

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. Т. Хачатурян

О динамическом расчете цилиндрических оболочек

Основные уравнения

Оси координат для цилиндрической оболочки расположим так: x —по образующей, y —по дуге круга, z —по внутренней нормали к поверхности оболочки. Начало координат поместим в одном из углов оболочки.

Обозначим:

R —радиус оболочки,

δ —ее толщина,

a —длина образующей,

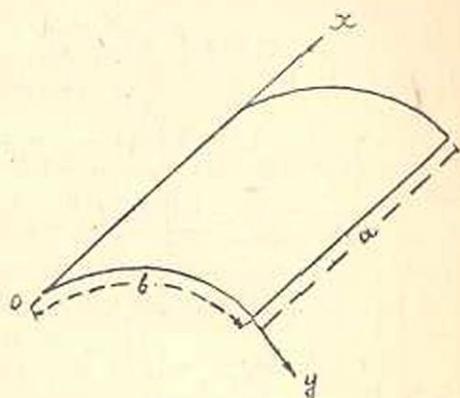
b —длина дуги круга,

μ —масса на единицу поверхности,

E —модуль Юнга,

σ —коэффициент Пуассона,

p —частота вынуждающей силы.



Черт. 1

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\sigma^2)}; \quad B = \frac{E\delta}{1-\sigma^2} \quad 1.1$$

$X(x, y, t)$, $Y(x, y, t)$, $Z(x, y, t)$ —компоненты внешней периодической нагрузки, отнесенной к единице поверхности оболочки.

$$X(x, y, t) = X \sin(pt + \alpha)$$

$$Y(x, y, t) = Y \sin(pt + \alpha) \quad 1.2$$

$$Z(x, y, t) = Z \sin(pt + \alpha)$$

$U(x, y, t)$, $V(x, y, t)$, $W(x, y, t)$ —компоненты перемещения точки средней поверхности вдоль координатных осей x , y , z :

$$U(x, y, t) = u \sin(pt + \alpha)$$

$$V(x, y, t) = v \sin(pt + \alpha) \quad 1.3$$

$$W(x, y, t) = w \sin(pt + \alpha)$$

u , v , w , а также X, Y, Z зависят только от координат x, y .

В соответствии с технической теорией оболочек, предложенной В. З. Власовым [1], из условий равновесия элемента оболочки получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_1^2 + \frac{1-\sigma}{2} \partial_2^2 + \vartheta \right) u + \frac{1+\sigma}{2} \partial_1 \partial_2 v - \frac{\sigma}{R} \partial_1 w = -\frac{X}{B} \\ & \frac{1+\sigma}{2} \partial_1 \partial_2 u + \left(\partial_2^2 + \frac{1-\sigma}{2} \partial_1^2 + \vartheta \right) v - \frac{1}{R} \partial_2 w = -\frac{Y}{B} \quad 1.4 \\ & -\frac{\sigma}{R} \partial_1 u - \frac{1}{R} \partial_2 v + \left(\frac{\partial^2}{12} \Delta^4 + \frac{1}{R^2} - \vartheta \right) w = \frac{Z}{B}, \end{aligned}$$

где: $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad \vartheta = \mu \frac{p^2}{B}$

$$\Delta^4 = \partial_1^4 + 2\vartheta \partial_1 \partial_2^2 + \partial_2^4 \quad 1.5$$

Усилия T_1, T_2, S и моменты M_1, M_2, H определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} T_1 &= B \left(\partial_1 u + \sigma \partial_2 v - \frac{\sigma}{R} w \right) \sin(pt + \alpha) \\ T_2 &= B \left(\partial_2 v - \frac{1}{R} w + \sigma \partial_1 u \right) \sin(pt + \alpha) \quad 1.6 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1-\sigma}{2} B (\partial_2 u + \partial_1 v) \sin(pt + \alpha)$$

$$M_1 = -D \left(\partial_1^2 w + \sigma \partial_2^2 w \right) \sin(pt + \alpha)$$

$$M_2 = -D \left(\partial_2^2 w + \sigma \partial_1^2 w \right) \sin(pt + \alpha)$$

$$H = -(1-\sigma) D \partial_1 \partial_2 w \sin(pt + \alpha) \quad 1.7$$

Задача приводится к определению u, v, w из уравнений (1.4), после чего перемещения, усилия и моменты в оболочке соответственно будут определяться из (1.3), (1.6) и (1.7).

В том случае, когда $X=Y=0$, первым двум уравнениям (1.4) можно удовлетворить, полагая

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial_1}{R} \left\{ \sigma \vartheta - \frac{1-\sigma}{2} \left[\Delta^2 - (1+\sigma) \partial_1^2 \right] \right\} \varphi \\ v &= \frac{\partial_2}{R} \left\{ \vartheta + \frac{1-\sigma}{2} \left[\Delta^2 + (1+\sigma) \partial_1^2 \right] \right\} \varphi \quad 1.8 \\ w &= (\Delta^2 + \vartheta) \left(\frac{1-\sigma}{2} \Delta^2 + \vartheta \right) \varphi \end{aligned}$$

Последнее из уравнений (1.4), при этом приведет к следующему виду:

$$(A - A_1 \vartheta + A_2 \vartheta^2 - \vartheta^3) \varphi = \frac{Z}{B} \quad 1.9$$

где A, A_1 и A_2 означают следующие дифференциальные операции:

$$A = \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{\delta^2}{12} \Delta^6 + \frac{1-\sigma^2}{R^2} \delta_1^4 \right)$$

$$A_1 = -\frac{3-\sigma}{2} \cdot \frac{\delta^2}{12} \Delta^6 + \frac{1-\delta}{2} \Delta^4 - \frac{1-\sigma}{2} \frac{\delta^2}{R^2} + 3 \frac{\delta_1^2}{R^2}$$

$$A_2 = \frac{\delta^2}{12} \Delta^4 - \frac{3-\sigma}{2} \Delta^2 + \frac{1}{R^2}$$
1.10

Если в (1.4) $X = Z = 0$, $Y \neq 0$, аналогичным образом три уравнения (1.4) приводятся к одному уравнению:

$$(A - A_1 \delta + A_2 \delta^2 - \delta^3) \varphi = -\frac{Y}{B}$$
1.11

Наконец при $Y = Z = 0$, $X \neq 0$, получим

$$(A - A_1 \delta + A_2 \delta^2 - \delta^3) \Theta = -\frac{X}{B}$$
1.12

В этих уравнениях (1.11) и (1.12) A , A_1 и A_2 означают те же самые операции (1.10), что и в уравнении (1.9).

Вывод уравнений (1.9), (1.11), (1.12) и подстановок (1.8) (и им аналогичных) легче всего дать применением метода А. И. Лурье [2]. При $\delta = 0$ имеем случай статического действия сил. Уравнения (1.9), (1.11) и (1.12) в этом случае принимают вид:

$$A\varphi = \frac{Z}{B}; \quad A\psi = -\frac{Y}{B}; \quad A\Theta = -\frac{X}{B}$$
1.13

Эти уравнения (1.13) получены нами в другой нашей работе [3]. В (1.10) подчеркнутые члены, по сравнению с остальными членами, входящими в соответствующие выражения, малы как $\frac{\delta}{R}$ по сравнению с единицей. Этими членами можно пренебрегать или же прибавить в выражениях (1.10) такого же порядка новые члены.

Учитывая это, уравнения (1.9), (1.11) и (1.12) можем представить так:

$$(\Delta^2 + \delta) \left(\frac{1-\sigma}{2} \Delta^2 + \delta \right) \left(\frac{\delta^2}{12} \Delta^4 + \frac{1-\sigma^2}{R^2} \cdot \frac{\delta_1^4}{\Delta^4} - \delta \right) \varphi = \frac{Z}{B}$$

$$(\Delta^2 + \delta) \left(\frac{1-\sigma}{2} \Delta^2 + \delta \right) \left(\frac{\delta^2}{12} \Delta^4 + \frac{1-\sigma^2}{R^2} \cdot \frac{\delta_1^4}{\Delta^4} - \delta \right) \psi = -\frac{Y}{B}$$

$$(\Delta^2 + \delta) \left(\frac{1-\sigma}{2} \Delta^2 + \delta \right) \left(\frac{\delta^2}{12} \Delta^4 + \frac{1-\sigma^2}{R^2} \cdot \frac{\delta_1^4}{\Delta^4} - \delta \right) \Theta = -\frac{X}{B}$$
1.14

В развернутом виде эти уравнения дают следующие выражения для A , A_1 и A_2 :

$$A = \frac{1-\delta}{2} \left(\frac{\delta^2}{12} \Delta^8 + \frac{1-\sigma^2}{R^2} \partial_1^4 \right)$$

$$A_1 = -\frac{3-\sigma}{2} \cdot \frac{\delta^2}{12} \Delta^6 + \frac{1-\sigma}{2} \Delta^4 - \frac{3-\sigma}{2} \cdot \frac{1-\sigma^2}{R^2} \cdot \frac{\partial_1^4}{\Delta^2} \quad 1.15$$

$$A_2 = \frac{\delta^2}{12} \Delta^4 - \frac{3-\sigma}{2} \Delta^2 + \frac{1-\sigma^2}{R^2} \cdot \frac{\partial_1^4}{\Delta^4}$$

Сравнивая (1.15) и (1.10), замечаем, что они, в основном, совпадают; только значения A_1 и A_2 отличаются малыми, несущественными членами (подчеркнутыми в (1.10) и (1.15)). Ниже, при построении расчетных формул мы будем основываться на уравнениях (1.14).

Частоты собственных колебаний

При отсутствии вынуждающей силы оболочка совершает собственные колебания, которые описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$(\Delta^2 + \vartheta) \left(\frac{1-\sigma}{2} \Delta^2 + \vartheta \right) \left(\frac{\sigma^2}{12} \Delta^4 + \frac{1-\sigma^2}{R^2} \cdot \frac{\partial_1^4}{\Delta^4} - \vartheta \right) \varphi = 0 \quad 2.1$$

(2.1) распадается на три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi_1 + \vartheta \varphi_1 &= 0 \\ \frac{1-\sigma}{2} \Delta^2 \varphi_2 + \vartheta \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 2.2$$

$$\frac{\delta^2}{12} \nabla^8 \varphi_3 + \frac{1-\sigma^2}{R^2} \partial_1^4 \varphi_3 - \vartheta \nabla^4 \varphi_3 = 0 \quad 2.3$$

Уравнения (2.2) определяют частоты колебаний в касательной плоскости; последнее уравнение определяет частоту радиальных колебаний.

Частоты собственных колебаний наиболее просто определяются в тех случаях, когда в качестве интегралов уравнений (2.2) и (2.3) можно брать тригонометрические члены (m и n целые числа):

$$\varphi_1 = \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad 2.4$$

$$\varphi_1 = \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad 2.5$$

$$\varphi_1 = \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad 2.6$$

$$\varphi_1 = \text{Cos} \frac{m\pi x}{a} \text{cs} \frac{n\pi y}{b} \quad 2.7$$

Как видно из (1.8) и (1.6) (1.7) представление интегралов уравнений (2.2) и (2.3) в виде (2.4)–(2.7) возможно при следующих закреплениях оболочки по ее контуру:

I. В случае (2.4)

$$\begin{aligned} v = w = T_1 = M_1 = 0 & \quad \text{при } x=0, x=a \\ u = w = T_2 = M_2 = 0 & \quad \text{при } y=0, y=b \end{aligned} \quad 2.8$$

II. В случае (2.5)

$$\begin{aligned} v = w = T_1 = M_1 = 0 & \quad \text{при } x=0, x=a \\ v = \delta \frac{\partial w}{\partial y} = S - \frac{\partial n}{\partial x} = 0 & \quad \text{при } y=0, y=b \end{aligned} \quad 2.9$$

III. В случае (2.6)

$$\begin{aligned} v = \frac{\partial w}{\partial x} = S = N_1 - \frac{\partial n}{\partial y} = 0 & \quad \text{при } x=0, x=a \\ u = w_2 = T_2 = M_2 = 0 & \quad \text{при } y=0, y=b \end{aligned} \quad 2.10$$

IV. В случае (2.7)

$$\begin{aligned} v = \frac{\partial w}{\partial x} = S = N_1 - \frac{\partial n}{\partial y} = 0 & \quad \text{при } x=0, x=a \\ v = \frac{\partial w}{\partial y} = S = N_2 - \frac{\partial n}{\partial x} = 0 & \quad \text{при } y=0, y=b \end{aligned} \quad 2.11$$

При всех граничных условиях (2.8), (2.9), (2.10) и (2.11) подстановкой (2.4–2.7) в (2.2) и (2.3) получим следующие уравнения, содержащие частоты собственных колебаний K_{mn} , которые связаны с параметром δ формулой (см. 1.5):

$$K_{mn}^2 = \delta \frac{B}{\mu} \quad 2.12$$

$$K_{mn}^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + \lambda^2 n^2) \cdot \frac{B}{\mu} \quad 2.13$$

$$K_{mn}^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + \lambda^2 n^2) \cdot \frac{B}{\mu} \cdot \frac{1 - \delta}{2} \quad 2.14$$

$$K_{mn}^2 = \frac{\pi^4 D}{\mu a^4} \left[(m^2 + \lambda^2 n^2)^2 + \frac{hm^4}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right] \quad 2.15$$

В эти уравнения введены обозначения:

$$\lambda = \frac{a}{b}; \quad h = \frac{12(1 - \nu)\sigma^2}{R^2 \delta^2} \cdot \frac{a^4}{\pi^4} \quad 2.16$$

Уравнения (2.13–2.15) дают спектр частот цилиндрической оболочки ($m=1,2,3,\dots$, $n=1,2,3,\dots$).

Для практических целей важным является наименьшая частота. Из (2.14) получим низшие частоты колебаний в касательной плоскости (полагая $m = n = 1$).

$$k_{11} = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{1 + \lambda^2}{2(1 + \sigma)} \cdot \frac{E\delta}{\mu}} \quad (2.17)$$

Для определения низшей частоты радиальных колебаний оболочки можем поступить так: из (2.15) имеем.

$$(m^2 + \lambda^2 n^2)^2 = \frac{a^4 \mu}{2\pi^4 D} k_{mn}^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a^4 \mu}{2\pi^4 D} k_{mn}^2\right)^2 - h m^4} \quad (2.18)$$

Подкоренное выражение, входящее в эту формулу, не может быть отрицательным числом. Отсюда следует, что наименьшее значение K_{mn} будет определяться так: ($m=1$)

$$k_{min} = k = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{2 \cdot \frac{D}{\mu} \cdot \sqrt{h}} \quad (2.19)$$

Из сравнения (2.17) и (2.19) замечаем, что всегда $k < k_{11}$, поэтому формулой (2.19) определяется наименьшая частота оболочки.

В работе А. П. Филиппова [4] приведен пример численного определения наименьшей частоты оболочки, свободно опертой по контуру при следующих данных:

$$\sigma = \frac{1}{6}; \quad \frac{\pi R}{a} = 0,631; \quad \frac{\delta}{R} = 0,002 \sqrt{30}$$

Основываясь на более сложных уравнениях, после длинных вычислений, Филиппов получает:

$$k_{min} = 0,0525 \sqrt{\frac{E\delta}{\mu R^2(1-\sigma^2)}}$$

Если данные этого примера непосредственно подставим в (2.19), то найдем:

$$k_{min} = k = 0,050 \sqrt{\frac{E\delta}{\mu R^2(1-\sigma^2)}}$$

Как видно, оба значения k_{min} достаточно близки друг к другу. Это указывает на то, что уравнения технической теории цилиндрических оболочек (1.4) описывают колебания оболочек с той же практической точностью, как и вариант более точной теории, принятой в основу работы Филиппова. Преимущество формулы (2.19) заключается, прежде всего, в ее простоте. Кроме этого, эта формула дает несколько пониженное значение для k_{min} (видно из вывода формулы) что также полезно в смысле запаса прочности.

При граничных условиях оболочки, отличных от (2.8), (2.9), (2.10) и (2.11), характеристические уравнения, определяющие частоты колебаний, будут очень сложными трансцендентными уравнениями.

ми. Однако известно, что некоторые из граничных условий (например заделки), усложняя математическую постановку вопроса, в конечном итоге оказывают очень слабое влияние на величину частоты основного тона.

Если оболочка имеет опоры на криволинейных краях, где обеспечиваются условия $w = v = 0$, то наименьшую частоту колебания можно приближенно определить по формуле (2.19) независимо от остальных условий закрепления оболочки по ее краям.

О динамическом расчете цилиндрических оболочек

Определение перемещений и усилий в цилиндрической оболочке, когда действуют периодические внешние нагрузки, связано с большими техническими трудностями, вызванными сложностью получающихся расчетных формул. Поэтому, построение простейших формул, определяющих приближенно перемещения и усилия в оболочке, представляет практический интерес. С этой целью ниже мы приводим достаточно удобные формулы для расчета свободно опертой по контуру цилиндрической оболочки при действии периодических сил и сравниваем полученные вполне точные результаты с результатами, даваемыми известной в строительной механике формулой.

$$A_{\text{дин}} = A_{\text{ст}} \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}} \quad 3.1$$

Для избежания резонанса полагаем, что частота вынуждающей силы p меньше наименьшей частоты собственных колебаний оболочки k .

а) Свободно опертая по контуру оболочка при действии сосредоточенной периодической силы P .

Если оболочка по контуру свободно оперта (выполняются условия 2,8), то решение уравнения (1,4) можно представить в виде двойного ряда

$$\varphi = \sum \sum A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad 3.2$$

Пусть в точке $x = \xi$; $y = \eta$ оболочки действует нормальная к ее поверхности периодическая сосредоточенная сила с амплитудой $Z = P$. Разлагая P также в двойной ряд

$$Z = P = \sum \sum B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad 3.3$$

и подставив (3.2) и (3.3) в (1.14), после определения коэффициентов B_{mn} и A_{mn} получим следующее решение для φ :

$$\varphi = \frac{4Pa^3\lambda}{\pi^8 D} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(g_{mn}^2 + \frac{hm^4}{g_{mn}} - rs\right) \left(g_{mn} - r\right) \left(\frac{1-\sigma}{2} g_{mn} - r\right)} \quad 3.4$$

где:

$$g_{mn} = m^2 + \lambda^2 n^2; \quad S = \frac{12a^2}{\pi^2 \delta^2}; \quad r = \frac{a^2}{\pi^2} \mu p^2 \frac{1-\sigma^2}{E\delta} \quad (3.5)$$

коэффициенты λ и h определяются по (2.16).

Знаменатели членов ряда (3.4) можно несколько упростить. Покажем, что $g_{mn} - r \approx g_{mn}$, т. е. можно отбросить r из за малости по сравнению с g_{mn} .

$$g_{mn} - r = g_{mn} (1 - \varepsilon); \quad \varepsilon = \frac{r}{g_{mn}} = \frac{1-\sigma^2}{E\delta} \cdot \frac{\mu a^2}{\pi^2} \frac{p^2}{m^2 + \lambda^2 n^2} \quad (3.6)$$

Величина ε достигает максимума при $m=n=1$ и $p=p_{\max}$. Но p_{\max} должен быть меньше наименьшей частоты собственных колебаний, определяемой формулой (2.19).

Из этих условий получаем:

$$\varepsilon_{\max} < \sqrt{\frac{1-\sigma^2}{3}} \cdot \frac{1}{1+\lambda^2} \cdot \frac{\delta}{R} < \frac{\delta}{R}$$

Следовательно можем принимать $1 - \varepsilon \approx 1$.

Учитывая это, а также формулы (2.15), (2.16) и (3.5), можем вместо (3.4) представить φ так:

$$\varphi = \frac{8 P a^6 \lambda}{\pi^8 D (1-\sigma)} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}}{g_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \quad (3.7)$$

где для удобства вместо частот собственных колебаний k_{mn} и вынужденных колебаний p введены безразмерные коэффициенты ω_{mn} и β

$$K_{mn} = \omega_{mn} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\mu}}; \quad p = \beta \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\mu}} \quad (3.8)$$

Согласно (2.15)

$$\omega_{mn}^2 = g_{mn}^2 + \frac{h m^4}{g_{mn}^2} = (m^2 + \lambda^2 n^2)^2 + \frac{h m^4}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \quad (3.9)$$

Согласно (2.19)

$$\omega_{min} = \omega = \sqrt{2\sqrt{h}} \quad (3.10)$$

При $\beta = 0$ сила P будет действовать статически.

Поэтому, пользуясь тождеством:

$$\frac{1}{\omega_{mn}^2 - \beta^2} = \frac{1}{\omega_{mn}^2} + \beta^2 \frac{1}{\omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)}, \quad (3.11)$$

формулу (3.7) можем переписать так

$$\varphi = \varphi_{em} + \frac{8 P \lambda a^6}{\pi^8 D (1-\sigma)} \cdot \beta^2 \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}}{g_{mn}^2 \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \quad (3.12)$$

Здесь $\varphi_{ст}$ дает решение задачи при статическом действии сосредоточенной силы P .

Подставив значение φ в (1.8) и (1.7) (приняв в последних $\sin(pt + \alpha) = 1$), для основных расчетных величин w , M_1 , M_2 , T_1 и T_2 получим следующие решения (пренебрегая при этом величиной r по сравнению с g_{mn} там, где это нужно):

$$w = w_{ст} + \frac{4Pa^2\lambda}{\pi^2 D} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi\eta}{b} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \quad 3.13$$

$$M_1 = M_{1ст} + \frac{4P\lambda\beta^2}{\pi^2} \sum \sum \frac{m^2 + \sigma\lambda^2 n^2}{\omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad 3.14$$

$$M_2 = M_{2ст} + \frac{4P\lambda\beta^2}{\pi^2} \sum \sum \frac{\sigma m^2 + \lambda^2 n^2}{\omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$T_1 = T_{1ст} - \frac{4P\lambda^2 R h}{a^2} \beta^2 \sum \sum \frac{m^2 n^2}{g_{mn}^2 \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad 3.15$$

$$T_2 = T_{2ст} - \frac{4P\lambda R h}{a^2} \beta^2 \sum \sum \frac{m^4}{g_{mn}^2 \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Полагая статические величины известными, по формулам (3.13)–(3.15) динамические величины можно вычислить очень просто, так как ряды, представляющие члены корректива, сходятся очень быстро. Выделение из общего решения (3.10) статической части привело к улучшению сходимости рядов по обоим индексам m и n на четыре степени.

Численный пример. В центре оболочки, с равными сторонами по дуге круга и по образующей приложена периодическая сила с частотой, характеризуемой числом $\beta=2$. Определим прогиб w в точке приложения силы при некоторых отношениях частоты вынуждающей силы к частоте основного тона колебания оболочки.

Полагая в (3.13) $x = \xi = \frac{a}{2}$; $y = \eta = \frac{b}{2}$ и $\lambda = 1$ имеем

$$w = w_{ст} + \frac{4Pa^2}{\pi^2 D} \beta^2 \sum \sum \frac{1}{\omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \quad 3.16$$

Представим эту формулу в виде:

$$w = \gamma_{дин} \cdot \frac{Pa^2}{D} \quad 3.17$$

где:

$$\gamma_{дин} = \gamma_{ст} + \gamma_{кор}$$

для коэффициента $\gamma_{ст}$ нами ранее [3] дана формула:

$$\gamma_{ст} = 0,0116 - \frac{1}{\pi^4} \cdot \frac{h}{16+h} - \frac{0,04}{\pi^4} \cdot \frac{h}{123+h} \quad (3.18)$$

Для коэффициента корректива, из (3.16) имеем

$$\gamma_{кор} = \frac{4\beta^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{1}{\omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)}, \quad (3.19)$$

где ω_{mn} дается формулой (3.9); m и n нечетные числа.

При вычислении $\gamma_{кор}$ из (3.19) можем ограничиться первыми двумя членами ряда $m = n = 1$ и $m = 1, n = 3$. Получим:

$$\gamma_{кор} = \frac{2,63}{h(16+h)} + \frac{0,164}{\left(100 + \frac{h}{100}\right) \left(96 + \frac{h}{100}\right)} \quad (3.20)$$

При различных h по (3.18) и (3.20) можно вычислить коэффициенты $\gamma_{ст}$ и $\gamma_{кор}$ и, следовательно, $\gamma_{дин}$.

Соблюдая условия задачи, параметр h подберем из (3.10):

$$\frac{\beta}{\omega} = \frac{\beta}{\sqrt{2}\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}}$$

$$\text{отсюда} \quad h = 4 \left(\frac{\omega}{\beta} \right)^4 \quad (3.21)$$

В таблице 1 помещены значения $\gamma_{ст}$, $\gamma_{кор}$ и $\gamma_{дин}$, вычисленные по формулам (3.21), (3.18) и (3.20). В нижней строке таблицы приведены коэффициенты $\gamma'_{дин}$, вычисленные по формуле (3.1), т. е.

$$\gamma'_{дин} = \gamma_{ст} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}} \quad (3.22)$$

Таблица 1

| | | | | | | | |
|--------------------------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| $\frac{\beta}{\omega} =$ | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 |
| $h =$ | 6,1 | 9,75 | 16,7 | 30,8 | 64 | 156 | 495 |
| $10^4 \gamma_{ст} =$ | 87,5 | 76,7 | 63,2 | 47,7 | 32,6 | 20,7 | 13,3 |
| $10^4 \gamma_{кор} =$ | 195,2 | 105,2 | 48,4 | 18,5 | 5,4 | 1,2 | 0,3 |
| $10^4 \gamma_{дин} =$ | 282,7 | 181,9 | 111,6 | 66,2 | 38 | 21,9 | 13,6 |
| $10^4 \gamma'_{дин} =$ | 460 | 215 | 124 | 74,6 | 43,4 | 24,7 | 14,6 |

В пределах теории описываемые дифференциальными уравнениями (1.4) формулы (3.18) и (3.20) дают вполне точные значения для $\gamma_{дин}$. С другой стороны, как видно из таблицы, при $\beta:\omega < 0,75$ значения $\gamma_{дин}^1$ близки к значениям $\gamma_{дин}$. Отсюда можно делать вывод, что при действии на оболочку сосредоточенных периодических сил формула (3.1) дает практически приемлемые значения для радиального перемещения W вне зоны резонанса, т. е. $\beta:\omega < 0,75$

6) Свободно опертая по контуру оболочка при действии равномерно распределенной периодической нагрузки $q = q \sin(\rho t + \alpha)$

Если нагрузка приложена нормально по всей поверхности оболочки, то решение задачи получим из (3.13)–(3.15) путем замены P через $q \delta x \delta y$ и интегрирования формул в пределах от $\xi=0, \eta=0$ до $\xi=a, \eta=b$

Получим:

$$W = W_{ст} + \frac{16 q a^4}{\pi^6 D} \beta^2 \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \quad (3.23)$$

$$M_1 = M_{1ст} + \frac{16 q a^2}{\pi^4} \beta^2 \sum \sum \frac{m^2 + \sigma \lambda^2 n^2}{mn \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.24)$$

$$M_2 = M_{2ст} + \frac{16 q a^2}{\pi^4} \beta^2 \sum \sum \frac{\sigma m^2 + \lambda^2 n^2}{mn \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$T_1 = T_{1ст} - qR \frac{16 h \lambda^2}{\pi^2} \beta^2 \sum \sum \frac{mn}{g_{mn}^2 \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.25)$$

$$T_2 = T_{2ст} - qR \frac{16 h}{\pi^2} \beta^2 \sum \sum \frac{m^2}{ng_{mn}^2 \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 - \beta^2)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

В формулах (3.23)–(3.25) индексы m и n нечетные числа.

При условиях предыдущего численного примера вычислим по формулам (3.23) и (3.24) значения прогиба W и моментов M_1, M_2 в центре оболочки. Коэффициент Пуассона примем $\sigma=0,3$.

Полагая $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, \lambda = 1$ формулы (3.23) и (3.24)

представим так:

$$W = \gamma_{дин} \cdot \frac{q a^4}{D} \quad (3.26)$$

$$M_1 = \mu_{дин} \cdot q a^2$$

$$M_2 = \mu_{дин} \cdot q a^2,$$

где:

$$\gamma_{дин} = \gamma_{ст} + \gamma_{кор}$$

$$\mu_{\text{дин}} = \mu_{\text{ст}} + \mu_{\text{кор}}$$

$$\mu_{2\text{дин}} = \mu_{2\text{ст}} + \mu_{2\text{кор}}$$

Для коэффициентов статического прогиба и моментов в нашей другой работе [3] даны формулы:

$$\gamma_{\text{ст}} = 0,00406 - \frac{4}{\pi^6} \cdot \frac{h}{16+h} + \frac{0,16}{\pi^6} \cdot \frac{h}{378+3h}$$

$$\mu_{1\text{ст}} = 0,0479 - \frac{0,0534}{16+h} h + \frac{0,00508}{124+h} \quad 3.28$$

$$\mu_{2\text{ст}} = 0,0479 - \frac{0,0534}{16+h} \cdot h + \frac{0,00202}{124+h} h$$

Ограничиваясь в рядах, представляющих члены корректива, первыми двумя членами $m=n=1$ и $m=1, n=3$, получим

$$\gamma_{\text{кор}} = \frac{1,065}{h(16+h)} - \frac{0,0221}{\left(100 + \frac{h}{100}\right)\left(96 + \frac{h}{100}\right)}$$

$$\mu_{1\text{кор}} = \frac{13,7}{h(16+h)} - \frac{0,81}{\left(100 + \frac{h}{100}\right)\left(96 + \frac{h}{100}\right)} \quad 3.29$$

$$\mu_{2\text{кор}} = \frac{13,7}{h(16+h)} - \frac{2,03}{\left(100 + \frac{h}{100}\right)\left(96 + \frac{h}{100}\right)}$$

В таблице 2 помещены значения статических и динамических коэффициентов, вычисленные по формулам (3.28), (3.29), (3.27), а также приближенные значения динамических коэффициентов, вычисленные по формулам:

$$\gamma'_{\text{дин}} = \gamma_{\text{ст}} \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}}$$

$$\mu'_{1\text{дин}} = \mu_{1\text{ст}} \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}}; \quad \mu'_{2\text{дин}} = \mu_{2\text{ст}} \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}} \quad 3.30$$

Эта таблица также показывает, что вне зоны резонанса прогиб w и моменты M_1, M_2 в оболочке можно определить по формуле (3.1), не ожидая при этом больших погрешностей.

Мы здесь рассматривали свободно опертую цилиндрическую оболочку при характерных динамических нагрузках, сосредоточенной силе и распределенной нагрузке. Полученные численные результаты дают основание полагать, что при других контурных условиях оболочки и при других нагрузках также можно пользоваться формулой (3.1) для динамических расчетов оболочек; необходимо только,

Таблица 2

| | | | | | | | |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $\beta : \omega =$ | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 |
| $h =$ | 6,1 | 9,75 | 16,7 | 30,8 | 64 | 154 | 495 |
| $10^2 \gamma_{ст} =$ | 392 | 250 | 197 | 134 | 76 | 33 | 10,4 |
| $10^5 \gamma_{длин} =$ | 1178 | 676 | 388 | 208 | 96,6 | 36,2 | 10,6 |
| $10^3 \gamma'_{длин} =$ | 2060 | 695 | 387 | 210 | 101 | 39,2 | 11,4 |
| $10^4 \mu_{ст} =$ | 334 | 281 | 213 | 139 | 70,4 | 23,4 | 5,6 |
| $10^4 \mu_{длин} =$ | 1347 | 830 | 463 | 234 | 96,4 | 27,8 | 4,4 |
| $10^4 \mu'_{1длин} =$ | 1760 | 780 | 416 | 217 | 93,5 | 27,8 | 6,1 |
| $10^4 \mu_{2ст} =$ | 333 | 279 | 210 | 133 | 60 | 6,3 | -0,8 |
| $10^4 \mu_{2длин} =$ | 1345 | 827 | 459 | 226 | 84,7 | 9,3 | -2,2 |
| $10^4 \mu'_{2длин} =$ | 1755 | 775 | 413 | 208 | 80 | 7,5 | -0,87 |

чтобы отношение частоты вынуждающей силы к частоте основного тона колебания оболочки было меньше 0,75.

Ереванский Политехнический Институт
им. К. Маркса

ЛИТЕРАТУРА

1. В. З. Власов—Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. Прикл. Мат. и Мех. т. VIII, стр. 109, 1944.
2. А. И. Лурье—Исследования по теории упругих оболочек. Тр. Ленинградского Индустр. Ин-та, № 6, 1937.
3. Т. Т. Хачатурян—Полугие цилиндрические оболочки. Сообщения Ин-та Математики и Механики АН Арм. ССР, № 4, 1949.
4. А. П. Филиппов—Колебания цилиндрических оболочек. Прикл. Мат. и Мех. т. I, стр. 177, 1937.

Թ. Թ. Խաչատրյան

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Աշխատութեան մեջ քննարկվում է գլանային թաղանթների ճոճման խնդիրը և արվում է պարզ բանաձև (2.19)՝ սեփական ճաճումների ամենափոքր հաճախականության համար: Քննարկվում է նաև պարբերաբար փոփոխվող դինամիկական ուժի ազդեցության տակ թաղանթի խնդիրը: Տրբվում է ազատ հենված թաղանթի խնդրի լուծումը կենտրոնացած և հավասարապես բաշխված դինամիկական ուժերի ազդեցության տակ (3.13—3.15 և 3.23—3.25): Այդ լուծումները համեմատվում են շինարարական մեխանիկայում կիրառություն ունեցող (3.1) բանաձևից ստացած լուծումների հետ և ցույց է արվում, որ վերջինը թաղանթների դինամիկական հաշվարկման համար ևս կարելի է կիրառել, երբ ստիպող ուժի հաճախականություն և սեփական ճաճումների ամենափոքր հաճախականության հարաբերությունը փոքր է 0,75-ից: