

М. А. Есаян

### Аналитическое исследование движения неуравновешенного тела, вращающегося в собственных опорах

При современном уровне техники уравнивание на балансировочных станках не является достаточным. Качественное уравнивание может быть достигнуто только посредством вторичного уравнивания в рабочих условиях работы машины, когда вращающаяся часть ее будет находиться в собственных подшипниках. Существующие методы уравнивания вращающихся частей машины в подшипниках машины, как правило, требуют навыков исполнителей, довольно сложных графических построений и вычислений, в результате чего расчет уравнивающих грузов и производство процесса уравнивания не лишены погрешностей, существенно влияющих на точность конечного результата.

Мы поставили перед собой задачу: исследуя законы движения неуравновешенного вращающегося тела в собственных опорах, дать такие аналитические зависимости, которые позволили бы более точно, к тому же достаточно быстро решить задачу определения величин и местоположений уравнивающих масс и более полно раскрыли бы физический смысл имеющих место процессов.

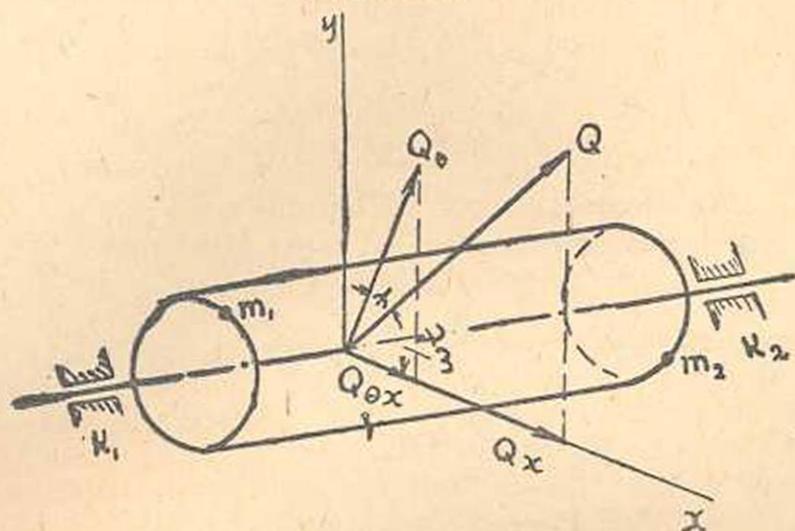
Решение задачи мы нашли путем решения дифференциального уравнения движения неуравновешенного тела, вращающегося в своих подшипниках.

#### Решение дифференциального уравнения движения неуравновешенного вращающегося тела

На фиг. 1 изображен ротор, вращающийся в двух опорах. Общий случай неуравновешенности характеризуется наличием во вращающемся теле статического и динамического небалансов.

Пусть вектор  $Q$  определяет собой статический небаланс, вектор  $Q_d$  - динамический. В самом общем случае принятая система будет обладать многими степенями свободы. Решение задачи при таком рассмотрении было бы весьма сложным, к тому же практически мало целесообразным. В дальнейшем нами приняты следующие допущения:

1) система принята имеющей две степени свободы, т. е. рассматриваются колебания системы в одной плоскости (в плоскости наибольшей податливости опор); колебания в двух других направлениях из последующего рассмотрения исключаются;



Фиг. 1.

- 2) система принята подчиняющейся линейной зависимости;
- 3) силы трения и сопротивления среды в расчет не приняты;
- 4) угловая скорость  $\omega$  вращения ротора принята постоянной.

Основываясь на наблюдения и существующие методы балансировки, можно констатировать, что такая частичная идеализация схемы в дальнейших исследованиях на конечные результаты существенного влияния не должна оказать.

Таким образом, положение системы при ее колебании в любой момент времени можно определить двумя координатами: поступательным перемещением  $x_c$  центра тяжести  $S$  и углом поворота  $\theta$ , как указано на фиг. 2. Обе координаты измеряются от положения равновесия.

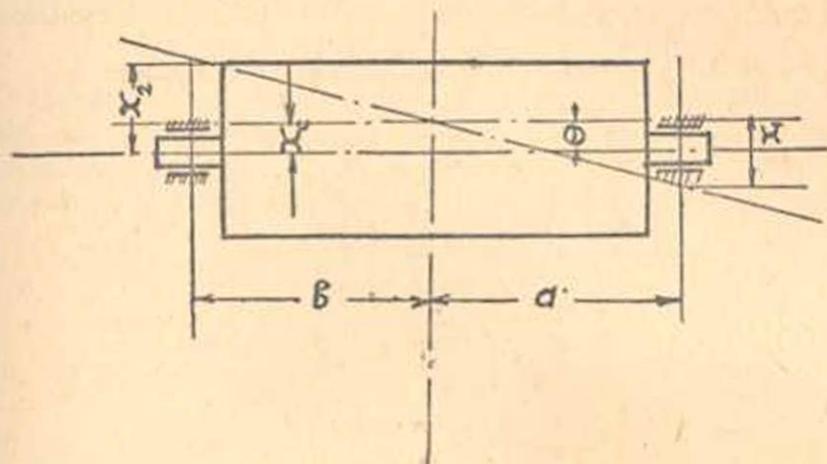
В следуемых ниже вычислениях приняты следующие обозначения:

- $\omega$ —угловая скорость вращения ротора,
- $t$ —время,
- $G$ —вес ротора,
- $I_y$ —динамический момент инерции массы ротора относительно оси, проходящей через центр тяжести  $S$ ,
- $g$ —ускорение силы тяжести,
- $a$  и  $b$ —расстояния центра тяжести ротора до центра соответствующей опоры,
- $k_1$  и  $k_2$ —постоянные упругости опор.

Для составления дифференциального уравнения движения при-

меним принцип Д'Аламбера. Тогда уравнение, определяющее поступательное движение центра тяжести ротора, выразится зависимостью:

$$\frac{G}{g} x_c'' + (k_1 + k_2)x_c = Q \cos \omega t, \quad (1)$$



Фиг. 2.

где

$$Q \cos \omega t = Q_z$$

Соответственно, для вращения относительно центра тяжести будем иметь:

$$I_y \cdot \theta'' + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta = -x_c (k_1 a - k_2 b) + Q \delta \cos(\omega t + \psi), \quad (2)$$

где

$$Q \delta \cos(\omega t + \psi) = Q \delta_x \quad \text{и}$$

$\psi$  — угол относительного сдвига фаз.

Эти два дифференциальных уравнения показывают, что вообще координаты  $x_c$  и  $\theta$  не являются независимыми друг от друга, а значит при колебании будут иметь место не только поступательное перемещение  $x_c$ , но и вращение  $\theta$ . Решения уравнений (1) и (2) нами получены в следующем виде:

$$x_c = \frac{Q}{p_{ст}^2 - \omega^2} \cdot \frac{g}{G} \cos \omega t, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \theta = & - \frac{g}{G \cdot I_y} \cdot \frac{Q(k_1 a - k_2 b)}{(p_{ст}^2 - \omega^2)(p_{дин}^2 - \omega^2)} \cos \omega t + \\ & + \frac{Q \delta}{I_y} \cdot \frac{1}{p_{дин}^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \psi), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$p_{ст}^2 = \frac{k_1 + k_2}{G} g \quad \text{и} \quad p_{дин}^2 = \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2}{I_y}.$$

Далее принято, что система имеет симметричное расположение относительно опор и что последние имеют одинаковые упругие свойства, т. е. допущена справедливость равенств:

$$a = b \quad \text{и}$$

$k_1 = k_2 = \frac{k}{2}$ , где  $k$  — коэффициент, характеризующий суммарную жесткость опор. В результате этого допущения получаем:

$$\theta = \frac{Q\theta}{I_y} \cdot \frac{1}{p_{\text{дин}}^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \psi), \quad (5)$$

$$x_c = \frac{Q}{p_{\text{ст}}^2 - \omega^2} \cdot \frac{g}{G} \cos \omega t, \quad (3)$$

где

$$p_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad (a)$$

$$p_{\text{дин}} = \sqrt{\frac{ka^2}{I_y}}, \quad (б)$$

а  $M = \frac{G}{g}$  — масса ротора.

Выражения (a) и (б) представляют собой угловые частоты колебаний опор соответственно в моменты статического и динамического резонансов. Периоды этих колебаний могут быть определены на основании известных соотношений:

$$T_{\text{ст}} = \frac{2\pi}{p_{\text{ст}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} \quad \text{и}$$

$$T_{\text{дин}} = \frac{2\pi}{p_{\text{дин}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_y}{k}}.$$

Для принятого нами симметричного ротора имеет место одно, весьма замечательное соотношение, позволяющее установить величину динамического момента инерции

Деля  $p_{\text{ст}}$  на  $p_{\text{дин}}$  и учитывая, что  $I_y = M \cdot R_i^2$ , где  $R_i$  радиус инерции ротора, получаем следующую зависимость:

$$\frac{p_{\text{ст}}}{p_{\text{дин}}} = \frac{R_i}{a}, \quad (6)$$

т. е. отношение угловых частот при статическом и динамическом резонансах равно отношению радиуса инерции к половине расстояния между осями его подшипников.

Отношение (6) позволяет определить момент инерции ротора, если известны угловые частоты статического и динамического резо-

напсов, расстояние между осями подшипников ротора и масса ротора, именно:

$$I_y = M.R_1^2, \text{ или} \\ I_y = \frac{Ma^2 \rho_{ст}^2}{\rho_{лин}} \quad (7)$$

Обратимся теперь к первоначальной схеме (см. фиг. 2). Смещения опор от оси вращения детали в каждый заданный момент времени, вызываемые наличием статического и динамического небалансов, могут быть определены посредством уравнений:<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \theta \cdot a + x_c \\ x_2 &= \theta \cdot a - x_c \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Подставляя в уравнения (8) значения величин  $x_c$  и  $\theta$  из уравнений (3) и (5) и полагая

$$B = M(\rho_{ст}^2 - \omega^2), \quad (6)$$

а

$$K = \frac{(k - M\omega^2) \cdot a}{(k \cdot a^2 - MR_1^2 \omega^2)}. \quad (7)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} Bx_1 &= KQ\theta \cdot \cos(\omega t + \psi) + Q \cos \omega t \\ Bx_2 &= KQ\theta \cdot \cos(\omega t + \psi) - Q \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Уравнения (9) показывают, что в каждый заданный момент времени величины смещений опор вращающейся детали зависят от степени ее неуравновешенности и, следовательно, замеряя величины этих смещений, возможно косвенно оценить величину небаланса. Постоянная „K“, определяемая выражением (7), может быть и целой и дробной величиной, а также положительной и отрицательной. Знак ее зависит от величины скорости, при которой ведется уравновешивание. Если эта скорость ниже первой критической скорости, т. е. ниже скорости, при которой имеет место статический резонанс  $\left( \omega < \sqrt{\frac{k}{M}} \right)$ , значение постоянной „K“ положительно. Она имеет отрицательное значение, если скорость, при которой ведется уравновешивание, находится между первой и второй критическими скоростями  $\left( \sqrt{\frac{ka^2}{MR_1^2}} > \omega > \sqrt{\frac{k}{M}} \right)$ . Постоянная „K“ вновь принимает положительное значение, когда рабочая скорость становится выше второй критической скорости  $\left( \omega > \sqrt{\frac{ka^2}{MR_1^2}} \right)$ .

<sup>1</sup> В данных уравнениях ввиду малости угла  $\theta$ ,  $\text{tg } \theta$  заменен через  $\theta$ .

При критических скоростях постоянная „К“ принимает неопределенное значение; поэтому вести уравнивание при скоростях, лежащих близко от критических, не следует.

Уравнения (9) отражают зависимости величин смещений опор от величин статического и динамического небалансов в каждый заданный момент времени. Из всех значений этих зависимостей нас должна интересовать некоторая постоянная связь между имеющим место небалансом и максимальными значениями величин смещений опор.

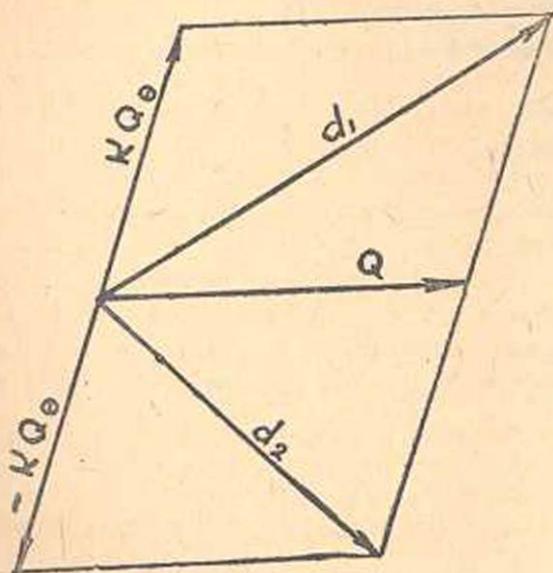
Для нахождения максимальных значений величин смещений опор был применен общеизвестный способ из курса математического анализа. Исследования на максимум были произведены для каждого из этих уравнений отдельно. В результате этих исследований установлены следующие зависимости между величинами смещений опор и статического и динамического небалансов:

$$Vx_{1m} = \sqrt{Q^2 + 2Q \cdot KQ_0 \cdot \cos\psi + (KQ_0)^2}, \quad (10)$$

$$Vx_{2m} = \sqrt{Q^2 - 2Q \cdot KQ_0 \cdot \cos\psi + (KQ_0)^2}, \quad (11)$$

где  $x_{1m}$  — максимальное значение смещения первой опоры,  
 $x_{2m}$  — максимальное значение смещения второй опоры.

Из формул (10) и (11) следует, что *геометрическая сумма и*



Фиг. 3.

*разность сил статического и динамического небалансов определяют, в конечном счете, величины максимальных смещений опор ротора.*

Этот результат графически представлен на фиг. 3, где через  $d_1$  и  $d_2$  обозначены величины, пропорциональные смещениям опор, именно:

$$d_1 = Vx_{1m},$$

$$d_2 = Vx_{2m}.$$

Значение величин статического  $Q$  динамического  $KQ_0$  небалансов и угла сдвига фазы  $\psi$  можно определить из полученных соотношений. Для

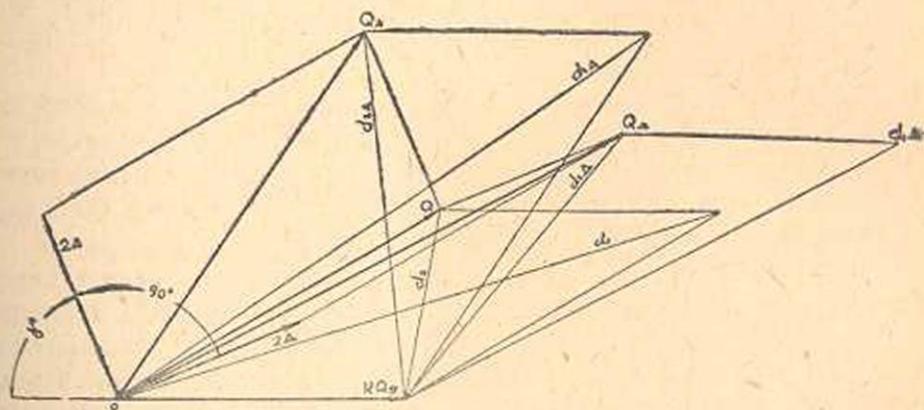
этого достаточно в принятых компенсационных плоскостях прикреплять пробные грузы и исследовать состояние ротора под действием пробных грузов.

### Определение величины и местоположения неуравновешенной массы

Пусть на роторе, изображенном на фиг. 1, плоскости I и II представляют собой плоскости, в которых надлежит компенсировать неуравновешенность ротора. Установим по одному пробному грузу, каждой массы  $A$ , в указанных плоскостях под одним и тем же углом к некоторой исходной базе и определим действие центробежных сил  $A\omega^2$  (где  $r$ —радиус окружности, по которой устанавливаются пробные грузы) на колебания системы. Очевидно, что при этом вектор первоначального динамического небаланса останется неизменным; вектор же статического небаланса получает приращение до  $QA$ , равное по величине  $2A$ .

Повернем пробные грузы в обеих компенсационных плоскостях на  $90^\circ$  в одном и том же направлении. И в этом случае, очевидно, вектор динамической пары останется неизменным, вектор же статического небаланса получит новое приращение до  $Q_D$  по отношению к вектору первоначального статического небаланса, равное по величине опять  $2A$ .

На основании формул (10) и (11) построим векторную диаграмму сил небалансов и соответствующих смещений опор; она представлена на фиг. 4.



Фиг. 4.

Здесь  $Q_A$  и  $Q_D$ —новые значения векторов статических небалансов при двух дополнительных запусках,  $d_{1A}$ ,  $d_{2A}$  и  $d_{1D}$ ,  $d_{2D}$ —величины, пропорциональные соответствующим смещениям опор.

Закономерность построенной диаграммы не нарушится, если мы за центр векторов статических небалансов примем конец вектора  $KQ_0$ . Такой перенос осуществлен на фиг. 5, на которой, кроме того, проведена окружность с радиусом, равным  $2A$ . За центр этой окружности, как видно из схемы, принят конец вектора первоначального статического небаланса  $Q$ .

Совершенно ясно, что в этом случае конец вектора  $Q$  будет



3)  $\beta = 45 - \delta,$

$$\lambda = \beta + \alpha = 45 - \delta + \alpha,$$

4) из треугольника  $O, Q_d, 2K Q_0$ 

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d_{2d} \cdot \sin \lambda}{d_{1d} - d_{2d} \cdot \sin \lambda}.$$

При известных углах  $\varphi$  и  $\lambda$  из того же треугольника может быть определена величина вектора, характеризующего динамический небаланс, именно:

$$KQ_0 = \frac{d_{2d}}{2} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \varphi} \quad (12)$$

Величина вектора динамического небаланса определится посредством деления выражения (12) на величину постоянной  $K$ :

$$Q_0 = \frac{d_{2d}}{2K} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \varphi}. \quad (13)$$

5) Из треугольника  $O, Q, Q_d$ 

$$\cos \varepsilon = \frac{(d_{1d})^2 + (d_1)^2 - 4A^2}{2d_{1d}}$$

угол  $\varphi'$  определится разностью углов  $\varphi$  и  $\varepsilon$ , именно:

$$\varphi' = \varphi - \varepsilon$$

6) Величина вектора первоначального статического небаланса определится из треугольника  $O, Q, KQ_0$ :

$$Q = \sqrt{(d_1)^2 + (KQ_0)^2 - 2 \cdot d_1 \cdot KQ_0 \cos \varphi'} \quad (14)$$

7) Величина угла сдвига фазы  $\psi$  определяется из треугольника  $KQ_0, Q, 2KQ_0$ :

$$\cos \psi = \frac{Q^2 + (KQ_0)^2 - d_1^2}{2Q \cdot KQ_0} \quad (15)$$

Таким образом, первоначально неизвестные величины статического и динамического небалансов и угла сдвига фазы определяются посредством формул (13), (14), (15). Из теории уравновешивания вращающихся масс известно, что любой суммарный небаланс вращающегося тела может быть скомпенсирован путем прикрепления в двух произвольно выбранных плоскостях корректирующих грузов; при этом необходимо учесть, что для рассматриваемого ротора величина статического небаланса  $Q$  может быть определена геометрически, как сумма центробежных сил масс небаланса  $m_1$  и  $m_2$ , приведенных к выбранным плоскостям.

Вектор динамической пары, очевидно, может быть определен разностью векторов центробежных сил от масс небаланса  $m_1$  и  $m_2$ .

В соответствии с указанным, имеем:

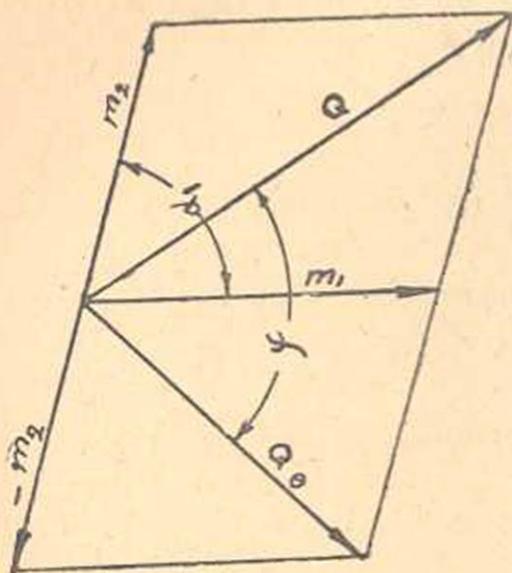
$$Q = r\omega^2 \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 \cdot m_2 \cdot \cos \alpha_1}, \quad (16)$$

$$Q_0 = r\omega^2 \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 \cdot m_2 \cdot \cos \alpha_1}, \quad (17)$$

где через  $\alpha_1$  обозначен угол между приведенными массами небаланса.

Уравнения (16) и (17) позволяют посредством весьма несложных геометрических построений определять величину и положение приведенных к данным плоскостям масс небалансов  $m_1$  и  $m_2$ , а по ним — величину и положение уравнивающих грузов. Сущность этих построений сводится к построению параллелограмма сил, представленного на фиг. 6.

Сравнением длин векторов  $m_1$  и  $m_2$  с длиной вектора  $A$ , величина которого известна, определяются величины приведенных масс небаланса. Положения векторов  $m_1$  и  $m_2$  на роторе могут быть определены, если мы вычертим окружность, изображающую балансировочные кольца с центром в конце вектора  $Q$ , проходящую через точки  $Q_A$  и  $Q_D$ . Те места на роторе, где будут укреплены пробные грузы при втором и третьем запусках, как указывалось выше, соответствуют концам векторов статических небалансов  $Q_A$  и  $Q_D$  на окружности. Определяя положение векторов  $m_1$  и  $m_2$  по отношению к центру круга  $Q$ , мы зафиксируем положение первоначальной неуравновешенности ротора. Последний уравнивается установкой грузов, полностью компенсирующих



Фиг. 6.

действие неуравновешенных масс  $m_1$  и  $m_2$ .

Если замеры амплитуд колебаний опор производились правильно, а соответствующие расчеты — достаточно точно, машина должна быть свободна от колебаний после установки уравнивающих грузов.

Заканчивая исследование, можно подвести следующий итог:

1) колебания машин могут быть вызваны различными причинами, а не только неуравновешенностью вращающихся деталей. К таковым могут быть отнесены: смещение центра тяжести вращающейся детали вследствие изменения температуры, эксцентricность вкла-

дышей опор, несовпадение осей опор и соединительных муфт, грубая обработка шеек валов и т. д. Научные методы уравнивания вращающихся деталей машин должны позволять с большой уверенностью выявлять причины колебаний машин, не относящиеся к неуравновешенности вращающейся детали; к тому же при действительном наличии неуравновешенности эти методы должны обеспечить достаточную точность процесса уравнивания.

2) Приведенный в настоящей работе метод уравнивания вращающихся деталей машины в собственных подшипниках, полученный в результате решения дифференциального уравнения движения неуравновешенного ротора, исключая необходимость наличия специальных аппаратов для измерения фазовых углов при колебании системы, дает возможность решать задачу уравнивания с учетом взаимного воздействия колебаний опор, чем обеспечивается большая точность при определении величины и положения уравнивающих грузов. Данный метод позволяет также на основании результатов расчета судить о характере источника колебаний. Если при решении по этому методу получены отрицательные результаты, а весь процесс измерений и расчетов проведен тщательно, можно твердо быть уверенным, что причиной колебаний не является неуравновешенность вращающихся частей. Простота замеров, расчетов и построений, которые сводятся лишь к элементарному сложению и вычитанию векторов, позволяют ошибки при определении уравнивающего груза свести к минимуму.

Ереванский Сельскохозяйственный Институт.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Тимошенко—Теория колебаний в инженерном деле, Гостехиздат, 1934.
2. А. Н. Крылов—Дифференциальные уравнения математической физики, Ленинград, 1933.
3. А. П. Динерман—Балансировка роторов турбин, Машгиз, 1946.
4. ОРГРЭС, Руководящие указания по статической и динамической балансировке роторов, Госэнергоиздат, 1942.
5. Н. В. Колесник—Вестник машиностроения\*, № 12, 1948.

#### Մ. Ա. Եսայան

### ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՌԱՆՅՔԱԿԱՆՆԵՐՈՒՄ ՊՏՏՎՈՂ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇԻՌ ՄԱՐՄՆԻ ՇԱՐՔՄԱՆ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հայտնի է, որ եթե պտտվող մարմինը ներկայացնում է իրենից ամբողջովին հավասարակշռված սիսեմ, ապա կենտրոնախույս ուժերն առաջ են բերում միայն ներքին լարումներ և չեն հայտնաբերվում արտաքինից։ Սակայն չնչին անհավասարակշռությունը մարմնում ընդունակ է առաջ

բերել զդալի կենտրոնախույս ուժեր, որոնց ազդեցութեան ներքո մեքենան ենթարկվում է ուժեղ տատանումներ: Այդ տատանումները ոչնչացնելու համար, մեքենայի պտտվող մասը ենթարկում են հավասարակշռման:

Գոյութիւն ունեցող ստատիկ և դինամիկ հավասարակշռման ձևերը չեն ապահովում պրոցեսի կատարելականութիւնը:

Պրոցեսի որակը բարձրանում է, երբ հավասարակշռումը կատարվում է մեքենայի սեփական առանցքակալներում: Սակայն սեփական առանցքակալներում հավասարակշռման հայանի մեթոդները կատարողից պահանջում են մեծ հմտութիւն, ինտուիցիա, իսկ հավասարակշռող ծանրոցի մեծութեան և դրութեան սրտման համար կատարվող հաշվարկները և կառուցումները դժվար են և ծանր:

Ներկա աշխատութեան մեջ բերված է անհավասարակշիռ բոտորի շարժման զիֆերենցիալ հավասարման լուծումը, որի հետեանքով հաստատվեցին կարևոր անալիտիկ բանաձևեր (տես 10 և 11 բանաձևերը)՝ ստատիկ և դինամիկ անհավասարակշռութիւնների մեծութեան և ուղղութեան սրտման համար:

Տվյալ մեթոդը թույլ է տալիս ստացված արդյունքները հիման վրա դադարի կազմել տատանումների առաջացման աղբյուրի վերաբերյալ: Եթե լուծման ընթացքում ստացված պատասխանը բացասական է, ապա կարելի է որոշակի կերպով հաստատել, որ տատանումներն առաջ են եկել ոչ թե անհավասարակշռութեան հետեանքով, այլ մի շարք այլ պատճառներով, որոնց թվին կարելի է վերագրել՝ պտտվող մարմնի ծանրութեան կենտրոնի տեղաշարժումը ջերմութեան փոփոխութեան հետեանքով, առանցքակալների առանցքների չզորդադիպումը, լիսեռների վրիկների կոպիտ մշակումը և այլն:

Բացի այդ, չափումների, հաշվումների և կառուցումների հեշտութիւնը թույլ է տալիս հավասարակշռող ծանրոցի սրտման հետ կապակցված սխալները հասցնել մինիմումի: