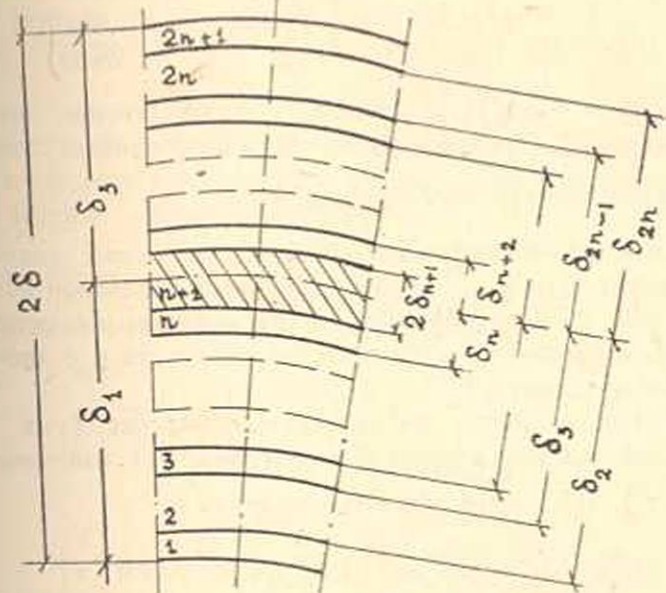


СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян

Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев

1. Рассмотрим многослойную тонкую цилиндрическую оболочку, построенную из нечетного числа однородных анизотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки. Эта поверхность одновременно является срединной поверхностью среднего слоя (фиг. 1.).



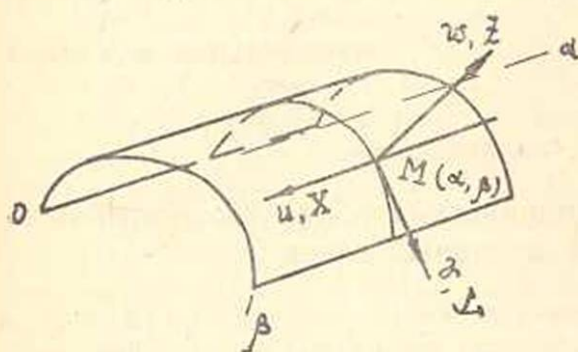
Фиг. 1.

Считаем, что материал каждого слоя подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности оболочки [1].

Предполагается также, что все слои при деформировании остаются упругими и работают совместно, т. е. скольжения слоев по поверхностям контакта не возможны.

Положение точек на срединной поверхности цилиндрической оболочки будем определять координатами: α — вдоль образующей, и β — по дуге поперечного сечения срединной поверхности (фиг. 2).

Коэффициенты первой квадратичной формы в этой системе координат имеют следующие значения: $A=B=1$, т. е. срединная поверхность цилиндрической оболочки имеет метрику плоскости.



Фиг. 2.

2. Формулы, характеризующие деформации и изменения кривизны срединной поверхности анизотропной оболочки, не отличаются от соответствующих формул изотропной оболочки, и в случае пологой цилиндрической оболочки имеют вид [2]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + \kappa w, & \omega &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ z_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, & z_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, & \tau &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta},\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$, $w = w(\alpha, \beta)$ — соответственно тангенциальные и нормальные перемещения точки (α, β) срединной поверхности,

$\kappa = \frac{1}{R}$ — кривизна срединной поверхности.

Для слоистой анизотропной оболочки в целом считаем справедливой гипотезу о том, что нормальный к срединной поверхности прямолинейный элемент оболочки, после деформации, остается прямолинейным, нормальным к срединной поверхности и сохраняет свою первоначальную длину [2].

В силу этой гипотезы, из обобщенного закона Гука в случае наличия одной плоскости упругой симметрии, для напряжений

σ_α^m , σ_β^m и $\tau_{\alpha\beta}^m$, m -го слоя оболочки получим:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^m &= B_{11}^m \varepsilon_1 + B_{12}^m \varepsilon_2 + B_{16}^m \omega + \gamma (B_{11}^m z_1 + B_{12}^m z_2 + B_{16}^m \tau) \\ \sigma_\beta^m &= B_{12}^m \varepsilon_1 + B_{22}^m \varepsilon_2 + B_{26}^m \omega + \gamma (B_{12}^m z_1 + B_{22}^m z_2 + B_{26}^m \tau) \\ \tau_{\alpha\beta}^m &= B_{16}^m \varepsilon_1 + B_{26}^m \varepsilon_2 + B_{66}^m \omega + \gamma (B_{16}^m z_1 + B_{26}^m z_2 + B_{66}^m \tau),\end{aligned}\quad (2.2)$$

где аналогично тому, что у С. Г. Лехницкого [1]:

$$B_{ik}^m = \frac{A_{ik}^m A_{33}^m - A_{i3}^m A_{k3}^m}{A_{33}^m} \quad (i, k = 1, 2, 6) \quad (2.3)$$

Здесь A_{ik}^m являются упругими постоянными. Общее число независимых упругих постоянных равно 13. В силу симметрии матрицы

коэффициентов обобщенного закона Гука $A_{ik}^m = A_{ki}^m$.

Остальные три составляющие тензора напряжений определяем из условий равновесия дифференциального элемента m -го слоя оболочки [2].

Ограничиваясь точностью формул (2.1) для напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^m$ и $\tau_{\beta\gamma}^m$, получим:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\gamma}^m &= - \int \left[\frac{\partial \sigma_{\alpha}^m}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial \beta} \right] d\gamma + \varphi_m(\alpha, \beta) \\ \tau_{\beta\gamma}^m &= - \int \left[\frac{\partial \sigma_{\beta}^m}{\partial \beta} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial \alpha} \right] d\gamma + \psi_m(\alpha, \beta),\end{aligned}\quad (2.4)$$

где $\varphi_m(\alpha, \beta)$ и $\psi_m(\alpha, \beta)$ — функции, появившиеся в силу интегрирования по γ . Функции φ_m и ψ_m определяем как в слоистых пластинках [3], т. е. из условий на поверхностях контакта смежных слоев и на внешних поверхностях оболочки (фиг. 1).

а) На верхней поверхности $\gamma = \delta$

$$\tau_{\alpha\gamma}^{2n+1} = X, \quad \tau_{\beta\gamma}^{2n+1} = Y, \quad (2.5)$$

где $X(\alpha, \beta)$ и $Y(\alpha, \beta)$ являются тангенциальными составляющими интенсивности внешней нагрузки, δ — половина толщины оболочки.

б) на нижней поверхности $\gamma = -\delta$

$$\tau_{\alpha\gamma}^1 = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}^1 = 0. \quad (2.6)$$

в) на поверхностях контакта смежных слоев:

при $\gamma = \delta \quad m = (n+1), (n+2), \dots, 2n,$

при $\gamma = -\delta \quad m = 2, 3, 4, \dots, (n+1),$

$$u_m = u_{m-1}, \quad v_m = v_{m-1}, \quad (2.7)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}^m = \tau_{\alpha\gamma}^{m-1}, \quad \tau_{\beta\gamma}^m = \tau_{\beta\gamma}^{m-1}. \quad (2.8)$$

В силу того, что основная гипотеза дана для всего пакета оболочки в целом, условия контакта (2.7) выполняются автоматически.

Подставляя значения напряжений σ_{α}^m , σ_{β}^m и $\tau_{\alpha\beta}^m$ из (2.2) в (2.4), и учитывая (2.1), (2.5), (2.6) и (2.8), для касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^m$ и $\tau_{\beta\gamma}^m$, получим [4]:

для слоев от внутреннего (1-го) до среднего $(n+1)$ -го включительно, т. е. для $m = 1, 2, 3, \dots, (n+1)$

$$\tau_{\alpha\gamma}^m = \frac{\gamma^2}{2} E(B_{ik}^m) w - \gamma [P_\alpha(B_{ik}^m) u + Q_{\alpha\beta}(B_{ik}^m) v + R_\alpha(B_{ik}^m) w] - \\ - \frac{\delta^2}{2} E(g_{ik}^m) w - \delta [P_\alpha(t_{ik}^m) u + Q_{\alpha\beta}(t_{ik}^m) v + R_\alpha(t_{ik}^m) w], \quad (2.9)$$

$$\tau_{\beta\gamma}^m = \frac{\gamma^2}{2} F(B_{ik}^m) w - \gamma [P_\beta(B_{ik}^m) v + Q_{\alpha\beta}(B_{ik}^m) u + R_\beta(B_{ik}^m) w] - \\ - \frac{\delta^2}{2} F(g_{ik}^m) w - \delta [P_\beta(t_{ik}^m) v + Q_{\alpha\beta}(t_{ik}^m) u + R_\beta(t_{ik}^m) w]. \quad (2.10)$$

Для слоев от наружного $(2n+1)$ -го до среднего $(n+1)$ -го включительно, т. е. для $m = (n+1), (n+2) \dots (2n+1)$

$$\tau_{\alpha\gamma}^m = \frac{\gamma^2}{2} E(B_{ik}^{2n+2-m}) w - \gamma [P_\alpha(B_{ik}^{2n+2-m}) u + Q_{\alpha\beta}(B_{ik}^{2n+2-m}) v + \\ + R_\alpha(B_{ik}^{2n+2-m}) w] - \frac{\delta^2}{2} E(g_{ik}^{2n+2-m}) w - \delta [P_\alpha(t_{ik}^{2n+2-m}) u + \\ + Q_{\alpha\beta}(t_{ik}^{2n+2-m}) v + R_\alpha(t_{ik}^{2n+2-m}) w] + X, \quad (2.11)$$

$$\tau_{\beta\gamma}^m = \frac{\gamma^2}{2} F(B_{ik}^{2n+2-m}) w - \gamma [P_\beta(B_{ik}^{2n+2-m}) v + Q_{\alpha\beta}(B_{ik}^{2n+2-m}) u + \\ + R_\beta(B_{ik}^{2n+2-m}) w] - \frac{\delta^2}{2} F(g_{ik}^{2n+2-m}) w - \delta [P_\beta(t_{ik}^{2n+2-m}) v + \\ + Q_{\alpha\beta}(t_{ik}^{2n+2-m}) u + R_\beta(t_{ik}^{2n+2-m}) w] + Y. \quad (2.12)$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$P_\alpha(b_{ik}) = b_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2b_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\ Q_{\alpha\beta}(b_{ik}) = b_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + b_{26} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad (2.13)$$

$$P_\beta(b_{ik}) = b_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2b_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \\ R_\alpha(b_{ik}) = \left[b_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} + b_{26} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \kappa, \\ R_\beta(b_{ik}) = \left[b_{22} \frac{\partial}{\partial \beta} + b_{26} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \kappa. \quad (2.14)$$

$$E(b_{ik}) = b_{11} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + 3b_{16} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + b_{26} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3}, \quad (2.15)$$

$$F(b_{ik}) = b_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + 3b_{26} \frac{\partial^3}{\partial \beta^2 \partial \alpha} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + b_{16} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}. \quad (2.16)$$

Коэффициентами линейных операторов служат:

$$t_{ik}^m = \frac{1}{\delta} \left[\delta_m B_{ik}^m + \sum_{s=1}^{m-1} B_{ik}^s (\delta_s - \delta_{s+1}) \right], \quad t_{ik}^1 = B_{ik}^1 \quad (2.17)$$

$$g_{ik}^m = \frac{1}{\delta^2} \left[\delta_m^2 B_{ik}^m + \sum_{s=1}^{m-1} B_{ik}^s (\delta_s^2 - \delta_{s+1}^2) \right], \quad g_{ik}^1 = B_{ik}^1 \quad (2.18)$$

где $m = 2, 3, 4 \dots (n+1)$.

3. Напряжения в каждом слое оболочки вызывают внутренние, статически эквивалентные им обобщенные усилия [2, 4, 5]:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (c_{11} u + c_{16} v) + \frac{\partial}{\partial \beta} (c_{12} v + c_{16} u) + c_{17} k w, \\ T_2 &= \frac{\partial}{\partial \beta} (c_{22} v + c_{26} u) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (c_{12} u + c_{26} v) + c_{22} k w, \\ S &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (c_{16} u + c_{66} v) + \frac{\partial}{\partial \beta} (c_{26} v + c_{66} u) + c_{26} k w. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Изгибающие и крутящий моменты:

$$\begin{aligned} G_1 &= D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ G_2 &= D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ H &= - \left(2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поперечные силы:

$$N_1 = -E(D_{ik}) w, \quad N_2 = -F(D_{ik}) w, \quad (3.3)$$

где $E(D_{ik})$ и $F(D_{ik})$ — вышеприведенные линейные операторы третьего порядка.

Здесь и в дальнейшем коэффициенты c_{ik} и D_{ik} являются соответственно жесткостями растяжения (сжатия) и изгиба. Их можно определить посредством следующих формул [4,5]:

$$c_{ik} = 2 \left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m - \delta_{m+1}) \right] \quad (3.4)$$

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1}^3 + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right]. \quad (3.5)$$

4. Из общих уравнений статики [2], после некоторых преобразований, для пологой цилиндрической оболочки получим следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} + X = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} + Y = 0$$

$$kT_2 + L(D_{ik})w - Z = 0, \quad (4.1)$$

где $L(D_{ik})$ — линейный оператор четвертого порядка:

$$L(D_{ik}) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} +$$

$$+ 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}. \quad (4.2)$$

Как четвертое уравнение системы (4.1) может служить уравнение неразрывности [2,6], которое для анизотропной слоистой цилиндрической оболочки имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (a_{11}T_2 - a_{12}T_1 - a_{16}S) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (a_{66}S - a_{26}T_1 - a_{16}T_2) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (a_{22}T_1 - a_{12}T_2 - a_{26}S) - k \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (4.3)$$

где

$$a_{11} = \frac{c_{11}c_{66} - c_{16}^2}{c_{66}\Omega}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}c_{66} - c_{26}^2}{c_{66}\Omega},$$

$$a_{16} = \frac{c_{11}c_{26} - c_{12}c_{16}}{c_{66}\Omega}, \quad a_{26} = \frac{c_{22}c_{16} - c_{12}c_{26}}{c_{66}\Omega},$$

$$a_{12} = \frac{c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26}}{c_{66}\Omega}, \quad a_{66} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{66}\Omega}. \quad (4.4)$$

Здесь

$$\Omega = c_{66}^2 \left[(c_{11}c_{66} - c_{16}^2)(c_{22}c_{66} - c_{26}^2) - (c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26})^2 \right]. \quad (4.5)$$

5. Пусть искомыми будут составляющие перемещения $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ и $w(\alpha, \beta)$, через которые посредством формул (3.1) — (3.3) выражены все внутренние усилия.

Подставляя значения T_1 , T_2 и S из (3.1) в (4.1), получим полную систему дифференциальных уравнений (5.1) относительно трех основных искомого u , v , w :

$$P_\alpha(c_{ik})u + Q_{\alpha\beta}(c_{ik})v + R_\alpha(c_{ik})w + X = 0,$$

$$P_\beta(c_{ik})v + Q_{\alpha\beta}(c_{ik})u + R_\beta(c_{ik})w + Y = 0, \quad (5.1)$$

$$R_\alpha(c_{ik})u + R_\beta(c_{ik})v + L(D_{ik})w + c_{22}k^2w - Z = 0.$$

Система (5.1) является разрешающей, т. к. имея решение этой системы, при заданных граничных условиях можно определить все

внутренние усилия цилиндрической анизотропной и слоистой оболочки при произвольном нагружении.

Наряду с внутренними усилиями существенный интерес представляют напряжения σ_α^m , σ_β^m и $\tau_{\alpha\beta}^m$ в каждом слое оболочки. Последнее определяем посредством следующих формул:

$$\sigma_\alpha^m = B_{11}^m \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{12}^m \frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{16}^m \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + B_{12}^m \kappa w - \gamma \left(B_{11}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2B_{16}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \quad (5.2)$$

$$\sigma_\beta^m = B_{22}^m \frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{12}^m \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{26}^m \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + B_{22}^m \kappa w - \gamma \left(B_{22}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2B_{26}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \quad (5.3)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m = B_{16}^m \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{26}^m \frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{66}^m \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + B_{26}^m \kappa w - \gamma \left(B_{16}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{26}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2B_{66}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right). \quad (5.4)$$

Определенный интерес представляет случай, когда $X=Y=0$, т. е. случай наличия лишь поверхностной нормальной нагрузки $Z \neq 0$.

В этом случае, полагая:

$$w = L_1(a_{ik}) \Phi, \quad (5.5)$$

$$u = \kappa \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \Phi, \quad (5.6)$$

$$v = -\kappa \frac{\partial}{\partial \beta} \left[a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (a_{66} - a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2a_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \Phi - a_{16} \kappa \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \Phi, \quad (5.7)$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям системы (5.1). При этом третье уравнение принимает следующий вид:

$$L_1(a_{ik}) L(D_{ik}) \Phi + \kappa^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = Z. \quad (5.8)$$

Это разрешающее уравнение восьмого порядка является развитием разрешающего уравнения В. З. Власова [2], данное для изотропной цилиндрической оболочки. Это же уравнение можно было бы получить, воспользовавшись смешанным методом В. З. Власова [2, 7, 8].

В формулу (5.5) и в уравнение (5.8) входит новый линейный оператор четвертого порядка, который имеет следующий вид:

$$L_1(a_{ik}) = a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}. \quad (5.9)$$

Подставляя значения $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ и $w(\alpha, \beta)$ из (5.5), (5.6) и (5.7) в формулы (3.1), для тангенциальных сил получим:

$$T_1 = \kappa \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, \quad T_2 = \kappa \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}, \quad S = -\kappa \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}. \quad (5.10)$$

Подставляя значение $w(\alpha, \beta)$ из (5.5) в (3.2) и (3.3), для моментов и поперечных сил получим;

$$\begin{aligned} G_1 &= \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \\ G_2 &= \left(D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \\ H &= - \left(2D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + D_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$N_1 = -E(D_{ik}) [L_1(a_{ik})] \Phi, \quad N_2 = -F(D_{ik}) [L_1(a_{ik})] \Phi. \quad (5.12)$$

Напряжения в каждом слое определяем посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} \sigma_x^m &= \left[\left(-a_{12} B_{11}^m + a_{11} B_{22}^m - a_{16} B_{26}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left(a_{22} B_{11}^m - a_{12} B_{12}^m - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{26} B_{16}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left(a_{26} B_{11}^m + a_{16} B_{12}^m - a_{66} B_{16}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ &\quad - \gamma \left(B_{11}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2B_{16}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^m &= \left[\left(-a_{12} B_{12}^m + a_{11} B_{22}^m - a_{16} B_{26}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left(a_{22} B_{12}^m - a_{12} B_{22}^m - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{26} B_{26}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left(a_{26} B_{12}^m + a_{16} B_{22}^m - a_{66} B_{26}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ &\quad - \gamma \left(B_{12}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2B_{26}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^m &= \left[\left(-a_{12} B_{16}^m + a_{11} B_{26}^m - a_{16} B_{66}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left(a_{22} B_{16}^m - a_{12} B_{26}^m - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{26} B_{66}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left(a_{26} B_{16}^m + a_{16} B_{26}^m - a_{66} B_{66}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ &\quad - \gamma \left(B_{16}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{26}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2B_{66}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}^m = \left[\frac{\gamma^2}{2} E(B_{ik}^m) - \frac{\delta^2}{2} E(g_{ik}^m) \right] L_1(a_{ik}) \Phi, \quad (5.16)$$

$$\tau_{\beta\gamma}^m = \left[\frac{\gamma^2}{2} F(B_{ik}^m) - \frac{\delta^2}{2} F(g_{ik}^m) \right] L_1(a_{ik}) \Phi. \quad (5.17)$$

Формулы касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^m$ и $\tau_{\beta\gamma}^m$ не отличаются от аналогичных формул С. Г. Лехницкого [3,9], данные для анизотропной слоистой пластинки. Это совпадение объясняется наличием исходных предпосылок (2.1).

Рассматривая формулы (5.8)–(5.17), заключаем, что задача расчета пологой анизотропной слоистой цилиндрической оболочки, при действии лишь нормально приложенной нагрузки, сводится к разысканию скалярной функции $\Phi(\alpha, \beta)$, т. е. к решению разрешающего дифференциального уравнения (5.8) при заданных граничных условиях.

6. В инженерной практике широко применяются слоистые оболочки, составленные из ортотропных слоев, т. е. из слоев, материал которых имеет три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии.

Пусть одна из плоскостей упругой симметрии каждого слоя будет параллельна срединной поверхности оболочки, а остальные две — перпендикулярны к координатным линиям

$$\alpha = \text{Const}, \quad \beta = \text{Const}.$$

Тогда для коэффициентов B_{ik}^m будем иметь:

$$\begin{aligned} B_{11}^m &= \frac{E_1^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m}, \quad B_{22}^m = \frac{E_2^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m}, \quad B_{\alpha\alpha}^m = G_{12}^m, \\ B_{12}^m &= \frac{\mu_1^m \mu_2^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{\mu_2^m E_1^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m}, \quad B_{10}^m = B_{20}^m = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь $E_1^m = E_\alpha^m$ и $E_2^m = E_\beta^m$ — модули упругости соответственно вдоль главных направлений, $\beta = \text{Const}$, $\alpha = \text{Const}$, $\mu_{12}^m = \mu_{\alpha\beta}^m$ и $\mu_{21}^m = \mu_{\beta\alpha}^m$ — коэффициенты Пуассона (первый индекс показывает направление действия силы), $G_{12}^m = G_{\alpha\beta}^m$ — модули сдвига.

В силу (6.1), на основании (3.4) и (3.5), получим:

$$c_{16} = c_{26} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0. \quad (6.2)$$

Разрешающее уравнение (5.8) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_1 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^8} + P_3 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + P_5 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + P_4 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + P_2 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \beta^8} + \\ + \kappa^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = Z, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $P_1 = a_{11} D_{11}$, $P_3 = [D_{11}(a_{66} - 2a_{12}) + 2a_{11}(D_{12} + 2D_{66})]$,

$P_2 = a_{22} D_{22}$, $P_4 = [D_{22}(a_{66} - 2a_{12}) + 2a_{22}(D_{12} + 2D_{66})]$,

$P_5 = a_{11} D_{22} + 2(a_{66} - 2a_{12})(D_{12} + 2D_{66}) + a_{22} D_{12}$. (6.4)

Для внутренних тангенциальных сил имеем те же формулы (5.10).

Для моментов и поперечных сил получим:

$$G_1 = \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \quad (6.5)$$

$$G_2 = \left(D_{21} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi.$$

$$H = -2D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_1(a_{ik}) \Phi. \quad (6.6)$$

$$N_1 = - \left[D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha} L_1(a_{ik}) \Phi,$$

$$N_2 = - \left[D_{21} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \frac{\partial}{\partial \beta} L_1(a_{ik}) \Phi. \quad (6.7)$$

Для напряжений в каждом слое оболочки получим:

$$\sigma_{\alpha}^m = \left[(a_{11}B_{12}^m - a_{12}B_{11}^m) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (a_{22}B_{11}^m - a_{12}B_{12}^m) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ - \gamma \left(B_{11}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \quad (6.8)$$

$$\sigma_{\beta}^m = \left[(a_{22}B_{12}^m - a_{12}B_{22}^m) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (a_{11}B_{22}^m - a_{12}B_{12}^m) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ - \gamma \left(B_{22}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \quad (6.9)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m = -\kappa a_{66} B_{66}^m \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - 2\gamma B_{66}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_1(a_{ik}) \Phi. \quad (6.10)$$

Формулы (5.16) и (5.17) касательных напряжений внешне остаются без изменений.

Линейные операторы, входящие в эти формулы, примут следующий упрощенный вид:

$$L_1(a_{ik}) = a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad (6.11)$$

$$L(D_{ik}) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad (6.12)$$

$$E(b_{ik}) = b_{11} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \quad (6.13)$$

$$F(b_{ik}) = b_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta}. \quad (6.14)$$

В этом случае упрощаются также формулы перемещений:

$$w = L_1(a_{ik})\Phi, \quad (6.15)$$

$$u = k \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \Phi, \quad (6.16)$$

$$v = -k \frac{\partial}{\partial \beta} \left[a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (a_{66} - a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \Phi. \quad (6.17)$$

7. Пусть пологая цилиндрическая оболочка, перекрывающая прямоугольный план ($a \times b$) несет сосредоточенную силу Q , приложенную в произвольной точке ($\alpha = x$, $\beta = y$).

Если Θ — центральный угол поперечного сечения оболочки, то длина дуги этого сечения $b = \frac{\pi R}{180} \Theta$.

Пусть оболочка на всех четырех краях $\alpha = 0$, $\alpha = a$, $\beta = 0$ и $\beta = b$ имеет радиальное шарнирно подвижное закрепление. Это значит, что мы должны искать решение дифференциального уравнения (6.3), удовлетворяющее следующим граничным условиям [2]:

$$w = 0, \quad v = 0, \quad G_1 = 0, \quad T_1 = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \quad \alpha = a \quad (7.1)$$

$$w = 0, \quad u = 0, \quad G_2 = 0, \quad T_2 = 0 \quad \text{при } \beta = 0, \quad \beta = b$$

Таким решением уравнения (6.3) является:

$$\Phi = \frac{4Q}{ab} \frac{a^8}{\pi^8} \sum_i \sum_k \frac{1}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (7.2)$$

где введено обозначение

$$\Delta_{Qik} = P_1 i^8 + P_2 \lambda^2 i^6 k^2 + P_3 \lambda^4 i^4 k^4 + P_4 \lambda^6 i^2 k^6 + P_5 \lambda^8 k^8 + \frac{i^4 a^4}{R^2 \pi^4}. \quad (7.3)$$

Здесь и в дальнейшем $\lambda = \frac{a}{b}$.

Имея значение искомой функции $\Phi(\alpha, \beta)$, посредством ранее приведенных формул найдем расчетные формулы оболочки:

$$w = \frac{4Q\lambda a^2}{\pi^4} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (7.4)$$

$$\text{где } \Delta_{aik} = a_{11} i^4 + (a_{66} - 2a_{12}) \lambda^2 i^2 k^2 + a_{22} \lambda^4 k^4. \quad (7.5)$$

Для напряжений получим:

$$\sigma_{\alpha}^m = \frac{4Q\lambda a^2}{\pi^4 R} \sum_i \sum_k \frac{[(a_{11} B_{12}^m - a_{12} B_{11}^m) i^4 + (a_{22} B_{11}^m - a_{12} B_{12}^m) \lambda^2 i^2 k^2]}{\Delta_{Qik}} \times$$

$$\times \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} +$$

$$+ \gamma \frac{4Q\lambda}{\pi^2} \sum_{i,k} \frac{(B_{11}^m i^2 + B_{12}^m \lambda^2 k^2) \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}, \quad (7.6)$$

$$\sigma_{\beta}^m = \frac{4Q\lambda a^2}{\pi^4 R} \sum_{i,k} \frac{[(a_{22} B_{12}^m - a_{12} B_{22}^m) \lambda^2 i^2 k^2 + (a_{11} B_{22}^m - a_{12} B_{12}^m) i^4]}{\Delta_{Qik}} \times$$

$$\times \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} +$$

$$+ \gamma \frac{4Q\lambda}{\pi^2} \sum_{i,k} \frac{(B_{22}^m \lambda^2 k^2 + B_{12}^m i^2) \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}, \quad (7.7)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m = \frac{4Q\lambda^2 a^2}{\pi^4 R} a_{66} B_{66}^m \sum_{i,k} \frac{i^3 k}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} \cos \frac{i\pi z}{a} \cos \frac{i\pi \beta}{b} -$$

$$- 2\gamma \frac{4Q\lambda^2}{\pi^2} B_{66}^m \sum_{i,k} \frac{i k \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} \cos \frac{i\pi z}{a} \cos \frac{k\pi \beta}{b}, \quad (7.8)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}^m = - \frac{4Q}{\pi b} \sum_{i,k} \left\{ \frac{\left[\frac{\gamma^2}{2} (B_{12}^m + 2B_{66}^m) - \frac{\delta^2}{2} (g_{12}^m + 2g_{66}^m) \right] \lambda^2 i^2 k^2 \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{\gamma^2}{2} B_{11}^m - \frac{\delta^2}{2} g_{11}^m \right) i^3 \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \right\} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \cos \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}, \quad (7.9)$$

$$\tau_{\beta\gamma}^m = - \frac{4Q}{\pi b} \sum_{i,k} \left\{ \frac{\left[\frac{\gamma^2}{2} (B_{12}^m + 2B_{66}^m) - \frac{\delta^2}{2} (g_{12}^m + 2g_{66}^m) \right] \lambda i^2 k}{\Delta_{Qik}} \Delta_{aik} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{\gamma^2}{2} B_{22}^m - \frac{\delta^2}{2} g_{22}^m \right) \lambda^3 k^3 \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \right\} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \cos \frac{k\pi \beta}{b}. \quad (7.10)$$

8. В качестве численного примера рассмотрим трехслойную фанерную оболочку, характерные размеры срединной поверхности которой суть: $a = b = 50$ см, $R = 150$ см.

Пусть оболочка состоит из двух продольных (наружных) и одного поперечного слоев (фиг. 3). Общая толщина фанеры $h = 3,0$ мм, толщина каждого слоя $\delta_0 = 1,0$ мм.

Расчетные толщины $\delta_1 = \delta_2 = 1,5 \text{ мм}$, $\delta_3 = 0,5 \text{ мм}$.

Упругие характеристики каждого слоя приведены в нижеследующей таблице:

	$E_1^m \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$	E_2^m	G_{12}^m	μ_{12}^m	μ_{21}^m
I и III слой	120000	6000	4800	0,6	0,03
II слой	6000	120000	4800	0,03	0,6

На основании приведенных данных, из (3.4) и (3.5) для жесткостей получим:

$$c_{11} = 25000 \text{ кг/см},$$

$$c_{22} = 13400 \text{ кг/см},$$

$$c_{66} = 1400 \text{ кг/см},$$

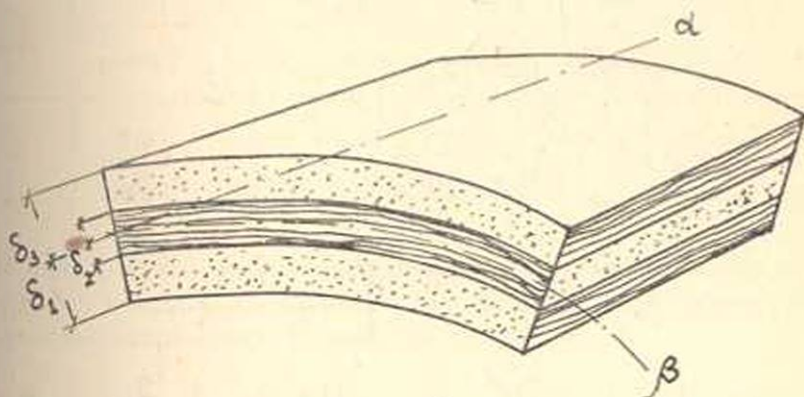
$$c_{13} = 1100 \text{ кг/см},$$

$$D_{11} = 260 \text{ кг/см},$$

$$D_{22} = 23 \text{ кг/см},$$

$$D_{66} = 11 \text{ кг/см},$$

$$D_{13} = 8 \text{ кг/см}.$$



Фиг. 3.

Для подсчета напряжений в каждом слое оболочки необходимы значения B_{ik}^m и g_{ik}^m ; их определяем с помощью формул (6.1) и (2.18). Результаты подсчетов помещены в нижеприведенных таблицах:

	$B_{11}^m \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$	B_{22}^m	B_{12}^m	B_{66}^m
I и II слой	120000	6000	3600	4800
III слой	6000	120000	3600	4800

	$g_{11}^m \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$	g_{22}^m	g_{12}^m	g_{66}^m
I и II слой	120000	6000	3600	4800
III слой	107000	18700	3600	4800

Пусть внешняя нагрузка распределена по поверхности оболочки согласно закону:

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}.$$

В этом случае расчетные формулы получим, если Q заменим через $q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy$ и полученные выражения проинтегрируем по всей поверхности оболочки.

После соответствующих преобразований для расчетных величин получим:

$$\begin{aligned} w &= q_0 \frac{a^4 \Delta_{a11}}{\pi^4 \Delta_{Q11}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}, \\ \sigma_x^m &= \left[q_0 \frac{a^4}{\pi^4 R} \frac{(a_{11} B_{12}^m - a_{12} B_{11}^m) + (a_{22} B_{11}^m - a_{12} B_{12}^m) \lambda^2}{\Delta_{Q11}} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma q_0 \frac{a^2 (B_{11}^m + B_{12}^m \lambda^2) \Delta_{a11}}{\pi^2 \Delta_{Q11}} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}, \\ \sigma_\beta^m &= \left[q_0 \frac{a^4}{\pi^4 R} \frac{(a_{22} B_{12}^m - a_{12} B_{22}^m) \lambda^2 + (a_{11} B_{22}^m - a_{12} B_{12}^m)}{\Delta_{a11}} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma q_0 \frac{a^2 (B_{22}^m \lambda^2 + B_{12}^m) \Delta_{a11}}{\pi^2 \Delta_{Q11}} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}, \\ \tau_{x\beta}^m &= \left[q_0 \frac{a^4}{\pi^4} \frac{\lambda}{R} \frac{a_{66} B_{66}^m}{\Delta_{Q11}} - 2\gamma q_0 \frac{a^2 \lambda B_{66}^m \Delta_{a11}}{\pi^2 \Delta_{Q11}} \right] \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi \beta}{b}, \\ \tau_{x\gamma}^m &= -q \frac{a}{\pi} \frac{\Delta_{a11}}{\Delta_{Q11}} \left\{ \left[\frac{\gamma^2}{2} (B_{12}^m + 2B_{66}^m) - \frac{\partial^2}{\partial^2} (g_{12}^m + 2g_{66}^m) \right] \lambda^3 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\gamma^2}{2} B_{11}^m - \frac{\partial^2}{\partial^2} g_{11}^m \right) \right\} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi \beta}{b}, \\ \tau_{\beta\gamma}^m &= -q \frac{a}{\pi} \frac{\Delta_{a11}}{\Delta_{Q11}} \left\{ \left[\frac{\gamma^2}{2} (B_{12}^m + 2B_{66}^m) - \frac{\partial^2}{\partial^2} (g_{12}^m + 2g_{66}^m) \right] \lambda + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\gamma^2}{2} B_{66}^m - \frac{\partial^2}{\partial^2} g_{32}^m \right) \lambda^3 \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi \beta}{b}. \end{aligned}$$

На основании приведенных данных, учитывая (4.4) и (6.4), а также, что для рассматриваемого численного примера $\lambda = 1$, для основных расчетных величин получим:

прогиб центра $\left(\alpha = \frac{a}{2}, \beta = \frac{b}{2} \right)$ оболочки $w = 2,6 q_0$,

нормальные напряжения в каждом слое оболочки при

$$\alpha = \frac{a}{2}, \quad \beta = \frac{b}{2}$$

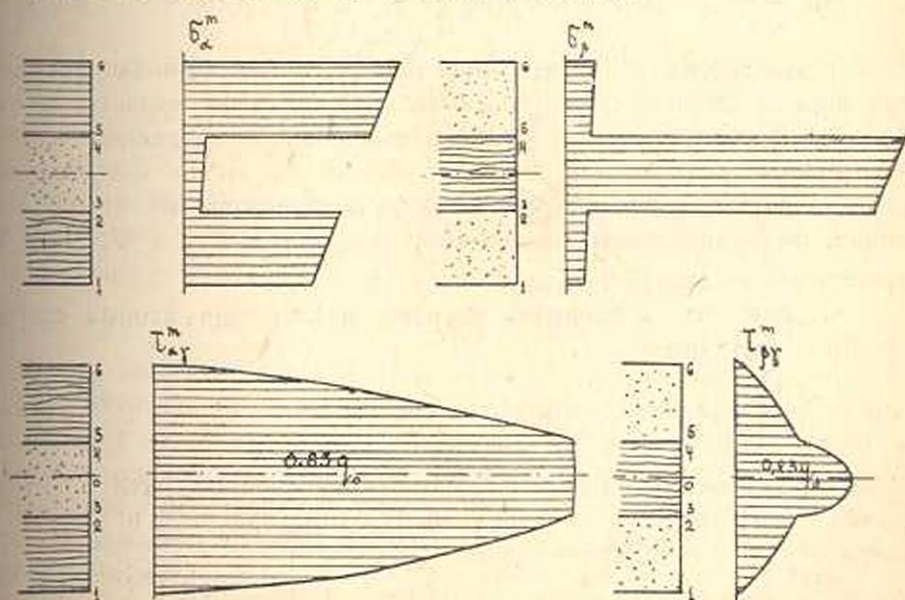
Напряжен.	I слой		II слой		III слой	
	точка 1	точка 2	точка 3	точка 4	точка 5	точка 6
σ_x^m	520,0 q_0	641,4 q_0	67,1 q_0	76,6 q_0	762,9 q_0	884,3 q_0
σ_y^m	70,2 q_0	79,6 q_0	1248,3 q_0	1367,7 q_0	89,1 q_0	98,5 q_0

максимальные касательные напряжения τ_{xy}^m в сечении $\left(\alpha=0, \beta=\frac{b}{2}\right)$

и τ_{xy}^m в сечении $\left(\alpha=\frac{a}{2}, \beta=0\right)$

Напряж.	I слой		II слой			III слой	
	точка 1	точка 2	точка 3	точка 0	точка 4	точка 5	точка 6
τ_{xy}^m	0,0	0,84 q_0	0,84 q_0	0,85 q_0	0,84 q_0	0,84 q_0	0,0
τ_{xy}^m	0,0	0,12 q_0	0,12 q_0	0,23 q_0	0,12 q_0	0,12 q_0	0,0

На фиг. 4 приведены эпюры вычисленных выше напряжений. Они наглядно показывают влияние слоистости и анизотропности на распределение напряжений по сечению оболочки.



Фиг. 4.

9. Выявим влияние анизотропности материала оболочки на прогиб центра оболочки при различных отношениях сторон.

Из предыдущей задачи для нормального перемещения имеем:

$$w_Q = \frac{4Qa^2\lambda}{\pi^4} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}$$

при сосредоточенной в точке (x, y) силе Q и

$$w_q = \frac{16qa^4}{\pi^6} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{aik}}{ik \Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}$$

при равномерно распределенной нагрузке q .

Выделяя из решения анизотропной оболочки решение прямоугольной изотропной пластинки со сторонами $a \times b$ и с произвольной жесткостью D , для прогибов окончательно получим [2,10]:

$$\begin{aligned} w_Q &= \frac{4Qa^2\lambda}{\pi^4 D} \sum_i \sum_k \frac{\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}}{(i^2 + \lambda^2 k^2)^2} - \\ &- \frac{4Qa^2\lambda}{\pi^4 D} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{Qik} - D(i^2 + \lambda^2 k^2)^2 \Delta_{aik}}{(i^2 + \lambda^2 k^2)^2 \Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}, \\ w_q &= \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \sum_i \sum_k \frac{1}{ik(i^2 + \lambda^2 k^2)^2} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} - \\ &- \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{Qik} - D(i^2 + \lambda^2 k^2)^2 \Delta_{aik}}{ik(i^2 + \lambda^2 k^2)^2 \Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}. \end{aligned}$$

Таким образом для прогибов получаем двучленную формулу, где первая двойная сумма со своим коэффициентом является прогибом произвольной точки (α, β) прямоугольной шарнирно опертой изотропной пластинки, а вторая сумма со своим коэффициентом представляет влияние упругих свойств и кривизны на прогиб оболочки. Значения первых составляющих формул W_Q и W_q берем из известных таблиц Б. Г. Галеркина [11].

Ограничиваясь первыми членами разложения вторых составляющих, получим:

$$\begin{aligned} w_Q &= \frac{Qa^2}{D} \left[\alpha_Q^r - \right. \\ &- \left. \frac{4\lambda}{\pi^4} \frac{\Delta_{Q_{11}} - D(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{a_{11}}}{(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{Q_{11}}} \right] \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}, \\ w_q &= \frac{qa^4}{D} \left[\alpha_q^r - \frac{16}{\pi^6} \frac{\Delta_{Q_{11}} - D(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{a_{11}}}{(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{Q_{11}}} \right] \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}. \end{aligned}$$

где α_Q^r и α_q^r — числовые коэффициенты из таблиц Б. Г. Галеркина,

D — цилиндрическая жесткость изотропной пластинки.

Рассмотрим однослойную анизотропную оболочку, геометрические размеры которой суть:

$$2\delta = h = 0,1 \text{ м}, \quad \frac{h}{R} = \frac{1}{50}, \quad \frac{b}{R} = 0,5.$$

Рассмотрим два случая комбинаций упругих постоянных:

	E_1	E_2	μ_{11}	μ_{21}	G_{12}	E_{12}
I случай	E	$0,05 E$	$0,6$	$0,03$	$0,04 E$	$0,03 E$
II случай	$0,05 E$	E	$0,03$	$0,6$	$0,04 E$	$0,03 E$

Для жесткостей получим:

I случай

$$c_{11} = 10 E, \quad c_{22} = 0,5 E, \quad c_{66} = 0,4 E, \quad c_{12} = 0,3 E, \\ D_{11} = 83,3 E, \quad D_{22} = 4,17 E, \quad D_{66} = 3,33 E, \quad D_{12} = 2,5 E.$$

II случай

$$c_{11} = 0,5 E, \quad c_{22} = 10 E, \quad c_{66} = 0,4 E, \\ c_{12} = 0,3 E, \quad D_{11} = 4,17 E, \quad D_{22} = 83,3 E, \\ D_{66} = 3,33 E, \quad D_{12} = 2,5 E.$$

В каждом случае рассматриваем три отношения между a и b :

$$\lambda = \frac{a}{b} = 0,5, \quad \lambda = 1,0, \quad \lambda = 1,5.$$

I случай $\lambda = 0,5$. На основании (4.4), (6.4), (7.3) и (7.5) получим:

$$\Delta_{Q_{11}} = 239,4, \quad \Delta_{a_{11}} = \frac{2,6}{E}.$$

Учитывая, что D можно подобрать произвольно, ищем его значение из условия, что вторые составляющие формул w_Q и w_q должны обращаться в нуль, т. е.

$$\Delta_{Q_{11}} - D(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{a_{11}} = 0.$$

Отсюда получим: $D = 58,9 E$. Таким образом мы получили жесткость эквивалентной изотропной пластинки, прогибы которой не отличаются от нормальных перемещений соответствующих точек рассматриваемой анизотропной оболочки.

Поступая аналогичным образом, получаем жесткости эквивалентных изотропных пластинок для всех трех значений λ в каждом рассматриваемом случае.

Жесткости приведенных пластинок

Случаи	$\lambda=0,5$	$\lambda=1,0$	$\lambda=1,5$
I	58,9 E	35,4 E	18,1 E
II	16,7 E	35,4 E	48,4 E

Пользуясь предыдущими результатами и таблицами Б. Г. Галеркина, для пригибов центров рассматриваемых анизотропных оболочек, получим:

Нагрузка равномерно распределенная ($q \text{ кг/см}^2$)

$$w_q = \alpha_q \frac{b^4 q}{E}$$

Случаи	λ	0,5	1,0	1,5
I	α_q	0,00001	0,00012	0,00046
II		0,00004	0,00012	0,00015

Сосредоточенная сила Q (кг) приложена в центре оболочки

$$w_Q = \alpha_Q \frac{b^2 Q}{E}$$

Случаи	λ	0,5	1,0	1,5
I	α_Q	0,00007	0,00033	0,00086
II		0,00025	0,00033	0,00034

Произведенные подсчеты показывают, что в анизотропных цилиндрических оболочках при малых λ , т. е. когда λ меньше единицы, целесообразнее иметь большие жесткости в продольном направлении оболочки, а при больших λ , т. е. когда λ больше единицы, целесообразнее большие жесткости иметь в поперечном направлении оболочки.

Институт стройматериалов
и сооружений Академии наук
Армянской ССР

Поступило 17 IX 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г.—Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
2. Власов В. З.—Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
3. Лехницкий С. Г.—Прикл. математ. и мех., т. V, вып. 1, 1941.
4. Амбарцумян С. А.—ДАН Армянской ССР, т. XIII, № 5, 1948.
5. Амбарцумян С. А.—ДАН Армянской ССР, т. XI, № 2, 1949.
6. Гольденвейзер А. Л.—Сборник «Пластины и оболочки». Госстройиздат, 1939.

7. Власов В. З.—Прикл. матем. и мех., т. VIII, вып. 2, 1944.
8. Амбарцумян С. А.—Прикл. матем. и мех., т. XII, вып. I, 1948.
9. Рабинович А. Л.—Труды Мин. авиапром. СССР, № 675, 1948.
10. Хачатурян Т. Т.—Сообщ. Ин-та математ. и мех. АН Армянской ССР, вып. 4, 1949.
11. Галеркин Б. Г.—Упругие тонкие плиты, Гостройиздат, 1934.

Ս. Ս. Համբարձումյան

ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԵՐԻՑ ՀԱՎԱՔՎԱԾ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ բերված են անիզոտրոպ շերտավոր գլանային թաղանթների հաշվման հիմնական հավասարումները և հաշվային բանաձևերը:

Ընդունվում է, որ յուրաքանչյուր շերտի նյութը ենթարկվում է հուկի բնահանրացած օրենքին և ամեն մի կետում ունի առաձգականության սիմետրիայի մեկ հարթություն, որը զուգահեռ է միջին մակերևույթին:

Որպես մասնավոր դեպք ուսումնասիրված են օրոտարոպ շերտերից կազմված գլանային թաղանթները:

Ելնելով տեսական հետազոտություններից բերված են ինժեներական երկու խնդիրների լուծումները: