

Е. Дж. Сафаров

Статистические основы регулирования речного стока

1. Введение

Существующие статистические способы расчета регулирования стока приближенны, мало обоснованы в теоретическом отношении и трудоемки, так как требуют много времени для вычислений. Достоверность же их результатов сомнительна.

Причиной этого обстоятельства является то, что указанные способы полностью базируются на распределении величин, зависящих лишь от одной случайной переменной.

На самом деле, при регулировании стока мы сталкиваемся со многими переменными факторами. Главными из них являются:

1. приток воды в водохранилище,
2. отток воды из него,
3. объем водохранилища,
4. наполнение водохранилища,
5. потери воды из водохранилища,
6. недостаток воды и излишек (сброс),
7. период регулирования и перебоя и т. д.

Само собой разумеется, что сведением всех этих факторов к одной переменной мы допустим грубые ошибки и затратим много труда, ввиду кропотливости подсчетов по этому способу.

Однако, при некоторых практически приемлемых допущениях число указанных факторов можно уменьшить. Например, можно допустить, что потери из водохранилища зависят от наличия воды в нем, что недостаток или излишек воды—зависят от полного полезного объема водохранилища, что отток воды из водохранилища задан в соответствии с графиком потребления воды и т. д. Однако, никак нельзя все вышеуказанные факторы свести к одному, как это делали до сих пор.

За последнее десятилетие в отечественной литературе появилось значительное число работ, посвященных статистическому методу расчета регулирования речного стока. Этим вопросом занимались многие видные ученые Советского Союза. Однако, как было сказано выше, все работы опирались на функцию распределения, зависящую от одной переменной. Для разрешения сложных вопросов, поставленных перед ними, они дали различные графические методы для сведения одной переменной к другим.

Разработанные аналитические методы для разрешения узких задач настолько сложны, что почти недоступны рядовым проектировщикам. Это обстоятельство и является причиной ограниченного применения статистического метода при разрешении конкретных водохозяйственных задач.

Вопросы, связанные с прогнозами того или иного гидрологического или метеорологического явления, не могут получить своего разрешения без применения статистических методов. Несмотря на то, что существующие статистические методы опираются на рассмотрение одной переменной величины, они дают возможность разрешать большое число задач.

Само собой разумеется, что при наличии функции распределения многих переменных и соответствующих расчетных таблиц число разрешаемых вопросов увеличивается во много раз. При этом устраняются те недочеты, которые возникают при применении распределения одной переменной.

Распределение многих независимых переменных может быть широко применено в области прогнозирования гидрологических, метеорологических и иных явлений. Так же, как и при расчетах регулирования стока, при прогнозировании нельзя основываться на применении статистического метода, опирающегося на распределение одной переменной, так как генетический анализ этих явлений показывает, что они являются функциями многих факторов. Так, например, речной сток зависит: 1) от количества осадков, 2) от распределения и вида осадков, 3) от интенсивности осадков, 4) от характера изменения теплового режима в бассейне, 5) от физико-географических, геологических и почвенных условий, 6) от растительного покрова, 7) от озерности и заболоченности речного бассейна и т. д.

При наличии таблиц вероятностей, зависящих от многих переменных, можно было бы учесть основные особенности речного стока.

Можно было бы привести очень много примеров не только из области гидрологии и гидроэнергетики, но и из любых других областей науки и техники, где могли бы иметь широкое применение таблицы вероятностей факторов, зависящих от двух и более переменных величин. Однако и вышеприведенные примеры достаточны для того, чтобы убедиться в необходимости составления таких таблиц.

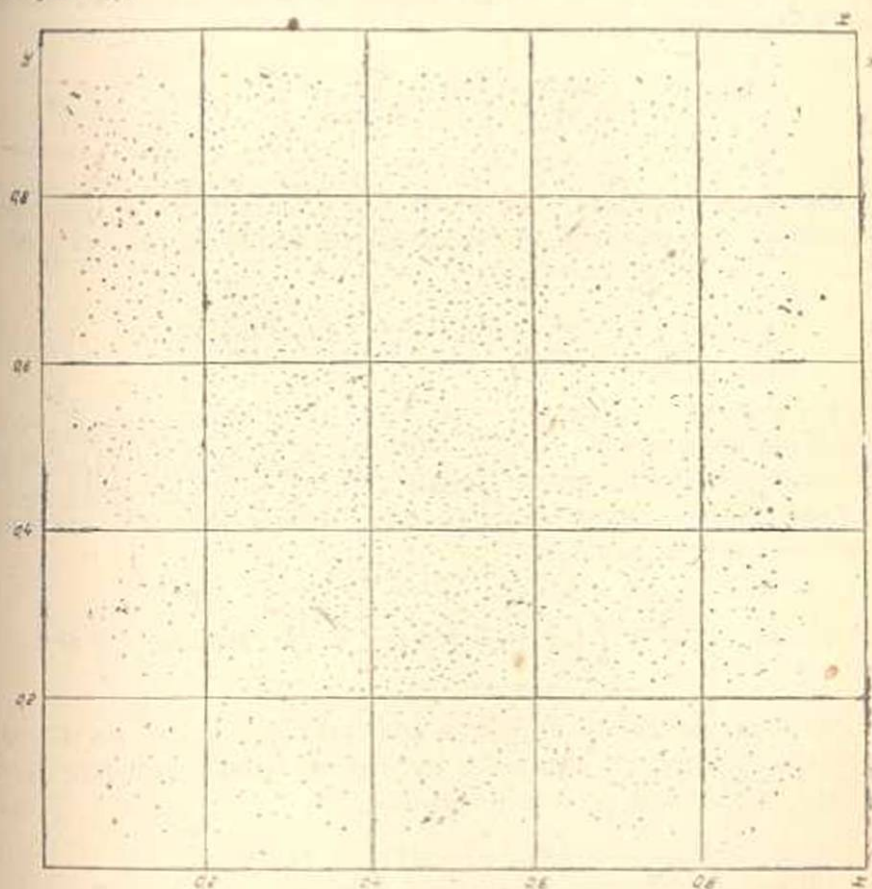
Попутно отметим, что распределение двух переменных, основанное на нормальном законе распределения, давно применяется в артиллерийской технике в виде сетки вероятностей.

Цель данной работы заключается в создании методологии для составления таких таблиц, которые могут быть использованы для практических целей.

II. Теоретические основы кривой распределения системы многих переменных

Простейшим случаем распределения в системе со многими случайными переменными является распределение в системе с двумя величинами X и Y . Приводимый ниже анализ начинается с этого простейшего случая.

Представим себе, что было выполнено некоторое экспериментальное исследование (или произведены некоторые наблюдения), при котором каждая из величин X и Y получила некоторое, определенное положительное значение. Тогда, фиксируя результаты отдельных измерений в виде точек координатной плоскости XOY , получим для каждого измерения некоторую случайную точку (X, Y) . (см. фиг. 1).



Фиг. 1.

Допустим, что случайные величины X и Y являются непрерывными случайными величинами, т. е. что функция $F(x, y)$, определяющая интегральный закон распределения системы величин X и Y , имеет непрерывную производную второго порядка, взятую один раз по X и другой раз по Y . Тогда вероятность совместного выполнения

неравенства $x_0 < X < x$, $y_0 < Y < y$ будет интегральным законом распределения пары случайных величин (X, Y) . Это свойство аналитически может быть выражено следующим образом:

$$F(x, y) = \text{Вер} \left\{ \begin{array}{l} x_0 < X < x \\ y_0 < Y < y \end{array} \right\} \quad (1)$$

Вследствие того, что функция $F(x, y)$ имеет непрерывную производную по x и y , то можно написать:

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

где $\varphi(x, y)$ выражает дифференциальный закон распределения системы двух случайных величин. Очевидно, что в этом случае интегральный закон распределения можно выразить через дифференциальный закон следующим образом:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \varphi(x, y) dx dy \quad (3)$$

Нетрудно доказать, что когда X и Y являются независимыми случайными переменными, то выражение (3) можно переписать в виде:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x \varphi_1(x) dx \int_{y_0}^y \varphi_2(y) dy = F_1(x) \cdot F_2(y), \quad (4)$$

где $\varphi_1(x)$ и $F_1(x)$ представляют из себя дифференциальный и интегральный законы распределения величины X , а $\varphi_2(y)$ и $F_2(y)$ — дифференциальный и интегральный законы распределения величины Y .

Аналогично этому выражению для системы многих случайных переменных можно написать:

$$F(x, y, z, \dots, t) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z \dots \int_{t_0}^t \varphi(x, y, z, \dots, t) dx dy \dots dt \quad (5)$$

Наконец, когда эти величины являются независимыми случайными переменными, то последнее выражение можно написать в аналогичном выражению (4) виде, а именно:

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \dots, t) &= \int_{x_0}^x \varphi_1(x) dx \int_{y_0}^y \varphi_2(y) dy \dots \int_{t_0}^t \varphi_n(t) dt = \\ &= F_1(x) \cdot F_2(y) \cdot F_3(z) \dots F_n(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Подробное изложение данного вопроса можно найти в любом курсе теории вероятностей.

III. Исследование общей теории при известных законах распределения и методика составления расчетных таблиц для многих случайных переменных

В качестве исходного распределения вероятностей системы двух случайных переменных берем уравнение типа (2), а в качестве кривой распределения—кривую, полученную автором разложением произвольной функции по полиномам.*

Указанная кривая распределения выражается следующим уравнением:

$$F(y) = \frac{\alpha^\alpha x^{\alpha-1} \cdot e^{-\alpha x}}{\Gamma(\alpha)} \left[1 - \frac{\alpha^{3/2} (C_s - 2C_v)}{6} \left(1 - 3x + \frac{3x^2}{M_2} - \frac{x^3}{M_3} \right) \right], \quad (7)$$

где $M_2 = 1 + C_v^2$; $M_3 = (1 + C_v^2)(1 + 2C_v^2)$; $\alpha = \frac{1}{C_v^2}$

$C_v = \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{\sum (x - x_0)^2}{n-1}}$ коэффициент изменчивости ряда;

n — число членов в ряду и

x_0 — средняя величина ряда,

$C_s = \frac{\sum (x - x_0)^3}{(n-1) C_v^3}$ — коэффициент асимметрии,

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ — гамма функция от α .

Уравнение (7) исследуем для случая, когда $C_s = 2C_v$. Тогда оно превращается в уравнение кривой Пирсона III типа.

Примем, что:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty x^{\alpha-1} e^{-\alpha x} dx = 1 - F_1(x) \\ \Phi_2(y) &= \frac{\beta^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_y^\infty y^{\beta-1} e^{-\beta y} dy = 1 - F_2(y) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тогда

$$Z = \Phi(x, y) = \Phi_1(x) \Phi_2(y) = p \left(\begin{matrix} x < X < \infty \\ y < Y < \infty \end{matrix} \right)$$

есть функция распределения пары независимых переменных X и Y . Эта функция изобразится в пространстве некоторой поверхностью распределения при всех $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

* Е. Д. Сафаров — Кривые распределения и обеспеченности и их применение к гидрологическим расчетам. Ереван, 1947.

Если взять плоскость $Z = \text{const}$, параллельную плоскости XOY и пересечь ею поверхность

$$Z = \Phi(x, y), \quad (9)$$

то на этой поверхности получится линия, проекция которой на плоскость XOY будет иметь уравнение

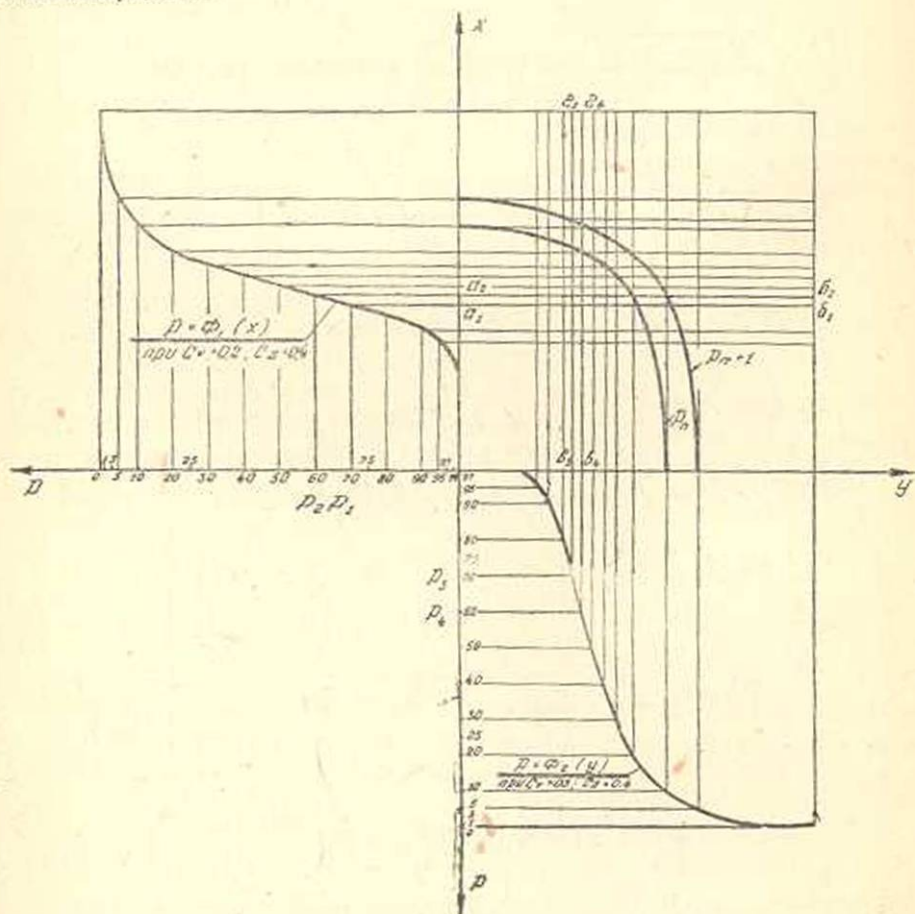
$$\Phi(x, y) = p$$

или

$$\Phi_1(x) \cdot \Phi_2(y) = p \quad (10)$$

Придавая p различные значения $p_1, p_2, \dots$, получим в плоскости XOY ряд изолиний $\Phi_1(x) \Phi_2(y) = p_n$.

Число p_n будет равно вероятности того, что точка $M(x, y)$ попадет за пределы области, ограниченной кривой $\Phi_1(x) \cdot \Phi_2(y) = p_n$ и осями координат.



Фиг. 2.

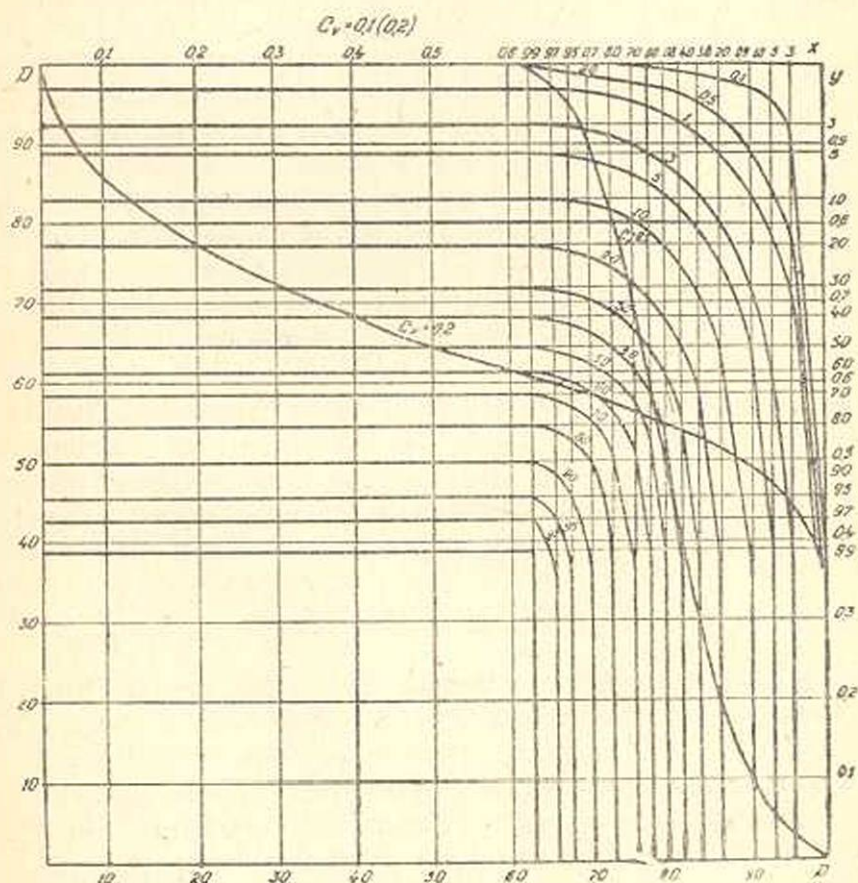
Изолиний будет столько, сколько было взято значений для величины Z . Учитывая также, что функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(y)$ зависят еще от коэффициентов вариации (C_v) и асимметрии (C_s), число изолиний

увеличится в соответствии с числом принятых значений этих коэффициентов.

Для построения изолиний поступаем следующим образом. Изображаем на поле вероятностей характеристику заданных величин в виде сетки равных вероятностей.

Эта последняя для системы с двумя случайными переменными $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ изобразится в виде системы прямых линий.

На фиг. 2 эта сетка показана тонкими линиями. Способ построения этой сетки ясен из той же фигуры. Действительно, при обеспеченностях P_1 и P_2 функции $\Phi_1(x)$ линии равных вероятностей будут a_1, b_1 и a_2, b_2 , а при обеспеченностях P_1 и P_2 и функции $\Phi_2(y)$ они будут v_1, γ_1 и v_2, γ_2 .



Фиг. 3

На сетке равных вероятностей нанесены изолинии

$$P_n = \Phi_1(x) \Phi_2(y) = \text{const} \text{ и}$$

$$P_{n+1} = \Phi_1(x) \Phi_2(y) = \text{const},$$

Причем $P_{n+1} = P_n + \Delta P$.

Таблица 1

P	$C_v = 0.1$		$C_v = 0.2$		$C_v = 0.3$		$C_v = 0.4$		$C_v = 0.5$	
	k	k/k ₁	k	k/k ₁	k	k/k ₁	k	k/k ₁	k	k/k ₁
99	0,782	0,627	0,594	0,3902	0,436	0,239	0,307	0,142	0,206	0,082
97	0,821	0,6584	0,653	0,4290	0,516	0,283	0,393	0,182	0,288	0,114
95	0,841	0,6745	0,693	0,4553	0,562	0,308	0,445	0,206	0,342	0,136
90	0,874	0,7009	0,754	0,4954	0,640	0,351	0,538	0,250	0,436	0,173
80	0,915	0,7338	0,829	0,5446	0,743	0,407	0,656	0,304	0,574	0,228
75	0,931	0,7466	0,859	0,5643	0,785	0,430	0,710	0,329	0,634	0,252
70	0,945	0,7579	0,886	0,582	0,822	0,450	0,758	0,352	0,691	0,275
60	0,972	0,7795	0,937	0,616	0,897	0,491	0,852	0,395	0,803	0,319
50	0,997	0,7996	0,987	0,648	0,970	0,531	0,947	0,439	0,918	0,365
40	1,022	0,8196	1,038	0,682	1,047	0,574	1,049	0,487	1,044	0,415
30	1,050	0,8421	1,094	0,719	1,133	0,621	1,165	0,540	1,190	0,473
25	1,066	0,8549	1,137	0,747	1,183	0,648	1,233	0,572	1,277	0,508
20	1,083	0,8685	1,163	0,766	1,240	0,679	1,312	0,609	1,378	0,548
10	1,130	0,9062	1,263	0,830	1,398	0,766	1,534	0,712	1,670	0,665
5	1,170	0,9383	1,350	0,887	1,539	0,843	1,733	0,804	1,938	0,771
3	1,196	0,9592	1,408	0,925	1,635	0,896	1,875	0,870	2,126	0,846
1	1,247	1,000	1,523	1,000	1,826	1,000	2,156	1,000	2,512	1,000

Для вычерчивания изолиний на основании уравнения (10) предварительно составлена таблица 2. На основании этой таблицы без труда, при данной $P_n = \text{const}$, можно вычертить изолинии. Очевидно, что область ΔZ_n , ограниченная двумя соседними изолиниями P_n и P_{n+1} и осями координат, есть зона изменения величин X и Y при изменении обеспеченности от P_n до P_{n+1} . Следовательно, она будет соответствовать ординате кривой распределения при обеспеченности $P_n + \frac{\Delta P}{2}$.

Для облегчения расчетов фигура (2) составлена так, что площадь квадрата, охватывающего всю систему изолиний, была равна единице.

С этой целью, на основании расчетных таблиц вероятностей (см. приведенную выше сноску), составляется таблица 1. В первой графе таблицы приведены проценты обеспеченности, во второй — соответствующие ординаты, взятые из таблиц для одной переменной, в третьей же графе — те же величины, приведенные к базису 1%-ой обеспеченности.

Приведение к базису производится путем деления значений графы 2-й на k_1 , где k_1 — ордината при 1%-ой обеспеченности, взятая из той же графы. Это значит, что ординаты кривой обеспеченности взяты в единицах k/k_1 .

Продолжение таблицы 1

P	$C_v = 0,6$		$C_v = 0,7$		$C_v = 0,8$		$C_v = 0,9$		$C_v = 1,0$	
	k	k/k ₁	k	k/k ₁	k	k/k ₁	k	k/k ₁	k	k/k ₁
99	0,130	0,045	0,077	0,0227	0,042	0,0113	0,021	0,0050	0,010	0,0022
97	0,204	0,071	0,138	0,0407	0,088	0,0238	0,053	0,0127	0,030	0,0065
95	0,253	0,088	0,182	0,0537	0,125	0,0337	0,082	0,0198	0,051	0,0110
90	0,348	0,120	0,270	0,0796	0,205	0,0553	0,150	0,0361	0,105	0,0228
80	0,494	0,171	0,408	0,1203	0,340	0,0918	0,281	0,0677	0,223	0,0484
75	0,559	0,192	0,485	0,1431	0,415	0,1120	0,349	0,0841	0,288	0,0625
70	0,622	0,215	0,553	0,1631	0,486	0,1312	0,419	0,1009	0,356	0,0772
60	0,749	0,259	0,693	0,2044	0,633	0,1709	0,572	0,1378	0,511	0,1108
50	0,883	0,305	0,843	0,2487	0,797	0,215	0,746	0,1798	0,692	0,1501
40	1,032	0,357	1,013	0,2988	0,987	0,2665	0,955	0,2301	0,916	0,1987
30	1,209	0,418	1,219	0,3596	1,222	0,3299	1,217	0,293	1,204	0,2613
25	1,314	0,455	1,344	0,3965	1,366	0,3688	1,381	0,3328	1,386	0,3007
20	1,440	0,498	1,494	0,4407	1,540	0,4158	1,579	0,3805	1,609	0,3491
10	1,805	0,624	1,936	0,571	2,063	0,5570	2,186	0,5268	2,303	0,4997
5	2,146	0,742	2,357	0,6953	2,570	0,6939	2,807	0,6765	2,995	0,6501
3	2,388	0,826	2,658	0,7841	2,936	0,7927	3,219	0,7757	3,502	0,7599
1	2,890	1,000	3,390	1,000	3,710	1,000	4,149	1,000	4,605	1,000

Для иллюстрации сказанного приводится фиг. 3, на которой изображены две кривые обеспеченности $P_1 = \Phi_1(x)$ и $P_2 = \Phi_2(y)$ и нанесены изолинии вероятностей по уравнению (10).

Кривые обеспеченности, изображенные на фигуре 3, имеют параметры: $C_{v1} = 0,2$; $C_{s1} = 2C_{v1} = 0,4$ для функции $\Phi_1(x)$, и

$C_v = 0,1$ $C_s = 2C_v = 0,2$ для функции $\Phi_2(y)$.

Координаты точек этих кривых даны в таблице 1.

Результаты подсчетов, для данного примера, приведены в таблице 3, где в первой графе даны проценты обеспеченности P_n для системы с двумя переменными, во второй графе — площади ΔZ_n , ограниченные соседними изолиниями и осями координат. В третьей графе приведены суммы этих частных площадей, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \Delta Z_i = Z_n$$

Величина Z_n , соответствующая обеспеченности P_n , представляет площадь, ограниченную кривой

$$P_n = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(y)$$

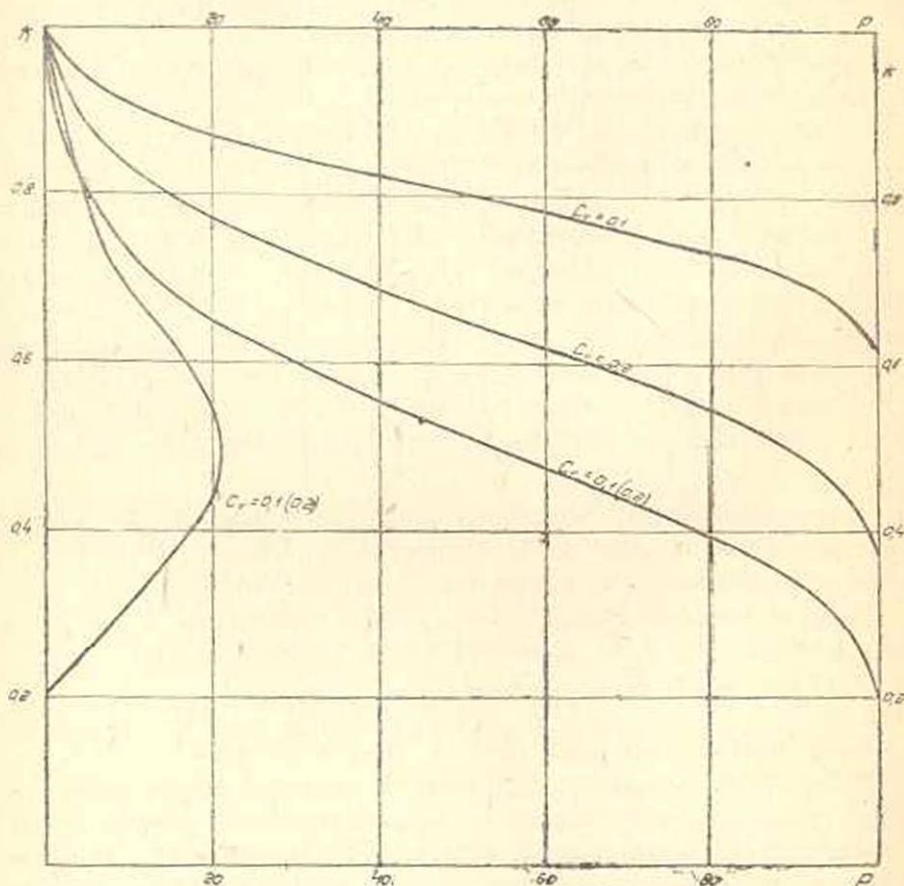
и осями координат.

Наконец, в последней графе даны окончательные значения для аргумента Z_n в абсолютных единицах. Для получения Z_n в абсолютных единицах, нужно цифры графы третьей умножить на 1.899. Соответствующие величины $K_n = 1,899 Z_n$ приведены в графе четвертой.

Эти значения K_n и рассматриваются нами, как ординаты кривой обеспеченности, абсциссы которых равны P_n .

Для иллюстрации приводится также, фиг. 4, дающая кривые обеспеченности и распределения с параметрами:

$$C_v = 0,1 (0,2) = 0,2 (0,1) \text{ и } C_s = 2C_v.$$



Фиг. 4.

На той же фигуре изображены для сравнения кривые обеспеченности для системы с одной переменной и параметрами:

$$C_{v_1} = 0,1 \quad C_{s_1} = 2C_{v_1} = 0,2$$

$$\text{и } C_{v_2} = 0,2, \quad C_{s_2} = 2C_{v_2} = 0,4$$

Метод составления расчетных таблиц в случае, когда $C_s \neq 2C_v$ ничем не отличается от случая, когда $C_s = 2C_v$.

$\Phi_1(x)$ p	99	95	90	80	70	60	50
0,1	0,10	0,11	0,12	0,13	0,15	0,17	0,20
0,5	0,5	0,53	0,56	0,62	0,71	0,83	1,00
1,0	1,01	1,05	1,11	1,25	1,43	0,67	2,00
3	3,03	3,16	3,33	3,75	4,25	5,00	6,00
5	5,05	5,26	5,56	6,25	7,15	8,33	10,00
10	10,10	10,50	11,10	12,50	14,30	16,70	20,00
20	20,20	21,60	22,20	25,0	28,60	33,38	40,00
30	30,30	31,60	33,30	37,50	42,20	50,00	60,00
40	40,40	42,00	44,40	50,00	57,10	66,60	80,00
50	50,50	52,60	55,60	62,50	71,50	83,40	100
60	60,60	63,10	66,60	75,00	85,90	100	
70	70,70	73,80	77,70	87,50	100		
80	80,80	84,20	89,00	100			
90	90,90	94,60	100				
95	96,00	100					
100	100						

Таблица 2.

[illegible]

Таблица 3

$C_v = 0,2 (0,1)$			
$P_n \%$	ΔZ	Z	$K_n = 1,899 Z_n$
100	0,244	0,2437	0,463
99	0,059	0,303	0,575
95	0,041	0,343	0,652
90	0,050	0,393	0,746
80	0,045	0,438	0,832
70	0,038	0,476	0,903
60	0,036	0,512	0,973
50	0,040	0,552	1,047
40	0,045	0,597	1,132
30	0,053	0,651	1,237
20	0,080	0,731	1,389
10	0,073	0,804	1,526
5	0,051	0,855	1,623
3	0,076	0,931	1,769
1,0	0,027	0,958	1,819
0,5	0,032	0,990	1,879
0,1	0,010	1,000	1,899

только при этом в основу расчета необходимо брать соответствующие кривые обеспеченности. Однако, ввиду громоздкости подсчетов, в данной работе пришлось ограничиться только расчетными таблицами для случая $C_s = 2C_v$.

Расчетные таблицы даны в приложении к статье.

Теперь рассмотрим способ составления расчетной таблицы вероятностей системы трех и более случайных переменных.

Начнем с системы трех переменных.

В качестве исходного уравнения берем соответствующее уравнение функции распределения в дифференциальном виде, а именно:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x) \varphi_2(y) \varphi_3(z) \quad (11)$$

Уравнение (11) можно переписать в виде

$$\varphi(x, y, z) = [\varphi_1(x) \varphi_2(y)] \varphi_3(z) = \varphi_{1-2}(x, y) \varphi_3(z), \quad (12)$$

где $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y)$.

После интегрирования уравнения (11) получим:

$$\int \varphi(x, y, z) dx dy dz = \int_x^\infty \varphi(x) dx \cdot \int_y^\infty \varphi(y) dy \cdot \int_z^\infty \varphi(z) dz =$$

$$\left[\int_x^\infty \int_y^\infty \varphi(x) \varphi(y) dx dy \right] \int_z^\infty \varphi(z) dz = F(x, y) F(z), \quad (13)$$

$$\text{где } F(x, y) = F(x) F(y) = \int_x^\infty \varphi(x) dx \cdot \int_y^\infty \varphi(y) dy$$

Уравнение (13), аналогично уравнению (4), можно написать в виде:

$$F_z = \frac{P}{F(x, y)}, \quad (14)$$

который сходен с видом уравнения (10). Следовательно, на основании уравнения (14), можно аналогично тому, как это было сделано по уравнению (10), составить расчетные таблицы, при наличии кривых обеспеченности.

$$F(x, y, z) = [F(x) \cdot F(y)] \cdot F(z)$$

Для этой цели задаемся следующими выражениями для указанных функций:

$$F(x) = \int_x^\infty A \cdot x^{a-1} e^{-ax} dx;$$

$$F(y) = \int_y^\infty B \cdot y^{b-1} e^{-by} dy;$$

$$F(z) = \int_z^\infty C z^{c-1} e^{-cz} dz;$$

В этом случае можно пользоваться таблицами вероятностей для двух случайных переменных и свести систему трех случайных переменных к двум. Очевидно, что тогда составление таблиц вероятностей для системы трех переменных ничем не будет отличаться от таковых в случае 2-х переменных.

В качестве примера берем три кривые обеспеченности с параметрами:

$$C_{v_1} = 0,1; \quad C_{s_1} = 2C_{v_1} = 0,2$$

$$C_{v_2} = 0,2; \quad C_{s_2} = 2C_{v_2} = 0,4$$

$$C_{v_3} = 0,3; \quad C_{s_3} = 3C_{v_3} = 0,6$$

Координаты точек приведены в таблице 1.

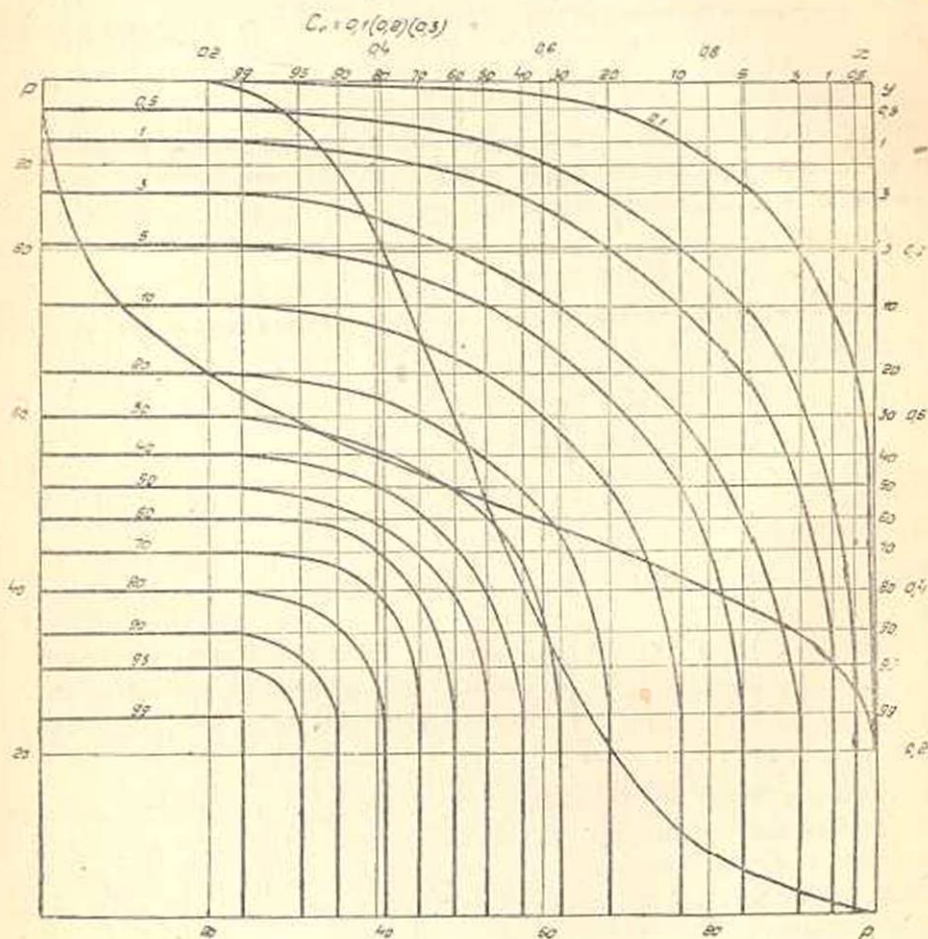
На основании этих параметров строим фиг. 5, на которой изображены изолинии по уравнению (14).

Планиметрированием площадей, ограниченных изолиниями и осями координат, составлена таблица 4, где приводятся данные, аналогичные данным таблицы 3.

На основании данных таблицы построена фигура 6, на которой,

кроме кривой обеспеченности $P = \Phi(x, y, z)$, приведены также кривые $P = \Phi(x, y)$, $P = \Phi_1(x)$ и $P = \Phi_2(y)$.

При желании составить таблицы вероятностей системы четырех случайных независимых переменных кривые распределения необхо-



Фиг. 5.

можно написать в виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = [\varphi_1(x) \varphi_2(y)] [\varphi_3(z) \varphi_4(t)] = \varphi(x, y) \cdot \varphi(z, t) \quad (15)$$

или в интегральном виде:

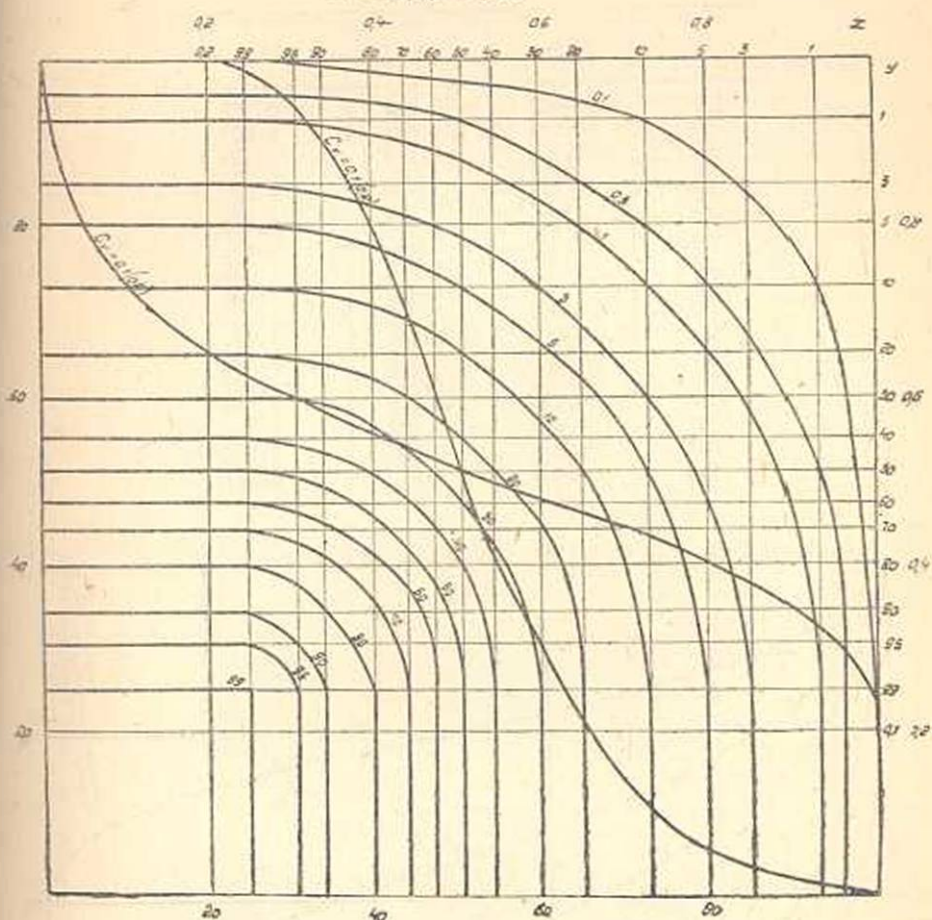
$$P = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(x, y, z, t) \, dx dy dz dt = \Phi_1(x, y) \cdot \Phi_2(z, t),$$

$$\text{где } \Phi_1(x, y) = \Phi_1(x) \Phi_2(y) \text{ и } \Phi_2(z, t) = \Phi_3(z) \Phi_4(t). \quad (16)$$

На основании уравнения (16) можно написать уравнение

$$\Phi_1(x, y) = \frac{P}{\Phi_2(z, t)}, \quad (17)$$

$$C_v = C_{v1}(0,2) C_{v2}(0,2)$$



Фиг. 6.

на основании которого строятся изолинии для случая 4-х переменных. В качестве примера возьмем функции

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \Phi_1(x) \Phi_2(y) \text{ с параметрами} \\ C_{v1} &= 0,1 (0,2) \text{ и } C_{v2} = 2C_{v1} = 0,2 (0,4) \\ \text{и } \Phi_2(z, t) &= \Phi_3(z) \Phi_4(t) \text{ с параметрами} \\ C_{v3} &= 0,1 (0,2) \text{ и } C_{v4} = 2C_{v3} = 0,2 (0,4). \end{aligned}$$

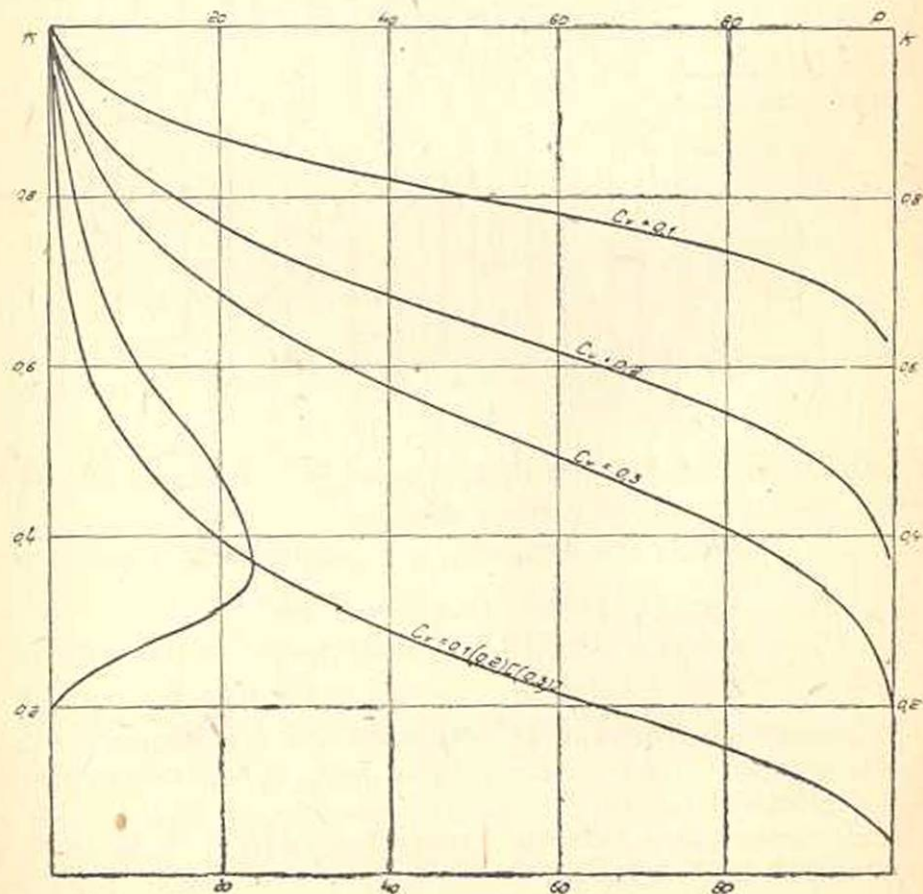
На основании этих кривых обеспеченности и уравнения (17) построена фигура 7, а на основании последней, путем планиметрирования, составлена таблица 5.

Для иллюстрации таблицы 5 приведена фигура 8, в которой представлены кривые распределения

$$\Phi(x, y, z, t), \Phi(x, y), \Phi(x) \text{ и } \Phi(y).$$

Таблица 4

$C_v = 0,1 \quad [0,2 \quad (0,3)]$			
P	Δk	k	3,541 k
100	0,054	0,054	0,191
99	0,031	0,085	0,301
95	0,029	0,114	0,404
90	0,037	0,151	0,535
80	0,031	0,182	0,644
70	0,032	0,214	0,758
60	0,032	0,246	0,871
50	0,037	0,283	1,002
40	0,047	0,330	1,168
30	0,064	0,394	1,395
20	0,090	0,484	1,714
10	0,095	0,579	2,502
5	0,069	0,648	2,294
3	0,120	0,768	2,719
1	0,050	0,818	2,896
0,5	0,088	0,906	3,208
0,1	0,094	1,0	3,541

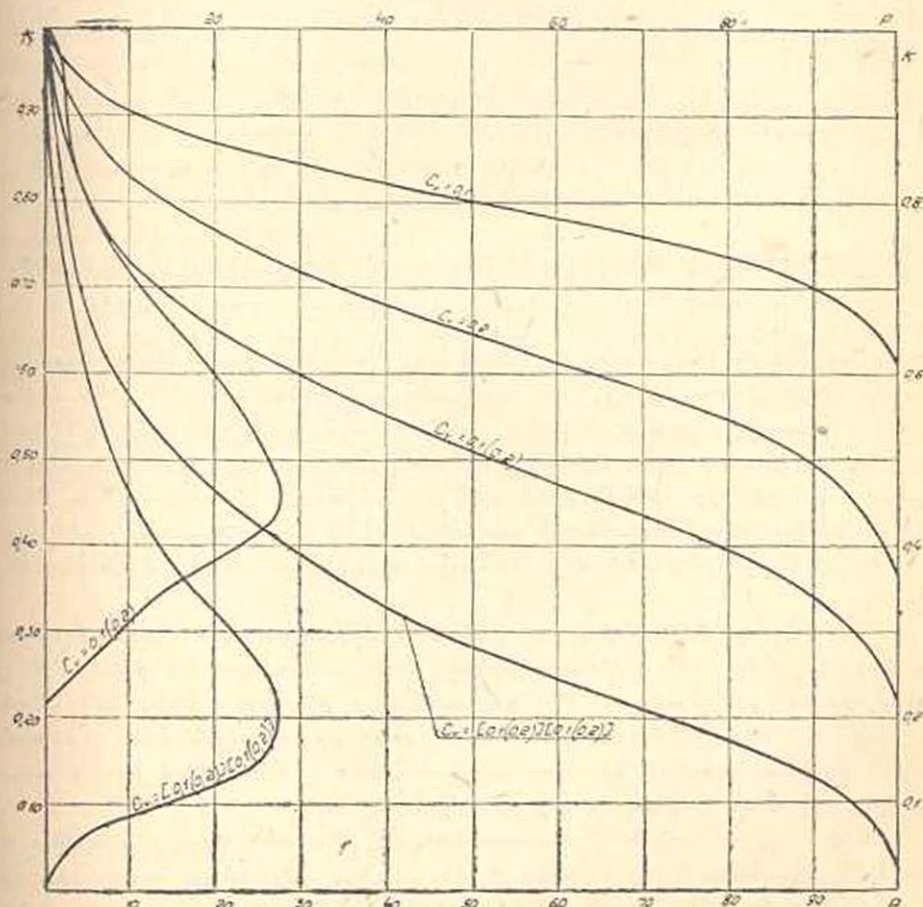


Фиг. 7.

Таблица 5

 $C_v = 0,1 (0,2) [0,1 (0,2)]$

P	Δk	k	3,606 k
100	0,060	0,060	0,215
99	0,028	0,088	0,317
95	0,023	0,111	0,402
90	0,034	0,145	0,525
80	0,033	0,178	0,642
70	0,032	0,210	0,756
60	0,033	0,243	0,877
50	0,039	0,282	1,018
40	0,046	0,328	1,184
30	0,062	0,390	1,408
20	0,099	0,489	1,762
10	0,089	0,578	2,086
5	0,075	0,653	2,355
3	0,122	2,755	2,793
1	0,068	0,843	3,039
0,5	0,099	0,942	3,397
0,1	0,058	1,000	3,606



Фиг. 8.

В следующей статье будет дана методика применения таблицы для двух случайных независимых переменных при разрешении основных задач, связанных с регулированием речного стока.

IV. Таблица для интегральной кривой распределения системы с двумя случайными переменными

В приложении к данной работе приводятся расчетные таблицы для интегральной кривой системы из двух случайных переменных. Они составлены на основании уравнения (10) по способу, изложенному в данной работе.

Таблицы составлены для таких двух случайных переменных, каждая из которых подчиняется одному и тому же интегральному закону вероятностей. Для каждой кривой взято 10 значений для $C_v = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9$ и 1,0.

В первом столбце таблицы даны проценты обеспеченности.

Имея в виду, что кривые распределения с параметрами C_v , (C_v) совпадают с кривыми распределения с параметрами C_v , (C_v) , число таблиц получается небольшим.

Водно-Энергетический Институт
Академии Наук Армянской ССР.

Ե. Զ. Սաֆարով

ԳԵՏԱՅԻՆ ՀՈՍՔԻ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐՄԱՆ ՎԷՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆԲՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոսքի կանոնավորումը հաշվելու գոյություն ունեցող վիճակագրական եղանակները մոտավոր են, տեսականորեն քիչ հիմնավորված և մեծ աշխատանք պահանջող. դրանց հաշվելու համար շատ ժամանակ է պահանջվում, իսկ արդյունքների ճշտությունը կասկածելի է: Դրա պատճառն այն է, որ նշված եղանակները հիմնվում են մեկ պատահական փոփոխականից (հոսքից) կախված մեծությունների բաշխման վրա: Չնայած դրան, այժմ հիդրոէներգետիկայի բնագավառից տասնյակ խնդիրներ լուծվում են այդ մեթոդով:

Պարզ է, որ մի քանի պատահական փոփոխականների ապահովության կորերի սխեմի համար վիճակագրական մեթոդով լուծվող խնդիրների թիվը կապելանա մի քանի անգամ: Այդ դեպքում շատ թերություններ կվերանան:

Սույն աշխատանքի նպատակն է՝ շատ փոփոխականներով սխեմի ապահովության կորերի կառուցմանը տեսական հիմնավորում տալ և առաջարկել հաշվման համապատասխան աղյուսակներ:

Երկու պատահական փոփոխականներով սխեմի համար հավանականությունից սկզբնական հավասարում վերցված է (2) տիպի հավասարումը, իսկ բաշխման կորի համար՝ (8) տիպի հավասարումով արտահայտված կորը: Այդ դեպքում վերցված փոփոխական մեծությունների անկախության դեպքում (2) հավասարումը բերված է (10) տիպի հավասարման: Այդ

հավասարումը հնարավորություն է տալիս տվյալ պատահական մեծությունները հավանականության դաշտում արտահայտել իզոգծներով: Դրա համար երեք մեծություններից մեկը վերցնում ենք որպես կամավոր պարամետր, իսկ մյուս երկուսով կառուցում իզոգծեր: Ակնհայտ է, որ իզոգծերի քանակը մի կողմից կախված է կամավոր պարամետրների քանակից, մյուս կողմից վերցված ֆունկցիաների վարիացիայի և անսխեմորիկության գործակիցներից:

Իզոգծերը կառուցում ենք հետևյալ կերպ. հավանականության դաշտում փոփոխական մեծությունների բնույթն արտահայտում ենք իզոգծերի սիստեմով, տրված ֆունկցիաների կորերի բաշխման միջոցով: Նույն հավանականության դաշտում անց ենք կացնում (10) հավասարումից ստացված իզոգծերը: Այնուհետև որոշում ենք հավանականության մակերեսները, որոնք ընդգրկված են իզոգծերով և կոորդինատային առանցքներով: Այդ մակերեսների արժեքներն իրենցից ներկայացնում են երկու փոփոխականների կորերի բաշխման օրդինատներ, եթե տվյալ հաստատուն իզոգծն ընդունենք որպես արցիս:

Երկու պատահական փոփոխականների սիստեմի հավանականության աղյուսակներ պետք է կազմել այն հաշվով, որ հավանականության մակերեսը հավասար լինի մեկ միավորի: Այդ նպատակի համար մեկ փոփոխականով գոյություն ունեցող աղյուսակների հիման վրա կազմված է (1) աղյուսակը (տես դժանկար 3): 4 դժանկարի վրա բերված են բաշխման կորեր, որոնք կախված են երկու փոփոխականից: Այդ կորերի վրա տրված են նաև հաճախականության կորերը, և համեմատության համար՝ մեկ փոփոխականի ապահովության կորերը:

Երեք պատահական փոփոխականներից կախված հաշվային աղյուսակներ կազմելու համար վարվել ենք այնպես, ինչպես երկու փոփոխականի սիստեմի դեպքում, միայն որպես ապահովության սկզբնական կորեր վերցնում ենք երկու և մեկ պատահական փոփոխականի ապահովության կորերը:

Աշխատանքում բերված են երկու պատահական փոփոխականներից կախված ապահովության հաշվային աղյուսակներ, որոնք հնարավորություն են տալիս լուծել զանազան խնդիրներ:

Приложение. Расчетные таблицы

$C_{v_i} = 0,1$										$C_{v_i} = 1,0$	
$\rho \backslash C_{v_s}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0
99,9	0,591	0,450	0,355	0,215	0,157	0,097	0,084	0,046	0,020	0,006	0
99,7	0,681	0,503	0,387	0,309	0,216	0,144	0,106	0,060	0,031	0,008	0
99,5	0,689	0,522	0,410	0,323	0,235	0,166	0,118	0,069	0,036	0,011	0
99	0,700	0,551	0,455	0,349	0,266	0,195	0,139	0,092	0,046	0,023	0,001
97	0,746	0,611	0,533	0,430	0,335	0,263	0,207	0,139	0,098	0,069	0,003
95	0,777	0,655	0,576	0,487	0,388	0,310	0,258	0,180	0,129	0,109	0,004
90	0,830	0,712	0,656	0,602	0,504	0,400	0,368	0,263	0,217	0,189	0,025
80	0,894	0,801	0,767	0,712	0,639	0,541	0,520	0,416	0,372	0,316	0,063
75	0,920	0,843	0,813	0,761	0,695	0,609	0,583	0,499	0,445	0,390	0,089
70	0,948	0,883	0,861	0,804	0,758	0,674	0,643	0,573	0,517	0,459	0,132
60	0,997	0,965	0,949	0,903	0,890	0,814	0,803	0,754	0,688	0,643	0,242
50	1,042	1,046	1,052	1,043	1,037	0,969	0,989	0,948	0,895	0,867	0,428
40	1,101	1,136	1,170	1,191	1,203	1,150	1,226	1,174	1,200	1,166	0,738
30	1,163	1,248	1,327	1,366	1,429	1,474	1,564	1,567	1,645	1,677	1,310
25	1,203	1,306	1,407	1,492	1,566	1,665	1,822	1,850	1,937	2,009	1,908
20	1,247	1,373	1,503	1,624	1,732	1,863	2,105	2,164	2,287	2,360	2,608
10	1,342	1,519	1,671	1,896	2,033	2,252	2,579	2,774	2,944	3,078	4,496
5	1,407	1,625	1,858	2,124	2,412	2,721	3,065	3,315	3,518	3,732	6,298
3	1,482	1,794	2,133	2,500	2,885	3,308	3,830	4,152	4,605	5,053	10,179
1	1,532	1,862	2,225	2,630	3,059	3,510	4,113	4,487	5,008	5,512	17,577
0,5	1,529	1,876	2,242	2,653	3,094	3,555	4,165	4,555	5,092	5,592	20,269
0,3	1,539	1,884	2,255	2,668	3,112	3,576	4,191	4,585	5,127	5,634	21,078
0,1	1,543	1,888	2,260	2,674	3,120	3,586	4,202	4,599	5,143	5,652	22,793

$C_{v_i} = 0,2$										$C_{v_i} = 0,9$		
ρ	C_{v_s}	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,9	1,0
99,9		0,348	0,197	0,171	0,145	0,110	0,077	0,034	0,006	0,003	0,003	0,002
99,7		0,429	0,228	0,184	0,164	0,141	0,088	0,051	0,009	0,007	0,003	0,002
99,5		0,441	0,242	0,194	0,176	0,154	0,098	0,062	0,013	0,010	0,003	0,002
99		0,464	0,278	0,213	0,199	0,176	0,119	0,073	0,025	0,014	0,009	0,004
97		0,522	0,400	0,302	0,275	0,242	0,170	0,141	0,069	0,049	0,014	0,008
95		0,575	0,464	0,387	0,310	0,286	0,217	0,181	0,107	0,077	0,021	0,015
90		0,661	0,578	0,525	0,436	0,374	0,305	0,271	0,189	0,154	0,045	0,034
80		0,754	0,706	0,657	0,597	0,520	0,465	0,401	0,341	0,301	0,107	0,084
75		0,803	0,754	0,713	0,666	0,581	0,537	0,469	0,411	0,365	0,148	0,126
70		0,844	0,806	0,765	0,727	0,652	0,609	0,564	0,474	0,435	0,193	0,168
60		0,930	0,920	0,896	0,857	0,802	0,774	0,717	0,651	0,589	0,317	0,290
50		0,998	1,045	1,047	1,010	0,973	0,940	0,915	0,872	0,827	0,523	0,352
40		1,102	1,179	1,199	1,224	1,194	1,187	1,169	1,125	1,122	0,830	0,791
30		1,246	1,360	1,425	1,496	1,502	1,533	1,582	1,542	1,578	1,446	1,353
25		1,348	1,507	1,593	1,752	1,718	1,817	1,904	1,883	1,964	1,980	1,949
20		1,459	1,660	1,790	1,890	2,013	2,137	2,260	2,275	2,419	2,685	2,713
10		1,647	1,927	2,135	2,318	2,511	2,736	2,959	2,730	3,226	4,217	4,433
5		1,907	2,241	2,575	2,915	3,242	3,722	3,949	4,221	4,586	5,612	5,923
3		2,016	2,378	2,768	3,187	3,634	4,197	4,531	4,960	5,365	7,092	9,668
1		2,262	2,706	3,192	3,711	4,268	4,987	5,447	6,078	6,894	12,772	15,992
0,5		2,287	2,739	3,233	3,757	4,334	5,056	5,571	6,244	7,170	15,089	18,516
0,3		2,304	2,749	3,261	3,790	4,379	5,088	5,615	6,478	7,204	15,462	19,056
0,1		2,316	2,768	3,284	3,818	4,419	5,120	5,669	6,341	7,248	16,570	20,356

$C_{v_t} = 0,3$									$C_{v_t} = 0,8$		
C_{v_s}	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,8	0,9	1,0
p											
99,0	0,160	0,122	0,093	0,042	0,025	0,020	0,015	0,008	0,001	0,001	0,001
99,7	0,257	0,193	0,124	0,090	0,043	0,041	0,020	0,010	0,002	0,001	0,001
99,5	0,277	0,212	0,133	0,105	0,068	0,047	0,023	0,012	0,003	0,002	0,002
99	0,307	0,240	0,156	0,132	0,093	0,061	0,038	0,017	0,005	0,005	0,003
97	0,373	0,315	0,220	0,195	0,161	0,095	0,076	0,050	0,016	0,014	0,010
95	0,427	0,370	0,275	0,237	0,204	0,129	0,114	0,084	0,027	0,023	0,017
90	0,520	0,454	0,381	0,322	0,285	0,196	0,174	0,134	0,055	0,046	0,034
80	0,643	0,587	0,514	0,443	0,402	0,325	0,295	0,235	0,138	0,108	0,102
75	0,700	0,642	0,578	0,512	0,464	0,393	0,356	0,294	0,193	0,169	0,137
70	0,757	0,709	0,647	0,586	0,526	0,467	0,424	0,361	0,248	0,215	0,171
60	0,883	0,846	0,803	0,744	0,668	0,630	0,583	0,546	0,399	0,339	0,307
50	1,027	1,008	0,972	0,918	0,873	0,826	0,780	0,782	0,593	0,554	0,495
40	1,193	1,185	1,170	1,145	1,126	1,104	1,098	1,034	0,908	0,877	0,803
30	1,400	1,453	1,486	1,477	1,541	1,504	1,553	1,488	1,431	1,385	1,401
25	1,557	1,630	1,899	1,725	1,826	1,843	1,864	1,77	1,927	1,909	1,913
20	1,734	1,850	2,072	2,005	2,154	2,209	2,273	2,144	2,560	2,555	2,631
10	2,094	2,307	2,491	2,617	2,940	3,116	2,621	3,448	3,923	4,048	4,237
5	2,354	2,638	4,890	3,108	3,491	3,699	4,053	4,314	5,148	5,295	5,672
3	2,817	3,248	3,692	4,116	4,717	5,081	5,591	6,080	7,818	8,435	9,157
1	3,167	3,717	4,389	4,892	5,701	6,213	6,918	7,635	11,644	13,124	14,673
0,5	3,254	3,834	4,600	5,107	5,857	6,569	7,362	8,140	13,039	15,008	16,252
0,3	3,311	3,908	4,712	5,259	6,041	6,725	7,590	8,433	13,743	15,822	16,890
0,1	3,349	3,961	4,776	5,344	6,151	6,930	7,785	8,627	14,481	16,108	18,045

$C_{v_t} = 0,4$								$C_{v_t} = 0,7$			
C_{v_s}	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,7	0,8	0,9	1,0
p											
99,9	0,102	0,068	0,056	0,051	0,040	0,009	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002
99,7	0,135	0,076	0,062	0,058	0,056	0,018	0,008	0,006	0,004	0,003	0,002
99,5	0,144	0,087	0,068	0,066	0,064	0,027	0,010	0,008	0,005	0,004	0,002
99	0,172	0,103	0,087	0,080	0,072	0,036	0,015	0,024	0,015	0,010	0,006
97	0,232	0,162	0,137	0,131	0,120	0,071	0,030	0,039	0,023	0,014	0,009
95	0,283	0,217	0,187	0,183	0,168	0,116	0,050	0,051	0,030	0,023	0,016
90	0,381	0,330	0,280	0,285	0,256	0,224	0,109	0,115	0,101	0,084	0,062
80	0,516	0,455	0,405	0,438	0,408	0,376	0,228	0,206	0,171	0,172	0,140
75	0,576	0,520	0,430	0,504	0,480	0,474	0,288	0,276	0,239	0,239	0,187
70	0,637	0,590	0,554	0,577	0,552	0,554	0,347	0,448	0,289	0,267	0,234
60	0,781	0,742	0,704	0,753	0,736	0,751	0,496	0,494	0,453	0,478	0,390
50	0,953	0,877	0,910	0,965	0,976	1,020	0,735	0,713	0,667	0,689	0,593
40	1,162	1,164	1,171	1,264	1,272	1,342	1,062	1,023	0,981	0,999	0,937
30	1,459	1,495	1,545	1,696	1,720	1,834	1,598	1,517	1,484	1,533	1,467
25	1,692	1,782	1,857	2,017	2,096	2,281	2,055	1,954	1,987	2,011	1,967
20	1,966	2,090	2,205	3,463	2,560	2,755	2,581	2,494	2,553	2,672	2,701
10	2,463	2,702	2,941	3,362	3,559	3,327	3,703	3,620	3,811	4,079	4,199
5	2,872	3,206	3,520	3,983	4,143	4,422	4,686	4,528	4,830	5,204	5,464
3	3,607	4,127	4,673	5,350	5,193	6,217	6,771	6,757	7,257	7,947	8,617
1	4,299	4,983	5,701	6,651	7,240	8,951	8,786	9,930	10,631	11,905	13,050
0,5	4,504	5,250	6,013	7,118	7,688	8,583	9,513	10,252	11,493	13,256	14,649
0,3	4,575	5,342	6,131	7,174	7,866	8,798	9,754	10,701	11,998	13,700	15,178
0,1	4,669	5,455	6,298	7,320	8,048	9,026	10,014	11,203	12,665	14,505	16,187

$C_{v_1} = 0,5$							$C_{v_2} = 0,6$					
ρ	C_{v_2}	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
99,9		0,050	0,0029	0,021	0,019	0,017	0,011	0,063	0,028	0,006	0,004	0,002
99,7		0,069	0,036	0,025	0,023	0,021	0,015	0,069	0,034	0,015	0,008	0,004
99,5		0,082	0,043	0,034	0,028	0,026	0,017	0,075	0,038	0,021	0,014	0,006
99		0,101	0,073	0,045	0,036	0,030	0,019	0,083	0,048	0,032	0,020	0,011
97		0,158	0,094	0,068	0,065	0,042	0,021	0,114	0,075	0,059	0,044	0,020
95		0,196	0,123	0,102	0,093	0,082	0,023	0,141	0,101	0,080	0,064	0,035
90		0,271	0,218	0,179	0,158	0,104	0,069	0,204	0,162	0,129	0,108	0,072
80		0,410	0,341	0,306	0,280	0,208	0,173	0,250	0,281	0,300	0,192	0,149
75		0,479	0,406	0,366	0,335	0,271	0,220	0,386	0,340	0,379	0,240	0,206
70		0,549	0,472	0,426	0,382	0,344	0,278	0,459	0,402	0,344	0,295	0,266
60		0,707	0,632	0,613	0,568	0,500	0,451	0,626	0,578	0,517	0,456	0,413
50		0,858	0,820	0,826	0,783	0,719	0,555	0,827	0,784	0,729	0,684	0,626
40		1,155	1,082	1,107	1,016	1,042	0,995	1,111	1,097	1,062	0,983	0,958
30		1,546	1,510	1,575	1,566	1,563	1,515	1,553	1,636	1,587	1,499	1,517
25		1,855	1,800	1,933	1,985	2,011	2,013	1,929	2,057	2,037	1,954	2,063
20		2,208	2,178	2,367	2,460	2,553	2,614	2,380	2,547	2,541	2,518	2,595
10		2,776	3,013	3,364	3,569	3,804	3,875	3,341	3,674	3,699	3,825	4,019
5		3,603	3,848	4,215	4,371	4,638	4,928	4,051	4,448	4,653	4,868	5,004
3		4,619	5,176	5,927	6,300	6,795	7,346	5,245	6,721	6,755	7,315	7,852
1		5,742	6,534	7,300	7,456	7,712	7,866	6,959	8,708	9,285	10,191	11,233
0,5		6,088	6,981	8,239	9,130	10,029	10,845	7,129	9,162	10,009	11,212	12,401
0,3		6,140	7,160	8,469	9,404	10,978	11,944	7,444	9,545	10,491	11,794	12,916
0,1		6,432	7,302	8,797	9,762	11,293	12,709	7,868	10,042	11,060	12,456	13,668