ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտութ. III, № 7, 1950 Физмат. естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЯ

С. М. Дургарьян

К расчету железобетонных сферических оболочек по стадии разрушения

Рассмотрим в стадии разрушения сферическую железобетонную оболочку постоянной толщины δ с центральным углом 2α и радиусом R (рис. 1), находящуюся под действием симметричной нагрузки, соответствующей собственному весу q_0, отнесенному к единице площади серединной поверхности.

Края оболочки усилены кольцевой арматурой сечением F_a; ус-

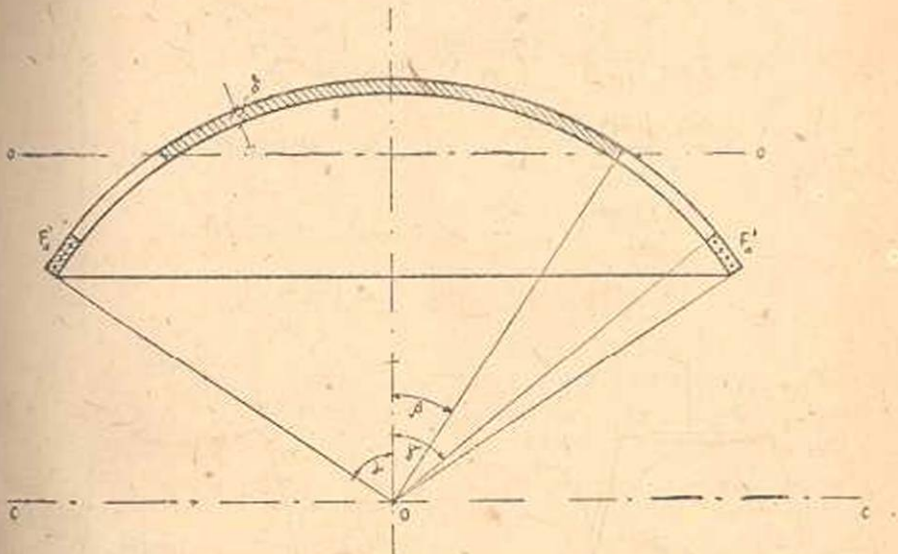

Рис. 1. Меридиональное сечение оболочки в стадии разрушения

ловия на опорах позволяют наличие только вертикальных опорных реакций.

Выделив из серединной поверхности сферы бесконечно малый четырехугольник, образуемый меридианами φ и $\varphi+d\varphi$ и параллелями θ и $\theta+d\theta$, рассмотрим условия его равновесия (рис. 2).

По сторонам выделенного четырехугольника на единицу длины будут действовать нормальные усилия T_1 и T_2, касательные усилия S_1 и S_2 и поперечные силы (направленные нормально к поверхности

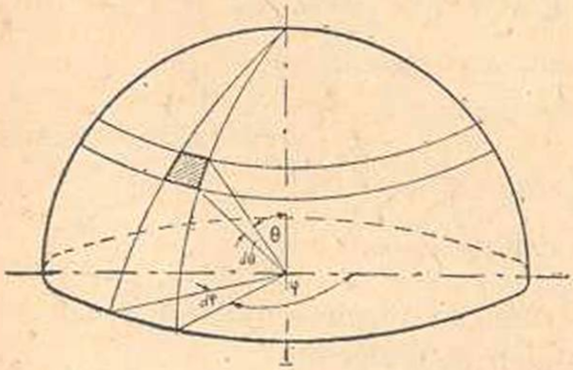

Рис. 2.

оболочки) N_1 и N_2, положительные направления которых показаны на рис. 3.

Кроме этих усилий по сторонам выделенного четырехугольника будут действовать изгибающие моменты G_1 и G_2 и крутящие моменты H_1 и H_2, векторы которых показаны на рис. 4.

Условия равновесия выделенного элемента оболочки имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(T_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} - \frac{\partial S_2}{\partial\varphi} - T_2\cos\Theta - N_1\sin\Theta + RX\sin\Theta = 0\\
&\frac{\partial(S_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} + \frac{\partial T_2}{\partial\varphi} - S_2\cos\Theta - N_2\sin\Theta + RY\sin\Theta = 0\\
&T_1 + T_2 + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial(N_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial N_2}{\partial\varphi} + RZ = 0\\
&\frac{\partial(G_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} + \frac{\partial H_2}{\partial\varphi} - G_2\cos\Theta - N_1R\sin\Theta = 0\\
&-\frac{\partial(H_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} + \frac{\partial G_2}{\partial\varphi} + H_2\cos\Theta - N_2R\sin\Theta = 0\\
&H_1 + H_2 + R(S_1 + S_2) = 0,
\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

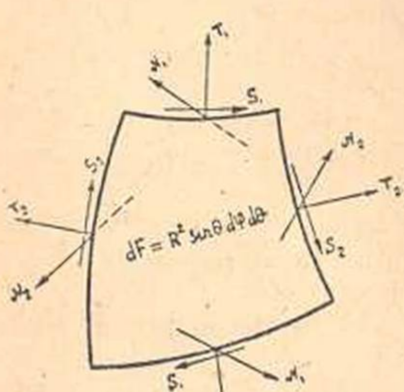

Рис. 3.

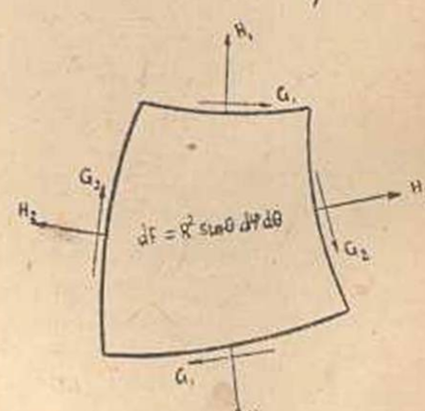

Рис. 4.

где X, У и Z — компоненты внешней нагрузки, действующей на выделенный четырехугольник по направлениям соответственно касательной к меридиану, касательной к параллели и радиуса сферы.

X, Y и Z будем считать положительными, если они направлены соответственно в направлении возрастания Θ и φ и к центру сферы.

При симметричной внешней нагрузке будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} S_1 = S_2 = 0 \\ H_1 = H_2 = 0 \\ N_2 = 0 \\ Y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Считая, что по меридиональным направлениям имеется необходимая арматура, которая препятствует образованию кольцевых трещин, можно предположить, что в стадии разрушения появятся радиальные трещины от краев оболочки к вершине.

При наличии арматуры площадью F_a в нижнем (опорном) кольце в стадии разрушения будем иметь зону с растянутой арматурой, затем зону со сквозной (по толщине оболочки) трещиной, а в верхней части—зону сжатого бетона.

В стадии разрушения принимаем: $G_2 = 0$ (3)

Из уравнений (1) учитывая (2) и (3), получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial(T_1 \sin)\Theta}{\partial\Theta} - T_2\cos\Theta - N_1\sin\Theta + RX\sin\Theta = 0 && (а) \\ &\frac{\partial T_2}{\partial\varphi} = 0 && (б) \\ &T_1 + T_2 + \frac{1}{\sin\Theta}\ \frac{\partial(N_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} + RZ = 0 && (в) \\ &\frac{\partial(G_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} - N_1R\sin\Theta = 0 && (г) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

При принятых контурных условиях, позволяющих определение опорных реакций непосредственно из условий равновесия, легко могут быть определены положение нейтральной оси и кольцевые усилия T_2, а затем из уравнений (4) остальные внутренние усилия и момент G_1.

Обозначим: σ_u —предел прочности сжатого бетона при изгибе, σ_T —предел текучести растянутой кольцевой арматуры F_a, F'_a —приведенную площадь кольцевой растянутой арматуры, σ'_T —приведенный предел текучести зоны с кольцевой растянутой арматурой, P—опорную реакцию, приходящуюся на единицу длины опорного кольца.

Из условия равновесия (проектируя все силы, действующие на оболочку, на вертикаль) имеем.

$$\underset{\substack{\text{(по поверхн.}\\ \text{оболочки)}}}{\iint} R^2X\sin^2\Theta\, d\Theta d\varphi + \underset{\substack{\text{(по поверхн.}\\ \text{оболочки)}}}{\iint} R^2Z\sin\Theta\cos\Theta\, d\Theta\, d\varphi - 2\pi RP\sin\alpha = 0,$$

$$P = \frac{R}{2\pi\sin\alpha}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\alpha} (X\sin^2\Theta + Z\sin\Theta\cos\Theta)\,d\Theta, \tag{5}$$

откуда может быть определена опорная реакция для заданной симметричной нагрузки.

Для определения положения нейтральной оси меридионального сечения рассмотрим равновесие полуоболочки, находящейся под действием внешних и внутрених сил.

Из условия равновесия, определив сумму моментов всех сил, действующих на полуоболочку относительно оси СС (рис. 1), имеем:

$$2\beta R\delta\sigma_{н}\frac{2\int\limits_0^{\beta} R^2\delta\cos\Theta\,d\Theta}{2R\beta\delta} + \underset{\substack{\text{(по поверхности}\\ \text{полуоболочки)}}}{\iint} R^2X\sin\Theta\sin\varphi\,d\Theta\,d\varphi -$$

$$-PR\pi\sin\alpha\frac{\int\limits_0^{\pi} R^2\sin^2\alpha\sin\varphi\,d\varphi}{\int\limits_0^{\pi} R\sin\alpha\,d\varphi} - 2F_{a}\sigma_{т}\frac{\int\limits_{\gamma}^{\alpha}\delta R^2\cos\Theta\,d\Theta}{\delta R(\alpha-\gamma)} = 0$$

или

$$2R\delta\sigma_{н}\sin\beta + R^2\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\alpha} X\sin\Theta\,d\Theta - 2RP\sin^2\alpha -$$

$$-\frac{2F_{a}\sigma_{т}}{\alpha-\gamma}(\sin\alpha-\sin\gamma)=0. \tag{6}$$

Проектируя все силы, действующие на полуоболочку, на ось, проходящую через точку 0 перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 1), получим:

$$2\beta R\delta\sigma_{н} - 2F_{a}\sigma_{т} - \underset{\substack{\text{(по поверхности}\\ \text{полуоболочки)}}}{\iint} R^2Z\sin^2\Theta\sin\varphi\,d\Theta\,d\varphi + \underset{\substack{\text{(по поверхности}\\ \text{полуоболочки)}}}{\iint} R^2X\sin\Theta\cos\Theta\sin\varphi\,d\Theta\,d\varphi = 0$$

или

$$2\beta R\delta\sigma_{н} - 2F_{a}\sigma_{т} + R^2\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\alpha}(X\cos\Theta - Z\sin\Theta)\sin\Theta\,d\Theta = 0 \tag{7}$$

Таким образом, из уравнений (5), (6) и (7) могут быть определены: реакция (P), положение нейтральной оси (β) и площадь кольцевой арматуры (F_a).

Остальные внутренние усилия и моменты могут быть определены из диференциальных уравнений равновесия (4), если для зоны с растянутой арматурой $T_2 = \delta\sigma'_т$, для зоны с трещиной $T_2 = 0$, для зоны сжатого бетона $T_2 = -\delta\sigma_и$ (рис. 5).

В случае, когда оболочка находится под действием собственного веса, интенсивность критической нагрузки, соответствующей приведенному весу оболочки, будет:

$$q = Kq_0,$$

где K—коэффициент запаса.

Следовательно:

$$\left.\begin{aligned} X &= q\sin\Theta \\ Z &= q\cos\Theta \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

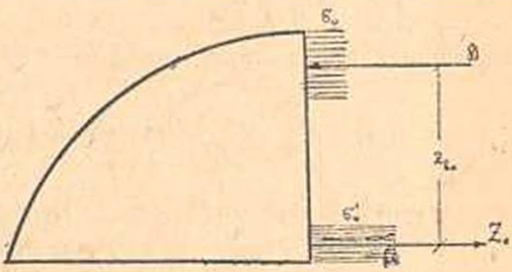

Рис. 5. Эпюра внутренних напряжений в стадии разрушения

Принимая во внимание, что $F_a\sigma_т = F'_a\sigma'_т$, где

$$F'_a = R\delta(\alpha - \gamma),$$

внеся (8) в (5), (6) и (7) и выполнив интегрирование, получим:

$$P = \frac{Rq}{\sin\alpha}(1 - \cos\alpha) \qquad (9)$$

$$\delta\sigma_и \sin\beta + \frac{Rq}{2}(\alpha - 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - \delta\sigma'_т(\sin\alpha - \sin\gamma) = 0 \qquad (10)$$

$$\beta\sigma_и - (\alpha - \gamma)\sigma'_т = 0 \qquad (11)$$

Ориентировочно задаваясь значением (γ) в зависимости от толщины оболочки (δ) и диаметра арматуры (d), из (10) и (11) можно определить $\sigma'_т$ и β.

Для рассматриваемого случая из (4) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial(T_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} - T_2\cos\Theta - N_1\sin\Theta + Rq\sin^2\Theta = 0 && (а) \\ &\frac{\partial T_2}{\partial\varphi} = 0 && (б) \\ &T_1 + T_2 + \frac{1}{\sin\Theta}\,\frac{\partial(N_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} + Rq\cos\Theta = 0 && (в) \\ &\frac{\partial(G_1\sin\Theta)}{\partial\Theta} - N_1R\sin\Theta = 0 && (г) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Определим внутренние усилия и моменты в зоне с растянутой кольцевой арматурой ($\alpha \geqslant \Theta \geqslant \gamma$).

$$\bar{T}_2 = \sigma'_т\,\delta$$

или на основании (11)

$$\overline{T}_2 = \frac{\beta\delta}{\alpha-\gamma}\sigma_и \tag{13}$$

Внеся (13) в (12 в), продиференцировав по Θ и вычитая из него (12 а), получим:

$$\frac{\partial^2(\overline{N}_1\sin\Theta)}{\partial\Theta^2} + \overline{N}_1\sin\Theta + \frac{2\beta\delta\sigma_и}{\alpha-\gamma}\cos\Theta + Rq(\cos^2\Theta - 2\sin^2\Theta) = 0 \tag{14}$$

Решая диференциальное уравнение (14) методом вариации произвольных постоянных, получим:

$$\overline{N}_1 = -\frac{\beta\delta\sigma_и}{2(\alpha-\gamma)}(\mathrm{ctg}\Theta + 2\Theta) + Rq\cos\Theta\,\mathrm{ctg}\Theta + \overline{C}_1 + \overline{C}_2\,\mathrm{ctg}\Theta \tag{15}$$

Произвольные постоянные $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ будут определены ниже. Внеся (13) и (15) в (12 в), будем иметь:

$$\overline{T}_1 = \frac{\beta\delta\sigma_и}{2(\alpha-\gamma)}(2\Theta\,\mathrm{ctg}\Theta - 1) + Rq\cos\Theta - \overline{C}_1\mathrm{ctg}\Theta + \overline{C}_2 \tag{16}$$

Для определения произвольных постоянных $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ имеем:

$$\text{при } \Theta = \alpha \quad \overline{T}_1 = -P\sin\alpha = -Rq(1-\cos\alpha),$$

$$\overline{N}_1 = -P\cos\alpha = -Rq(1-\cos\alpha)\mathrm{ctg}\alpha,$$

откуда:

$$\overline{C}_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\gamma}\sigma_и\delta$$

$$\overline{C}_2 = \frac{\beta}{2(\alpha-\gamma)}\sigma_и\delta - Rq$$

и окончательно:

$$\overline{N}_1 = \frac{\beta}{\alpha-\gamma}\sigma_и\delta(\alpha-\Theta) - Rq(1-\cos\Theta)\mathrm{ctg}\Theta, \tag{17}$$

$$\overline{T}_1 = -\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\sigma_и\delta(\alpha-\Theta)\mathrm{ctg}\Theta - Rq(1-\cos\Theta). \tag{18}$$

Внеся (17) в (12 г) и проинтегрировав, получим:

$$\overline{G}_1 = -\frac{\beta}{\alpha-\gamma}R\delta\sigma_и[(\alpha-\Theta)\mathrm{ctg}\Theta + 1] - \frac{R^2q}{2}\,\frac{2\sin\Theta - \sin\Theta\cos\Theta - \Theta}{\sin\Theta} + \frac{\overline{C}_3}{\sin\Theta}$$

Для определения произвольной постоянной $\overline{C}_3$ имеем условие:

$$\text{при} \quad \Theta = \alpha \quad G_1 = 0,$$

откуда: $\overline{C}_3 = \dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}R\delta\sigma_и\sin\alpha + \dfrac{R^2q}{2}(2\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \alpha)$

и окончательно:

$$\bar{G}_1 = -\frac{\beta}{\alpha-\gamma} R\delta\sigma_и \frac{(\alpha-\Theta)\cos\Theta+\sin\Theta-\sin\alpha}{\sin\Theta} +$$

$$+\frac{R^2q}{2}\frac{(2-\cos\alpha)\sin\alpha-\alpha-(2-\cos\Theta)\sin\Theta+\Theta}{\sin\Theta}. \tag{19}$$

Таким образом определены внутренние усилия $\bar{N}_1$, $\bar{T}_1$ и момент $\bar{G}_1$ в зоне с растянутой кольцевой арматурой ($\alpha \geqslant \Theta \geqslant \gamma$).

Переходим к определению внутренних усилий и момента в зоне с трещиной ($\gamma \geqslant \Theta \geqslant \beta$).

$$T_2^* = 0 \tag{20}$$

Изложенным выше способом из (20), (12 в) и (12 а) получим:

$$\frac{\partial^2(N_1^*\sin\Theta)}{\partial\Theta^2} + N_1^*\sin\Theta + Rq(\cos^2\Theta - 2\sin^2\Theta) = 0,$$

откуда:

$$N_1^* = Rq\cos\Theta\,\mathrm{ctg}\,\Theta + C_1^* + C_2^*\mathrm{ctg}\,\Theta. \tag{21}$$

Из (12 в), (20) и (21) имеем:

$$T_1^* = Rq\cos\Theta - C_1^*\mathrm{ctg}\,\Theta + C_2^* \tag{22}$$

Для определения произвольных постоянных C_1^* и C_2^* имеем условия:

$$\text{при} \quad \Theta=\gamma \qquad \left.\begin{aligned} T_1^* &= \bar{T}_1 \\ N_1^* &= \bar{N}_1 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Из (17), (18), (21) и (22), учитывая (23), получим:

$$C_1^* = \beta\sigma_и\delta,$$

$$C_2^* = -Rq$$

и окончательно:

$$N_1^* = \beta\sigma_и\delta - Rq(1-\cos\Theta)\mathrm{ctg}\,\Theta, \tag{24}$$

$$T_1^* = -\beta\sigma_и\delta\,\mathrm{ctg}\,\Theta - Rq(1-\cos\Theta). \tag{25}$$

Внеся (24) в (12 г) и произведя интегрирование, будем иметь:

$$G_1^* = -R\beta\delta\sigma_и\,\mathrm{ctg}\,\Theta - Rq\frac{2\sin\Theta - \sin\Theta\cos\Theta - \Theta}{2\sin\Theta} + \frac{C_3^*}{\sin\Theta}.$$

Учитывая, что при $\quad \Theta=\gamma \quad G_1^* = \bar{G}_1,$

получим:

$$C_3^* = \frac{\beta}{\alpha-\gamma} R\delta\sigma_и(\sin\alpha - \sin\gamma) + \frac{R^2q}{2}(2\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \alpha)$$

и окончательно:

$$G_1^* = \frac{\beta}{\alpha-\gamma} R\delta\sigma_и \frac{(\sin\alpha-\sin\gamma)-(\alpha-\gamma)\cos\Theta}{\sin\Theta} +$$

$$+\frac{R^2q}{2}\frac{(2-\cos\alpha)\sin\alpha-\alpha-(2-\cos\Theta)\sin\Theta+\Theta}{\sin\Theta} \tag{26}$$

После определения значений внутренних усилий и момента (N_1^*; T_1^*; G_1^*) в зоне с трещиной ($\gamma\geqslant\Theta\geqslant\beta$) перейдем к определению таковых в зоне сжатого бетона ($\beta\geqslant\Theta\geqslant0$).

$$T_2=-\delta\sigma_и. \tag{27}$$

Аналогично предыдущему из (12 а), (12 в) и (27) получим:

$$\frac{\partial^2(N_1\sin\Theta)}{\partial\Theta^2}+N_1\sin\Theta-2\delta\sigma_и\cos\Theta+Rq(\cos^2\Theta-2\sin^2\Theta)=0,$$

откуда:

$$N_1=\frac{\delta\sigma_и}{2}(2\Theta+\operatorname{ctg}\Theta)+Rq\cos\Theta\operatorname{ctg}\Theta+C_1+C_2\operatorname{ctg}\Theta. \tag{28}$$

Из (12 в), (27) и (28) получим:

$$T_1=\frac{\delta\sigma_и}{2}(1-2\Theta\operatorname{ctg}\Theta)+Rq\cos\Theta-C_1\operatorname{ctg}\Theta+C_2. \tag{29}$$

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 имеем условия:

$$\text{при } \Theta=\beta \qquad \left.\begin{matrix} N_1=N_1^* \\ T_1=T_1^* \end{matrix}\right\} \tag{30}$$

Из (24), (25), (28) и (29), учитывая (30), определим:

$$C_1=0$$

$$C_2=-\frac{\delta\sigma_и}{2}-Rq$$

и окончательно:

$$N_1=\delta\sigma_и\Theta-Rq(1-\cos\Theta)\operatorname{ctg}\Theta \tag{31}$$

$$T_1=-\delta\sigma_и\Theta\operatorname{ctg}\Theta-Rq(1-\cos\Theta) \tag{32}$$

Внеся (31) в (12 г) и проинтегрировав, получим:

$$G_1=R\delta\sigma_и(1-\Theta\operatorname{ctg}\Theta)-\frac{R^2q}{2}\frac{2\sin\Theta-\sin\Theta\cos\Theta-\Theta}{\sin\Theta}+\frac{C_3}{\sin\Theta}$$

Из условия, что при $\Theta=\beta$ $G_1=G_1^*$, получим:

$$C_3=\frac{R\delta\sigma_и}{\alpha-\gamma}[\beta(\sin\alpha-\sin\gamma)-(\alpha-\gamma)\sin\beta]+\frac{R^2q}{2}(2\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\alpha)$$

и окончательно:

$$G_1=\frac{R\delta\sigma_и}{(\alpha-\gamma)\sin\Theta}[(\alpha-\gamma)(\sin\Theta-\Theta\cos\Theta)+\beta(\sin\alpha-\sin\gamma)-(\alpha-\gamma)\sin\beta]+$$

$$+\frac{R^2q}{2\sin\Theta}[(2-\cos\alpha)\sin\alpha-(2-\cos\Theta)\sin\Theta-(\alpha-\Theta)] \qquad (33)$$

Таким образом определены внутренние усилия и момент N_1, T_1 и G_1 в зоне сжатого бетона ($\beta \geqslant \Theta \geqslant 0$).

Пример:

Задана оболочка:

$R=10$ *м*,
$\delta=5$ *см*,
$2\alpha=120^0$,

Бетон марки 90. Оболочка находится под нагрузкой интенсивностью

$q_0=0{,}288$ *т/м*².

По Н и ТУ—3—49 $K=2$.

Следовательно $q=0{,}576$ *т/см*².

Принимаем:

диаметр арматуры $d=10$ *мм*
$\sigma_т=2500$ *кг/см*²
$\gamma=50^0$

Из (10) и (11) находим:

$\beta=0{,}038$,
$\sigma'_т=19{,}7$ *кг/см*².

Следовательно $F_a=\dfrac{R\delta(\alpha-\gamma)\sigma'_т}{\sigma_т}=8{,}25$ *см*².

Принимаем 12 ф 10 *мм*, арматуру ставим на расстоянии 15 *см* друг от друга.

Определим внутренние усилия и момент в сечении $=\Theta 30^0$.
Из (24), (25) и 2(6) получим:

$$N_1^*=0{,}038\times90\times5-1000\times0{,}0576\times1{,}732(1-0{,}866)=3{,}7 \text{ кг/см},$$

$$T_1^*=-0{,}038\times90\times5\times1{,}732-1000\times0{,}0576(1-0{,}866)=-37{,}3 \text{ кг/см},$$

$$G_1^*=\frac{0{,}038}{1{,}047-0{,}873}\times1000\times5\times90\frac{(0{,}866-0{,}766)-(1{,}047-0{,}873)\times0{,}866}{0{,}5}+$$

$$+\frac{1000^2\times0{,}0576}{2}\times\frac{0{,}866(2-0{,}5)-1{,}047-0{,}5(2-0{,}866)+0{,}524}{0{,}5}=$$

$$=2000 \text{ кг/см}^2.$$

По найденным усилям и моменту производим армирование оболочки по меридиональным направлениям.

Институт Строительных Материалов и Сооружений
Академии наук Армянской ССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник трудов ЦИИПС-а „Пластинки и оболочки". Госстройиздат, 1939.
2. *А. И. Лурье*—Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.

Ս. Մ. Դուրգարյան

ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ՍՏԱԴԻԱՅՈՒՄ ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆ ՍՖԵՐԻԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ դիտված է սֆերիկ երկաթբետոն թաղանթի հաշվումը սիմետրիկ բեռի տակ, կրիտիկական վիճակում։ Ստացված են հաշվային բանաձևեր թաղանթի երեք զոնաներում ներքին ճիգերը որոշելու համար։