 - d_2^2 + \right. \\
& \left. + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{8d_2^2}{(2\kappa-1)^2\pi^2} \right] \left[\frac{2d_2}{(2\kappa-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} - y \right] + \\
& + (-1)^{\kappa+1} \frac{2P}{l} \frac{1}{(2\kappa-1)\pi} (b_1^2 - d_2^2) d_1 \left[1 - \operatorname{ch} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} \right]. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Для определения функции $\varphi_{\kappa}(y)$ из (2.14) имеем:

$$\varphi_{\kappa}(y) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_1(x, y) \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} dx. \quad (3.8)$$

Умножив уравнение (2.5) на $\frac{2}{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}$ и интегрируя его по x от нуля до d_2 , для функции $\Phi_1(x, y)$ получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{d_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \right) \frac{2}{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = \\ & = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx + \varphi_k''(y) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Интегрируя здесь первый член по частям, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = \frac{2}{d_2} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \right]_0^{d_2} + \\ & + \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = \\ & = \frac{(2k-1)\pi}{d_2^2} \left[\Phi_1(x, y) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \right]_0^{d_2} - \\ & - \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \int_0^{d_2} \Phi_1(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = \\ & = (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)\pi}{d_2^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1} + \right. \\ & \left. + \frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1) \right] - \left[\frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \right]^2 \varphi_k(y), \end{aligned} \quad (3.10)$$

при этом использованы условия (2.12) и значение (3.8).

Подставив (3.10) в (3.9), получим:

$$\begin{aligned} & \varphi_k''(y) - \left[\frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \right]^2 \varphi_k(y) = \\ & = (-1)^k \frac{(2k-1)\pi}{d_2^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1} + \frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) = & C_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} + D_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} + \\ & + (-1)^k \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_2)}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2} \left[2p d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (2\kappa - 1)d_1^2 \sin \frac{p\pi y}{d_1} \Big] + (-1)^\kappa \frac{2P}{1} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2\kappa - 1)\pi} \left[d_1 - y + \right. \\
 & \left. + \frac{2d_2}{(2\kappa - 1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa - 1)\pi y}{2d_2} - d_1 \operatorname{ch} \frac{(2\kappa - 1)\pi y}{2d_2} \right]. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом для функции $v_\kappa(x)$ и $w_\kappa(x)$ получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$v_\kappa''(x) - \left(\frac{\kappa\pi}{d_1}\right)^2 v_\kappa(x) = (-1)^{\kappa+1} \frac{2P}{1} \frac{y}{1 + y\kappa\pi} \frac{d_1}{d_1}, \quad (3.13)$$

$$w_\kappa''(x) - \left(\frac{\kappa\pi}{d_1}\right)^2 w_\kappa(x) = (-1)^\kappa \frac{2\kappa\pi}{d_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} i_p(d_1) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2}. \quad (3.14)$$

Общие решения этих уравнений имеют вид:

$$v_\kappa(x) = M_\kappa \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi x}{d_1} + N_\kappa \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi x}{d_1} + (-1)^\kappa \frac{2P}{1} \frac{y}{1 + y\kappa\pi} \left(\frac{d_1}{\kappa\pi}\right)^3 \quad (3.15)$$

и

$$\begin{aligned}
 w_\kappa(x) = & L_\kappa \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi x}{d_1} + F_\kappa \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi x}{d_1} + \\
 & + (-1)^\kappa \frac{8\kappa d_2^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i_p(d_1)}{(2\kappa d_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2} \left[\operatorname{ch} \frac{\kappa\pi x}{d_1} - \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2} \right]. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Для определения постоянных интегрирования A_κ , B_κ , C_κ , D_κ , M_κ , N_κ , L_κ и F_κ согласно (2.8), (2.9), (2.12) и (2.13) получим следующие условия:

$$\begin{aligned}
 & i_\kappa(0) + \varphi_\kappa(0) = 0, \\
 & i_\kappa(b_2) = (-1)^\kappa \frac{2P}{1} \frac{1}{(2\kappa - 1)\pi} (b_1^2 - d_2^2) (b_2 - d_1), \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & v_\kappa(0) + w_\kappa(0) = 0, \\
 & v_\kappa(b_1) = 0, \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

$$\varphi_\kappa(d_1) = \varphi_\kappa'(d_1) = 0, \quad (3.19)$$

$$w_\kappa(d_2) = w_\kappa'(d_2) = 0, \quad (3.20)$$

§ . Определение постоянных интегрирования

Исключив из значений (3.12) и (3.16) неизвестные коэффициенты посредством условий (3.19) и (3.20), получим:

$$\varphi_\kappa(y) = (-1)^{\kappa+1} \frac{8}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2\kappa - 1)\pi}{2d_2} (d_1 - y) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{V_p(d_2)p(-1)^p}{(2\kappa - 1^2)d_1^2 + (2pd_2)^2} +$$

$$+(-1)^{k+1} \frac{4(2k-1)}{\pi} d_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1}}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2} -$$

$$-(-1)^{k+1} \frac{2P}{l} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2k-1)\pi} \left[\frac{2d_2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (y-d_1) - (y-d_1) \right], \quad (4.1)$$

и

$$w_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (d_2 - x) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) (2p-1) (-1)^p}{(2kd_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2} +$$

$$+(-1)^{k+1} \frac{8k}{\pi} d_2^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2}}{(2kd_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}. \quad (4.2)$$

Удовлетворяя условиям (3.17) и (3.18) из (3.7), (3.15), (4.1) и (4.2), получим:

$$B_k + (-1)^{k+1} \frac{8}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_2) p (-1)^p}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2} +$$

$$+(-1)^k \frac{2P}{l} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2k-1)\pi} \left[\frac{2d_2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} + d_1 \right] = 0, \quad (4.3)$$

$$A_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} + B_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} +$$

$$+(-1)^{k+1} \frac{2P}{l} \frac{1}{(2k-1)\pi} \left[(b_1^2 - d_2^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{v}{1+v} \frac{8d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \right] \left[\frac{2d_2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - b_2 \right] +$$

$$+(-1)^{k+1} \frac{2P}{l} \frac{d_1}{(2k-1)\pi} (b_1^2 - d_2^2) \left[1 - \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right] =$$

$$= (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{1}{(2k-1)\pi} (b_1^2 - d_2^2) (b_2 - d_1), \quad (4.4)$$

$$M_k \operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{d_1} + N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{d_1} + (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{v}{1+v} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 = 0, \quad (4.5)$$

и

$$\frac{k\pi}{d_1} \left[M_k + (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) (2p-1) (-1)^{p+1}}{(2kd_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2} \right] = 0, \quad (4.6)$$

Исключив из этих соотношений коэффициенты A_k и M_k , получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$B_k = (-1)^{k+1} \frac{8}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_2) p (-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2k-1)\pi} \left[\frac{2d_2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} + d_1 \right], \quad (4.7)$$

и

$$N_k = (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{v}{1+v} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \operatorname{sch} \frac{k\pi b_1}{d_1} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) (2p-1) (-1)^{p+1}}{(2k d_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}, \quad (4.8)$$

где $f_k(d_1)$ и $v_k(d_2)$ имеют значения:

$$f_k(d_1) = B_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} -$$

$$- (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} +$$

$$+ (-1)^k \frac{P}{1} \frac{v}{1+v} \frac{16d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \left[d_1 - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right], \quad (4.9)$$

$$v_k(d_2) = N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{d_1} +$$

$$+ (-1)^k \frac{2P}{1} \frac{v}{1+v} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \left(1 - \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{d_1} \right). \quad (4.10)$$

Введем новые неизвестные:

$$B_k = (-1)^{k+1} \frac{16d_1 d_2}{3(2k-1)} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} S_k, \quad (4.11)$$

$$N_k = (-1)^{k+1} \frac{2d_1 d_2}{k} \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} R_k. \quad (4.12)$$

Подставляя значения (4.9), (4.10), (4.11) и (4.12) в (4.7) и (4.8), совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений приведем к виду:

$$S_k = \sum_{p=1}^{\infty} R_p a_{kp} + \gamma_k$$

$k = 1, 2, \dots$

$$R_k = \sum_{d=1}^{\infty} S_p c_{kp} + \beta_k, \quad (4.13)$$

где введены обозначения:

$$a_{kp} = \frac{3(2k-1)}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \operatorname{sch} \frac{p\pi b_1}{d_1} \frac{1}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2}, \quad (4.14)$$

$$\gamma_k = -\frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{12(2k-1)d_1^2}{\pi^4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{p\pi b_1}{d_1}}{(2p)^2 [(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2]} +$$

$$+ \frac{3P}{4l} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2k-1)d_1 \pi^3} \left[1 + \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right], \quad (4.15)$$

$$c_{kp} = \frac{32k}{3\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} \frac{1}{(2k d_1)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}, \quad (4.16)$$

$$\beta_k = -\frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{32k d_2^2}{\pi^4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_1 - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2}}{(2p-1)^2 [(2k d_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2]} +$$

$$+ \frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{d_1^2}{d_2 k^2 \pi^3} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} -$$

$$- \frac{P}{l} \frac{4k}{\pi^2} (b_1^2 + d_2^2) d_1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2}}{(2k d_1)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}. \quad (4.17)$$

Системы (4.13) могут быть написаны в виде одной системы:

$$Z_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} A_{\nu j} Z_j + B_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (4.18)$$

где обозначены

$$S_k = Z_{2n-1}, \quad R_k = Z_{2n}$$

$$A_{2n-1, 2m-1} = 0, \quad A_{2n-1, 2m} = a_{kp}, \quad B_{2n-1} = \gamma_k$$

$$A_{2n, 2m} = 0, \quad A_{2n, 2m-1} = c_{kp}, \quad B_{2n} = \beta_k. \quad (4.19)$$

Заметим еще, что для всякого p имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \operatorname{sch} \frac{p\pi b_1}{d_1} &= \operatorname{th} \frac{p\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch}^2 \frac{p\pi d_2}{d_1} - \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2p\pi d_2}{d_1} - \operatorname{sh} \frac{2p\pi d_2}{d_1} \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \exp \left(-\frac{2p\pi d_2}{d_1} \right) \right] < 1, \quad (4.20) \\ \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{sch} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} &= \\ = \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{cth} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh}^2 \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{d_2} - \operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi d_1}{d_2} \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[1 - \exp \left(-\frac{(2p-1)\pi d_1}{d_2} \right) \right] &\leq \frac{1}{2}. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Для случая $\nu = 2n - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |A_{vj}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{3(2k-1)}{\pi} d_1 d_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2pd_2)^2 + (2k-1)^2 d_1^2} = \\ &= \frac{3}{4} \left[\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} - \frac{2d_2}{(2k-1)\pi d_1} \right] \leq \frac{3}{4}. \quad (4.22) \end{aligned}$$

При этом использованы неравенства (4.20)

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leq 1 \quad \text{при } 0 \leq x \leq \infty \quad (4.23)$$

и значение ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{ctha}\pi - \frac{1}{a\pi} \right). \quad (4.24)$$

Для случая $\nu = 2n$ имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |A_{vj}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| \leq \frac{16k}{3\pi} d_1 d_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2 d_1^2 + (2kd_2)^2} = \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{d_1} \leq \frac{2}{3}, \quad (4.25) \end{aligned}$$

при этом использованы неравенства (4.21) и значение ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \operatorname{th} \frac{a\pi}{2}. \quad (4.26)$$

Из неравенств (4.22) и (4.25) следует, что для любых чисел ν сумма коэффициентов A_{vj} системы (4.18) удовлетворяет неравенству:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{vj}| < \frac{3}{4}, \quad (4.27)$$

то есть бесконечная система (4.18) вполне регулярна.

Пользуясь теорией вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений [5], неизвестные Z_k определим с любой точностью.

§ 5. Определение функций напряжений

Пользуясь соотношением (4.3), выражение (4.1) для функции $\varphi_k(y)$ приведем к виду:

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) = & \left[B_k + (-1)^k \frac{2d_1}{(2k-1)\pi} \frac{P}{1} (b_1^2 - d_1^2) \right] \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \cdot \\ & (y - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{4(2k-1)}{\pi} d_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1}}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2pd_2)^2} + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{b_1^2 - d_1^2}{(2k-1)\pi} (y - d_1). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Исключив из выражения (3.7) коэффициент A_k , получим:

$$\begin{aligned} f_k(y) = & B_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} + \\ & + (-1)^k \frac{2P}{1} \frac{(b_1^2 - d_1^2) d_1}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} + \\ & + (-1)^k \frac{P}{1} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{16d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^3} \left[y - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right] + \\ & + (-1)^k \frac{2P}{1} \frac{(b_1^2 - d_1^2) (y - d_1)}{(2k-1)\pi}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Аналогичным образом для функций $w_k(x)$ и $v_k(x)$ получим:

$$\begin{aligned} w_k(x) = & -N_k \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (d_2 - x) + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{\nu}{1 + \nu} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (d_2 - x) + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{8k}{\pi} d_2^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2}}{(2kd_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

и

$$v_k(x) = N_k \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - x) +$$

$$+(-1)^{\kappa} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{d_1}{\kappa\pi} \right)^2 \left(1 - \operatorname{csh} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi x}{d_1} \right). \quad (5.4)$$

Подставив значения (5.1)–(5.4) в (2.4), получим функцию напряжений

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} [f_{\kappa}(y) + \varphi_{\kappa}(y)] \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} \left\{ B_{\kappa} \left[\operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (b_2-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (d_1-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{\kappa} \frac{2P}{I} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{(2\kappa-1)\pi} \left[\operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (b_2-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (y-d_1) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{\kappa} \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{16d_2^2}{(2\kappa-1)^2\pi^2} \left[y - b_2 \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} \right] \right\} + \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \nu_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \end{aligned} \quad (5.5)$$

для области OAMN.

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} f_{\kappa}(y) \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} = -\frac{P}{2I} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1) + \\ &+ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} \left\{ B_{\kappa} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (b_2-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{\kappa} \frac{2P}{I} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{(2\kappa-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (b_2-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{\kappa} \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{16d_2^2}{(2\kappa-1)^2\pi^2} \left[y - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

для области NMBC.

$$F_2(x, y) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} [v_{\kappa}(x) + w_{\kappa}(x)] \sin \frac{\kappa\pi y}{d_1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_1) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - d_2) + \right. \\
&\left. + (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \left[1 - \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \right] \right\} \quad (5.7)
\end{aligned}$$

для области OAMN

$$\begin{aligned}
F_2(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - x) \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} + \right. \\
&\left. + (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \left(1 - \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \right) \right\} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

для области AMHG.

При этом использованы значения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos(2k-1)x = \frac{\pi}{4} \quad (0 \leq x < \pi) \quad (5.9)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 + a^2} \operatorname{sink}x = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh}ax}{\operatorname{sh}a\pi} \quad (0 \leq x < \pi) \quad (5.10)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k-1)}{(2k-1)^2 + a^2} \cos(2k-1)x = \frac{\pi}{4} \frac{\operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch} \frac{a\pi}{2}} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.11)$$

В случае, когда $d_1 = b_2 = b$ и $b_1 = d_2 = a$, из (5.7) получим:

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^3}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin \frac{k\pi y}{b} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{b} \right) = \\
&= \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2b^3}{\pi^3} \left[\frac{\pi^3}{12} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} \right]. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Здесь использованы значения:

$$f_p(d_1)|_{d_1=b_2} = 0$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin \frac{k\pi y}{b} = \frac{\pi^3}{12} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right) \quad (0 \leq y \leq b) \quad (5.13)$$

Выражение (5.12) есть функция напряжений при изгибе призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением, которая приводится в курсах теории упругости [6].

Функцию напряжений при изгибе призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением можно представить и в другом виде.

Подставив в (5.5) $d_1 = b_2 = b$ и $b_1 = d_2 = a$, получим:

$$F(x, y) = \frac{P}{1} \frac{\nu}{1 + \nu} \left\{ \frac{1}{2} (x^2 - a^2) y - \frac{16a^2b}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2a} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2a} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2a} \right\}. \quad (5.14)$$

При этом использованы значения:

$$\nu_p(d_2) \Big|_{d_2=b_1} = 0$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2a} = \frac{\pi^3}{32a^3} (x^3 - a^2) \quad (0 \leq x < a) \quad (5.15)$$

§ 6. Определение напряжений X_z и Y_z

Согласно (1.4) и (2.1) компоненты касательного напряжения определяются соотношениями:

$$X_z(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P}{2I} (x^2 - b_1^2), \quad Y_z(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Пользуясь выражениями (5.5) — (5.8) для функции напряжений, для напряжений X_z и Y_z получим следующие значения:

Для области NMBC:

$$X_z(x, y) = -\frac{P}{2I} \frac{1}{1 + \nu} (x^2 - d_2^2) - \frac{\pi}{2d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \left\{ (2k-1)B_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) - (-1)^{k+1} \frac{2P}{I} (b_1^2 - d_2^2) d_1 \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) + (-1)^k \frac{P}{1} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{16d_1^2 b_2}{(2k-1)^2 \pi^3} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \right\}, \quad (6.2)$$

$$Y_z(x, y) =$$

$$= \frac{\pi}{2d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \left\{ (2k-1)B_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) + \right.$$

$$+ (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{(b_1^2 - d_2^2)d_1}{\pi} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) +$$

$$+ (-1)^k \frac{P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu(2k-1)^2\pi^2} \left[y - b_2 \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \right]. \quad (6.3)$$

Для области АМНГ:

$$X_z(x, y) = \frac{P}{2l} (b_1^2 - x^2) +$$

$$+ \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k N_k \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - x) + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{d_1^3}{k^2\pi^3} \left(1 - \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \right) \right\}. \quad (6.4)$$

$$Y_z(x, y) = \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k N_k \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - x) + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{d_1^3}{k^2\pi^3} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \right\}. \quad (6.5)$$

Для области ОАМН:

$$X_z(x, y) = \frac{P}{2l} (b_1^2 - x^2) +$$

$$+ \frac{\pi}{2d_2} \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) f_p(d_1) \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2} +$$

$$+ \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{d_1^3}{k^2\pi^3} \left(1 - \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \right) \right\}. \quad (6.6)$$

$$Y_z(x, y) =$$

$$= \frac{\pi}{2d_2} \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) f_p(d_1) \sin \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} -$$

$$- \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - d_2) - \right.$$

$$\left. - (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{d_1^3}{k^2\pi^3} \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \right\}. \quad (6.7)$$

В области ОАМН (фиг. 2) касательные напряжения, кроме формул (6.6) и (6.7), могут определяться также и значениями:

$$\begin{aligned}
 X_z(x, y) = & \frac{P}{2I} (b_1^2 - x^2) + \frac{\pi}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} p V_p(d_1) \cos \frac{p\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi d_2}{d_1} - \\
 & - \frac{\pi}{2d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \left\{ (2k-1) B_k \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - \right. \right. \\
 & - \left. \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (d_1 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \\
 & + (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{\pi} \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - \right. \\
 & - \left. \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (y - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] - \\
 & - (-1)^k \frac{P}{I} \frac{\nu}{1 + \nu(2k-1)^2 \pi^2} \left[1 - \right. \\
 & \left. - \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right] \Bigg\}, \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_z(x, y) = & - \frac{\pi}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} p V_p(d_1) \sin \frac{p\pi y}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi d_2}{d_1} + \\
 & + \frac{\pi}{2d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \left\{ (2k-1) B_k \left[\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - \right. \right. \\
 & - \left. \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (d_1 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \\
 & + (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{\pi} \left[\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} + \right. \\
 & + \left. \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (y - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \\
 & + (-1)^k \frac{P}{I} \frac{\nu}{1 + \nu(2k-1)^2 \pi^2} \left[y - \right. \\
 & \left. - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right] \Bigg\}. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

В формулах (6.2), (6.9) величины N_k , B_k , $V_p(d_2)$ и $f_p(d_1)$ определены соотношениями (4.9)–(4.12).

Все эти величины выражаются через коэффициенты S_k и R_k , последние же определяются из вполне регулярной бесконечной системы линейных уравнений (4.18).

Формулами (6.2)–(6.9) определяются касательные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня.

Наибольшее значение касательное напряжение получает на боковых сторонах сечения в серединных точках сторон (в точках) $[0, b_2]$ и $[0, -b_2]$.

Напряжение в точке $(0, b_2)$ будет

$$X_z(0, b_2) = \frac{P}{2I} \frac{1}{1+\nu} d_2^2 - \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left\{ \frac{8}{3} d_1 d_2 S_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b_1}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{8d_2^2 b_2}{(2k-1)^2 \pi^3} \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right\}. \quad (6.10)$$

С удалением от точки $(0, b_2)$ напряжение X_z уменьшается по величине и в точках (d_2, b_2) и $(-d_2, b_2)$ обращается в нуль.

Заметим, что горизонтальный компонент касательного напряжения $\{Y_z\}$ на боковых сторонах сечения равен нулю:

$$Y_z(x, \pm b_2) = 0.$$

У входящих углов сечения касательные напряжения становятся бесконечно большими, ибо в этих случаях значения напряжений за-

висят от значений рядов $\sum_{k=1}^{\infty} R_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$, которые, согласно (4.13)–(4.17), расходятся.

На горизонтальных сторонах сечения касательные напряжения будут

$$X_z(b_1, y) = 0$$

$$Y_z(b_1, y) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ d_2 \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b_1}{d_1} R_k - \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{d_1^2}{k^2 \pi^3} \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{d_1} \right\}. \quad (6.11)$$

Подставив в (6.6) и (6.7) $d_1 = b_2 = b$, $b_1 = d_2 = a$ и, учитывая, что для этого случая $f_p(d_1)|_{d_1=b_2} = 0$, для напряжений при изгибе призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением получим:

$$X_z(x, y) = \frac{P}{2I} (a^2 - x^2) + \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2b^2}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{12} \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{b} \cos \frac{k\pi y}{b} \right\}, \quad (6.12)$$

$$Y_z(x, y) = \frac{P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{2b^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{b} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6.13)$$

При этом использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \frac{k\pi y}{b} = \frac{\pi^2}{12} \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (6.14)$$

Напряжения (6.12) и (6.13) для стержня с прямоугольным поперечным сечением приводятся в курсах теории упругости [6].

Сектор математики
и механики Академии
наук Армянской ССР

Поступило 3 I 1951

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х.—Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН Армянской ССР, том IX, № 2, 1948.
2. Арутюнян Н. Х.—Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, том XIII, № 1, 1949.
3. Тимошенко С. П.—Теория упругости. ОНТИ. ГТТИ, 1934.
4. Гринберг Г. А.—Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
5. Канторович Л. В. и Крылов В. И.—Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1949.
6. Папкович П. Ф.—Теория упругости. Оборонгиз, 1939.

Բ. Ա. Աբրահամյան

ԽԱՁԱՁԵՎ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾԲ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՁՈՂԵՐԻ ԾՈՌԻՄԸ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ բերված է Սեն-Վենանի խնդրի ճիշտ լուծումը խաչաձև հատվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողերի ծաման վերաբերյալ:

Խնդրի լուծման ընթացքում օգտագործված է Ն. Ս. Հարությունյանի օժանդակ ֆունկցիաներ մտցնելու եղանակը, որի միջոցով մասնակի ամանյալներով դիֆֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերված է հաստատուն դործակիցներով զծային երկրորդ կարգի դիֆֆերենցիալ հավասարումների լուծման, իսկ ինտեգրման հաստատունների որոշումը՝ լիովին բեզուլյար զծային անվերջ հավասարումների սխեմի լուծման:

Խնդրի լուծումը տրված է ընդհանուր հանրահաշվական ձևով՝ կախված հատվածքի երկրաչափական պարամետրներից: