ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ-մաթ., բն. և տեխ. գիտ. I, № 7, 1948 Физ.-мат., естеств. и тех. науки

ГИДРОЭНЕРГЕТИКА

Н. А. Картвелишвили

Анализ колебаний масс в гидроэлектрических установках при набросах нагрузки

Явление колебания масс в гидроэлектрической установке математически выражается системой нелинейных обыкновенных диференциальных уравнений неустановившегося режима в напорной деривации и уравнительном резервуаре. В нелинейности этих уравнений и заключаются специфические трудности исследования колебаний масс и гидравлического расчета уравнительных резервуаров.

При полном сбросе нагрузки уравнения колебаний масс приводятся к интегрируемому виду,* что дает возможность получить вполне точное уравнение для определения амплитуды колебания горизонта воды в уравнительном резервуаре. При набросе нагрузки привести уравнения колебаний масс к интегрируемому виду принципиально невозможно, и это заставило в свое время строить расчет амплитуд колебания уровней в уравнительных резервуарах на различных приближенных допущениях. При этом в качестве существенно необходимой предпосылки принималось, что расход турбин при неустановившемся режиме не зависит от положения уровня воды в резервуаре, т. е. что он, изменившись скачком при набросе нагрузки остается далее постоянным. Однако, при известных условиях, особенно при небольших напорах, эта предпосылка может привести к существенным погрешностям.

С вопросом о влиянии увеличения расхода турбин (для поддержания постоянной мощности) при падении уровня в резервуаре на амплитуды колебания этого уровня, тесно связан вопрос об устойчивости стационарных режимов работы гидроэлектрической установки. Существование *конечной* области устойчивости в системе удовлетворяющей обычным условиям устойчивости Тома, получённым из анализа бесконечно-малых колебаний системы вокруг положения равновесия, непосредственно вытекает из теоремы Ляпунова [1] об устойчивости движения. Но охватывает ли эта конечная область весь практически возможный диапазон изменения нагрузок — этот вопрос может быть решен только в результате анализа колебаний

* В данной работе имеется в виду уравнительный резервуар цилиндрического типа.

конечной амплитуды, с учетом изменений расхода турбин в зависимости от изменений уровня воды в уравнительном резервуаре.

Попытка анализа устойчивости при колебаниях конечной амплитуды была сделана Шюллером [6]. Стремясь решить этот вопрос привычными методами теории линейных колебаний, Шюллер линеаризировал, хотя и в несколько завуалированной форме, нелинейные уравнения колебаний масс в случае, в котором эта линеаризация оказалась явно недопустимой. Полученный Шюллером результат — приблизительно удвоенное, против вытекающего из условий Тома, значение площади горизонтального сечения уравнительного резервуара — в силу этого оказался совершенно неверным, что будет ясно видно из дальнейшего.

Между тем, один из методов современной теории нелинейных колебаний, развитие которого стимулировалось, главным образом, запросами радиотехники, вполне применим также и к рассматриваемой задаче. Он дает возможность исследовать с исчерпывающей полнотой работу уравнительного резервуара при любых изменениях нагрузки станции, учтя при этом не только зависимость расхода турбин от положения уровня в резервуаре, но и особенности характеристик турбин, при чем в процессе этого анализа автоматически решается и задача об устойчивости.

Приступая к анализу колебаний масс упомянутым методом, примем следующие предположения.

1. Нагрузка станции в момент наброса изменяется скачком мгновенно и далее остается неизменной в течение всего времени протекания исследуемого неустановившегося режима.

2. Благодаря тому, что изменения напора станции, вызванные, главным образом, колебаниями горизонта в резервуаре, совершаются достаточно медленно по сравнению с периодами собственных колебаний регуляторов скорости турбин и влекут за собой столь же медленные изменения расхода в трубопроводах, можно считать, что регуляторы поддерживают мощность турбин в идеальном соответствии с электрической нагрузкой, а число их оборотов — в идеальном соответствии с номинальным,* и что гидравлический удар в трубопроводах пренебрежимо мал.**

3. Гидравлические сопротивления в трубопроводах пренебрежимо малы по сравнению с гидравлическими сопротивлениями в деривации.

4. Все турбины станции имеют одинаковую номинальную мощность и одинаковые характеристики. После наброса все турбины работают с полной нагрузкой.

---

* Это предположение до известной степени ограничивает область применения полученных ниже результатов [3].

** Это не относится, разумеется, к мало интересным, в рамках данной работы, явлениям в первые моменты переходного процесса.

Уравнения колебаний масс при этих предположениях напишутся так.

$$Z + h_D \left(\frac{Q_D}{Q_0} \right)^2 + \frac{L_D}{g\omega_D} \frac{dQ_D}{dt} = 0 \qquad 1$$

$$H = H_0 + Z \qquad 2$$

$$Q_c = Q_D - \omega_E \frac{dz}{t} \qquad 3$$

где Z — подъем горизонта в уравнительном резервуаре относительно горизонта верхнего бьефа станции,

Q_D — расход воды в деривации,

Q_c — суммарный расход воды в трубопроводах,

Q_0 — суммарный расход турбин при полной нагрузке в условиях стационарного режима,

h_D — суммарные потери напора в деривации при расходе Q_0 *

H — напор при неустановившемся режиме,

H_0 — напор брутто, т. е. разность отметок горизонтов верхнего и нижнего бьефов станции,

ω_D — площадь сечения деривации,

L_D — ее длина,

ω_E — площадь зеркала свободной поверхности в уравнительном резервуаре,

g — ускорение силы тяжести,

t — время.

Мощность турбины N при постоянном числе оборотов (предположение 2) на основании результатов проф. Егиазарова [2] можеть быть выражена следующей формулой:

$$N = N_0 \frac{H - H_x}{H_{netto} - H_x} \delta - N_x, \qquad 4$$

где N_0 — номинальная мощность машины,

$H_{netto} = H_0 - h_D$ — напор нетто при стационарном режиме и полной нагрузке,

H_x, N_x — постоянные, определяемые из универсальной характеристики турбины,

δ — некоторая функция открытия α направляющего аппарата турбины.

Предполагая, что δ и α связаны линейной зависимостью и имея в виду, что при $H = H_{netto}$ должно быть $N = N_0$, если $\alpha = 1$ и $N = 0$, если $\alpha = a$, где a — значение α при холостом ходе машины, легко найти

$$\delta = \frac{\alpha - a}{1 - a} + \frac{N_x}{N_0},$$

* Подразумеваются потери напора, исправленные на скоростной напор в основании уравнительного резервуара [3].

после чего формула 4 может быть переписана так:

$$\frac{N}{N_0}=\frac{H-H_x}{H_0-h_D-H_x}\left(\frac{\alpha-a}{1-a}+\frac{N_x}{N_0}\right)-\frac{N_x}{N_0} \qquad 5$$

На основании анализа ряда универсальных характеристик турбин ЛМЗ, нами было установлено, что расход турбины с достаточной точностью может быть выражен следующей эмпирической формулой:

$$\frac{Q_c}{Q_0}=\alpha\left[(1-s)\sqrt{\frac{H}{H_{netto}}}+s\frac{n}{n_0}\right] \qquad 6$$

где n—фактическое число оборотов машины,

n_0 — номинальное число оборотов,

s—постоянная, определяемая из универсальной характеристики.

Открытие турбины α выражается при этом отношением расхода проходящего через турбину при данном положении направляющих лопаток и при $H=H_{netto}$; $n=n_0$, к расходу Q_0. Для турбин Пельтона $s=0$ и формула 6 переходит в обычную формулу истечения через сопло.

Положив $n=n_0$, перепишем формулу 6 так:

$$\frac{Q_c}{Q_0}=\alpha\left[(1-s)\sqrt{\frac{H}{H_{netto}}}+s\right] \qquad 7$$

В силу предположения 4, формулы 5 и 7 справедливы не только для мощности и расхода отдельной машины, но и для суммарной мощности и суммарного расхода всех турбин.

Соотношения 1, 2, 3, 5 и 7 составляют систему исходных уравнений рассматриваемой задачи.

Для удобства дальнейших выкладок введем величину:

$$y=z+h_D,$$

где y—подъем горизонта в уравнительном резервуаре над тем горизонтом в нем, который имеет место при стационарном режиме и полной нагрузке. Положим далее:

$$x=\frac{y}{z_0};\ \xi=\frac{H}{H_0-h_D};\ u=\frac{Q_D}{Q_0};\ u_c=\frac{Q_c}{Q_0};\ \tau=\frac{t}{T_E};$$

$$\varepsilon=\frac{h_D}{z_0};\ \mu=\frac{Z_0}{H_0-h_D};\ Z_0=Q_0\sqrt{\frac{L_D}{g\omega_D\omega_E}};\ T_E=2\pi\sqrt{\frac{L_D\omega_E}{g\omega_D}}$$

$$p=\frac{H_x}{H_0-h_D};\ m=\frac{N_x}{N_0}$$

Как известно, Z_0 и T_E—амплитуда и период колебания горизонта в резервуаре при полном сбросе нагрузки, в случае отсутствия гидравлических сопротивлений в деривации.

С помощью введенных обозначений, уравнения 1, 2, 3, 5, 7 приводятся к виду:

$$x-\varepsilon(1-u^2)+\frac{1}{2\pi}\frac{du}{d\tau}=0 \qquad 8$$

$$\xi=1+\mu x \qquad 9$$

$$\frac{\xi-p}{1-p}\left(\frac{\alpha-a}{1-a}+m\right)-m=1 \qquad 10$$

$$u_c=u-\frac{1}{2\pi}\frac{dx}{d\tau} \qquad 11$$

$$u_c=\alpha[(1-s)\sqrt{\xi}+s] \qquad 12$$

при этом, в соответствии с предположением 4, в уравнении 5 было принято $N=N_0$.

Исключив α, ξ и u_c из последних четырех уравнений, получим:

$$u=\frac{1}{2\pi}\frac{dx}{d\tau}+\left\{1-p+[a-m(1-a)]\mu x\right\}\frac{(1-s)\sqrt{1+\mu x}+s}{1-p+\mu x} \qquad 13$$

Таким образом, задача сведена к решению уравнений 8 и 13. Метод, которым мы будем для этого пользоваться, берущий свое начало от Ван-дер-Поля, подробно обоснован в работе Крылова и Боголюбова [4]. Не излагая его здесь полностью, мы ограничимся только минимумом необходимых пояснений в процессе производства выкладок.

Этим методом решаются уравнения типа

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\gamma^2x+\sum_{i=1}^{n}\beta^i f_i\left(x:\frac{dx}{d\tau}\right)=0, \qquad 14$$

гда β—так называемый малый параметр, причем решение может быть получено с точностью до членов порядка β^q, где q—любое целое положительное, заранее заданное число. При $\beta=0$ уравнение 14 вырождается в обычное уравнение гармонических колебаний. В такое же уравнение вырождается система уравнений 8 и 13 при $\varepsilon=\mu=0$, что наводит на мысль рассматривать в этих уравнениях ε и μ как малые параметры, аналогичные параметру β в уравнении 14. Считая пока, что ε и μ суть величины одного и того же порядка малости (практически всегда и ε и μ меньше единицы), будем производить вычисления с точностью до величин порядка ε^2, т. е. будем сохранять в наших выкладках члены порядка малости ε и ε^2. После получения решения мы более подробно остановимся на вопросе о его точности.

Произведя в уравнении 13 элементарное разложение второго члена правой части в степенной ряд и отбросив члены порядка малости μ^3 и выше, получим:

$$u=1+\frac{1}{2\pi}\frac{dx}{d\tau}-\mu Cx+\mu^2Bx^2, \qquad 15$$

где

$$C = \frac{(1-a)(1+m)}{1-p} - \frac{1-s}{2}$$

$$B = \frac{(1-a)(1+m)}{(1-p)^2} - \frac{(1-a)(1+m)(1-s)}{2(1-p)} - \frac{1-s}{2}$$

Дальше для нас будет существенным то, что величина C может быть представлена в виде:

$$C = 1 + \gamma, \ \gamma = \frac{H_0 - h_D}{\eta_0}\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_0,$$

где η—кпд турбины, η_0 и $\left(\frac{\partial\eta}{\partial H}\right)_0$ соответствуют значениям $N = N_0$; $H = H_0 - h_D$, причем производная берется из универсальной характеристики турбины, приведенной к номинальному числу оборотов и построенной в координатах N, H. Чтобы это доказать, рассмотрим величину:

$$\eta = \frac{N}{9{,}81 Q_c H} = \eta_0 \frac{N}{N_0} \frac{1}{u_c \xi}.$$

Т. к. $N = N_0 = \text{const}$, то отсюда следует, что

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = -\frac{\eta_0}{\xi u_c}\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{u_c}\frac{\partial u_c}{\partial\xi}\right).$$

Но из формул 12 и 10:

$$\frac{\partial u_c}{\partial\xi} = [(1-s)\sqrt{\xi} + s]\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi} + \frac{1-s}{2\sqrt{\xi}}; \quad \frac{\partial\varkappa}{\partial\xi} = -\frac{(1+m)(1-p)(1-a)}{(\xi-p)^2}$$

следовательно:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{\eta_0}{\xi u_c}\left[\frac{(1-s)\sqrt{\xi}+s}{(\xi-p)^2}(1+m)(1-p)(1-a) - \frac{1-\xi}{2\sqrt{\xi}} - \frac{1}{\xi}\right]$$

Т. к. при $N = N_0$ и $H = H_0 - h_D$ имеем $\xi = u_c = 1$, то при этих условиях из последней формулы получается

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \eta_0(C-1),$$

откуда сразу вытекает приведенное выше выражение величины C. Подставляя u из уравнения 15 в уравнение 8, будем иметь:

$$\ddot{x} + 4\pi^2 x + 2\pi(2\varepsilon - \mu C)\dot{x} + \varepsilon\dot{x}^2 -$$
$$- 4\pi\mu[(\varepsilon C - \mu B)x\dot{x} + 2\pi\varepsilon C x] = 0. \quad 16$$

Чтобы привести это уравнение к виду 14, положим $\mu = k\varepsilon$ и перепишем его так:

$$\ddot{x} + 4\pi^2 x + \varepsilon f_1(\dot{x}) + \varepsilon^2 f_2(x;\dot{x}) = 0, \qquad 17$$

где

$$f_1(\dot{x}) = 2\pi(2-kC)\dot{x} + \dot{x}^2 \qquad 18$$

$$f_2(x;\dot{x}) = -4\pi k[(C-kB)x\dot{x} + 2\pi Cx] \qquad 19$$

Используемый нами метод предполагает отыскание решения уравнения 17 в виде периодической функции периода 2π:

$$x = v(\psi;a) \qquad 20$$

некоторого аргумента ψ, причем:

$$\frac{da}{d\tau} = A(a) \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \omega(a) \qquad 21$$

Подставив x из 20 в 17 и используя при этом соотношения 21, придем к следующему результату:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}\omega^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial\psi\partial a}\omega A + \frac{\partial^2 v}{\partial a^2}A^2 + \frac{\partial v}{\partial\psi}\frac{\partial\omega}{\partial a}A + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial a}A +$$

$$+ 4\pi^2 v + \varepsilon f_1\left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\omega + \frac{\partial v}{\partial a}A\right) + \varepsilon^2 f_2\left(v, \frac{\partial v}{\partial\psi}\omega + \frac{\partial v}{\partial a}A\right) = 0 \qquad 22$$

Отыскивая выражение v с точностью до величин порядка ε^3, положим:

$$v = v_0(\psi;a) + \varepsilon v_1(\psi_1 a) + \varepsilon^2 v_2(\psi_1 a) \qquad 23$$

$$A = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) \qquad 24$$

$$\omega = 2\pi + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) \qquad 25$$

где v_0, v_1, v_2 суть периодические функции ψ периода 2π. Подставив эти значения v, A и ω в уравнение 22, расположив результат по степеням ε и приравняв нулю коэфициент при каждой степени, получим следующую систему уравнений для определения последовательных приближений v_0, v_1, v_2:

$$\frac{\partial v_0}{\partial\psi^2} + v_0 = 0 \qquad 26$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial\psi^2} + v_1 = -\frac{\omega_1}{\pi}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\psi^2} - \frac{A_1}{\pi}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\psi\partial a} - (2-kC)\frac{\partial v_0}{\partial\psi} - \left(\frac{\partial v_0}{\partial\psi}\right)^2 \qquad 27$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial\psi^2} + v_2 = -\frac{\omega_1}{\pi}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\psi^2} - \frac{\omega_1}{4\pi^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\psi^2} - \frac{\omega_2}{\pi}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\psi^2} - \frac{A_1}{\pi}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\psi\partial a} -$$

$$-\frac{\omega_1 A_1}{2\pi^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\psi\partial a} - \frac{A_2}{\pi}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\psi\partial a} - \frac{A_1}{4\pi^2}\frac{\partial\omega_1}{\partial a}\frac{\partial v_0}{\partial\psi} - \frac{A_1^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2 v^0}{\partial a^2} -$$

$$-\frac{A_1}{4\pi^2}\frac{\partial A_1}{\partial a}\frac{\partial v_0}{\partial a}-(2-kC)\left(\frac{\partial v_1}{\partial\psi}+\frac{\omega_1}{2\pi}\frac{\partial v_0}{\partial\psi}+\frac{A_1}{2\pi}\frac{\partial v_0}{\partial a}\right)-2\frac{\partial v_0}{\partial\psi}\frac{\partial v_1}{\partial\psi}-$$

$$-\frac{\omega_1}{\pi}\left(\frac{\partial v_0}{\partial\psi}\right)^2-\frac{A_1}{\pi}\frac{\partial v_0}{\partial\psi}\frac{\partial v_0}{\partial a}+2k(C-kB)v_0\frac{\partial v_0}{\partial\psi}+2kCv_0 \qquad 28$$

Из уравнения 26:

$$v_0=a\sin\psi \qquad 29$$

В качестве v_0 можно было бы взять и другое частное решение уравнения 26, напр. $v_0=a\cos\psi$, но приравнивание произвольной постоянной в этом решении величине a лежит в существе метода. Подставив v_0 из 29 в 27, получим:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial\psi^2}+v_1=-\frac{a^2}{2}-\left[(2-kC)a+\frac{A_1}{\pi}\right]\cos\psi-\frac{a^2}{2}\cos2\psi+\frac{a\omega_1}{\pi}\sin\psi \qquad 30$$

Правая часть уравнения 30 не должна содержать первой гармоники, т. к. в противном случае в выражении v_1 появляется секулярный член и решение становится непериодическим. Исходя из этого следует приравнять нулю коэфициенты при $\cos\psi$ и $\sin\psi$, в результате чего получим:

$$A_1=-\pi(2-kC)a \qquad \omega_1=0 \qquad 31$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial\psi^2}+v_1=-\frac{a^2}{2}(1+\cos2\psi) \qquad 32$$

Из уравнения 32:

$$v_1=-\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{6}\cos2\psi \qquad 33$$

Подставляя значения v_0, v_1, A_1 и ω_1 в уравнение 28, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial\psi^2}+v_2=-\frac{A_2}{\pi}\cos\psi+\left[\frac{\omega_2}{\pi}+\left(\frac{2+kC}{2}\right)^2+\frac{a^2}{3}\right]a\sin\psi+$$

$$+\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{6}kC-k^2B\right)a^2\sin2\psi+\frac{a^3}{3}\sin3\psi \qquad 34$$

По условию периодичности v_2, т. е. по условию отсутствия секулярных членов в решении уравнения 34, опять-таки необходимо приравнять нулю коэфициенты при consψ и $\sin\psi$, в результате чего найдем:

$$A_2=0 \qquad \omega_2=-\pi\left[\left(\frac{2+kC}{2}\right)^2+\frac{a^2}{3}\right] \qquad 35$$

$$v_2=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{6}kC-k^2B\right)a^2\sin2\psi-\frac{a^3}{24}\sin3\psi \qquad 36$$

На основании формул 20, 21, 23, 24 и 25 теперь можно написать:

$$x = -\frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{\varepsilon a^2}{6}\cos 2\psi + a\sin\psi -$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{5}{6}\varepsilon\mu C - \mu^2 B\right)a^2\sin 2\psi - \frac{\varepsilon^2 a^3}{24}\sin 3\psi \qquad 37$$

$$\frac{da}{d\tau} = -\pi(2\varepsilon - \mu C)a \qquad 38$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \pi\left[2 - \left(\frac{2\varepsilon + \mu C}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{3}\right] \qquad 39$$

Из уравнения 37, используя уравнения 38 и 39, легко найти также выражение для производной:

$$\frac{1}{\pi}\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon(2\varepsilon - \mu C)a^2 + \left[2 - \frac{2\varepsilon + \mu C}{2} - \frac{\varepsilon^2 a^2}{3}\right]a\cos\psi -$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{10}{3}\varepsilon^2 + \frac{7}{3}\varepsilon\mu C - 4\mu^2 B\right)a\cos 2\psi - \frac{\varepsilon^2 a^3}{4}\cos 3\psi -$$

$$-(2\varepsilon - \mu C)a\sin\psi - \frac{2}{3}\varepsilon a^2\sin 2\psi \qquad 40$$

Проинтегрировав уравнение 38, получим:

$$a = a_0 l^{-\pi(2\varepsilon - \mu C)\tau} \qquad 41$$

где a_0—значение величины a при $\tau = 0$. Далее, из уравнений 39 и 41 находим:

$$\psi = \pi\left[2 - \left(\frac{2\varepsilon + \mu C}{2}\right)^2\right]\tau + \frac{\varepsilon^2 a_0^2}{6(2\varepsilon - \mu C)}\left[1 - l^{-2\pi(2\varepsilon - \mu C)\tau}\right] + \psi_0 \qquad 42$$

где ψ_0 — значение ψ при $\tau = 0$.

Из уравнений 37, 41 и 42 сразу видно, что независимо от начальных условий, т. е. от значений a_0 и ψ_0, условием затухания колебаний, т. е. условием устойчивости системы является условие $2\varepsilon - \mu C > 0$, которое после подстановки значений ε, μ и C записывается так:

$$\omega_E > \frac{LQ_0^2(1 + \gamma)}{2g\omega_D h_D(H_0 - h_D)} \qquad 43$$

Это условие полностью совпадает с обычными формулами расчета устойчивости уравнительных резервуаров, выводимыми из анализа бесконечно малых колебаний системы вокруг стационарного состояния (написанными без учета потерь напора в трубопроводах). Следовательно, *если система устойчива при бесконечно малых колебаниях, то она будет устойчива и при любых конечных изменениях нагрузки.*

Перейдем теперь к определению величин a_0 и ψ_0, играющих роль произвольных постоянных в общем интеграле уравнения 16, выраженном формулами 37, 41 и 42. Если относительный расход турбин до наброса нагрузки был равен $u_c = n < 1$, то такой же расход протекал при этом в деривации. Стационарный уровень воды в резервуаре до наброса нагрузки определяется величиной

$$x = x_0 = \varepsilon(1-n^2),$$

как это следует из уравнения 8. В момент непосредственно следующий за набросом нагрузки уровень в резервуаре и расход в деривации остаются прежними: $x = x_0$; $u = u_0 = n$. Подставив эти значения x и u в уравнение 15, придем к следующим начальным условиям:

$$\tau = 0,\ x = \varepsilon(1-n^2),\ \frac{1}{\pi}\frac{dx}{d\tau} = -2(1-n) + 2\varepsilon\mu C(1-n^2) \qquad 44$$

Из этих начальных условий и уравнений 37, 41 и 42 легко усмотреть, что при $\varepsilon = \mu = 0$ имеем $a_0 = -(1-n)$, $\psi_0 = 0$. Если же $\varepsilon \neq 0$; $\mu \neq 0$, то должно быть $a_0 = -(1-n) + \beta$; $\psi_0 \neq 0$, причем β и ψ суть величины не большие, чем порядка малости ε. Учитывая это, положив в уравнение 40 $\tau = 0$, $a = a_0$, $\psi = \psi_0$ и используя второе из условий 44, получим:

$$\left(\frac{22}{9} - \frac{37}{18}n + \frac{7}{12}n^2\right)\varepsilon^2 - \left(\frac{25}{9} + \frac{2}{9}n\right)\varepsilon\mu C + \frac{2\beta}{1-n} + \psi_0^2 +$$

$$+ \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}n\right)\varepsilon - \mu C\right]\psi_0 + \left[\frac{C^2}{4} + \frac{4}{3}(1-n)B\right]\mu^2 = 0 \qquad 45$$

откуда видно, что β есть величина порядка малости ε^2. Тогда из уравнения 37 и первого из условий 44 сразу получается:

$$\psi_0 = -\frac{2}{3}(2+n)\varepsilon \qquad 46$$

Из уравнений же 45 и 46 имеем:

$$\beta = -(1-n)\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}n + \frac{5}{72}n^2\right)\varepsilon^2 + (1-n)\left(\frac{13}{18} - \frac{2}{3}n\right)\varepsilon\mu C -$$

$$-(1-n)\left[\frac{C^2}{8} + \frac{2}{3}(1-n)B\right]\mu^2 \qquad 47$$

Тяким образом, зависимость горизонта в уравнительном резервуаре от времени определена полностью. Практический интерес представляет, однако, только наинизшее положение уровня, т.е. первая амплитуда колебания. Как известно, при $\varepsilon = \mu = 0$ горизонт в резервуаре достигает минимума в момент $\tau_m = \frac{1}{4}$. При $\varepsilon \neq 0$, $\mu \neq 0$,

положим $$\tau_m = \frac{1}{4} + \lambda, \qquad 48$$

при этом очевидно, что λ есть величина порядка малости ε^2. Подставляя это значение τ_m в уравнение 41, получим значение $a = a_m$ в момент $\tau = \tau_m$ с точностью до величин порядка малости ε^2:

$$a_m = -(1-n) + \pi\frac{1-n}{4}(2\varepsilon - \mu C) + \pi(1-n)(2\varepsilon - \mu C)\lambda -$$

$$-\pi^2\frac{1-n}{32}(2\varepsilon - \mu C)^2 + \beta \qquad 49$$

Далее из уравнения 42, замечая, что

$$1 - l^{-2\pi(2\varepsilon - \mu C)\tau} < 2\pi(2\varepsilon - \mu C)\tau,$$

имеем при $\tau = \tau_m$:

$$\psi_m = \frac{\pi}{2} + 2\pi\lambda + \psi_0 + \rho,$$

где ρ есть величина порядка малости ε^2, следовательно:

$$\sin\psi_m = \cos(2\pi\lambda + \psi_0 + \rho) = 1 - \frac{(2\pi\lambda + \psi_0)^2}{2}$$

$$\sin 2\psi_m = -\sin(4\pi\lambda + 2\psi_0 + 2\rho) = -2(2\pi\lambda + \psi_0 + \rho)$$

$$\sin 3\psi_m = -\cos(6\pi\lambda + 3\psi_0 + 3\rho) = -1 + \frac{9}{2}(2\pi\lambda + \psi_0)^2$$

$$\cos 2\psi_m = -\cos(4\pi\lambda + 2\psi_0 + 2\rho) = -1 + 2(2\pi\lambda + \psi_0)^2$$

Подставив эти значения тригонометрических функций и величину a_m из 49 в уравнение 37, получим:

$$x = -(1-n) - \frac{2}{3}(1-n)^2\varepsilon + \pi\frac{1-n}{4}\left(2\varepsilon - \mu C\right) + \pi\frac{(1-n)^2}{3}\varepsilon(2\varepsilon - \mu C) -$$

$$-\pi^2\frac{1-n}{32}(2\varepsilon - \mu C)^2 - (1-n)\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}n + \frac{5}{72}n^2\right)\varepsilon^2 - \frac{(1-n)^3}{24}\varepsilon^2 +$$

$$+(1-n)\left(\frac{13}{18} - \frac{2}{9}n\right)\varepsilon\mu C - (1-n)\left[\frac{C^2}{8} + \frac{2}{3}(1-n)B\right]\mu^2 +$$

$$+\pi(1-n)(2\varepsilon - \mu C)\lambda + \frac{1-n}{2}(2\pi\lambda + \psi_0)^2 \qquad 50$$

Приравняв нулю $\frac{dx}{d\tau}$, найдем то значение λ, при котором x достигает минимума:

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\varepsilon}{3}(1 + 2n) + \mu C\right] \qquad 51$$

* Для определения последующих экстремумов такой прием, разумеется, неприменим.

Подставив это значение λ в уравнение 50, после элементарных преобразований получим величину первой амплитуды:

$$x_m = -(1-n)\Big\{1-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}n\right)\varepsilon+\frac{\pi}{4}\mu C+$$

$$+\left[\frac{25}{24}+\frac{\pi^2}{8}-\frac{2\pi}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}-2\right)n+\frac{n}{9}\right]\varepsilon^2-\left[\frac{4}{3}+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{3}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5}{9}\right)n\right]\varepsilon\mu C+\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{32}\right)C^2+\frac{2}{3}(1-n)B\right]\mu^2\Big\} \qquad 52$$

В расчетах более удобно, однако, отсчитывать амплитуду от статического горизонта системы, т. е от горизонта верхнего бьефа станции: другими словами, вместо величины $x_m = \frac{y_m}{Z_0}$ рассматривать величину $\frac{Z_m}{Z_0} = \frac{y_m - h_D}{Z_0} = x_m - \varepsilon$, абсолютное значение которой обозначим через Z_m. Это последнее, на основании формулы 52, выразится так:

$$Z_m = (1-n) + F_1(n)\varepsilon + \frac{\pi}{4}(1-n)\mu C + F_2(n)\varepsilon^2 -$$

$$-F_3(n)\,\varepsilon\mu C + (1-n)\left[\frac{1}{y}\left(1+\frac{\pi^2}{8}\right)C^2 + \frac{2}{3}(1-n)B\right]\mu^2$$

где

$$F_1(n) = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)n + \frac{2}{3}n^2 =$$

$$= 0{,}096 + 0{,}238\,n + 0{,}667\,n^2$$

$$F_2(n) = (1-n)\left[\frac{25}{24}+\frac{\pi^2}{8}-\frac{2\pi}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}-2\right)n+\frac{n^2}{9}\right] =$$

$$= (1-n)(0{,}181 + 0{,}094\,n + 0{,}114\,n^2)$$

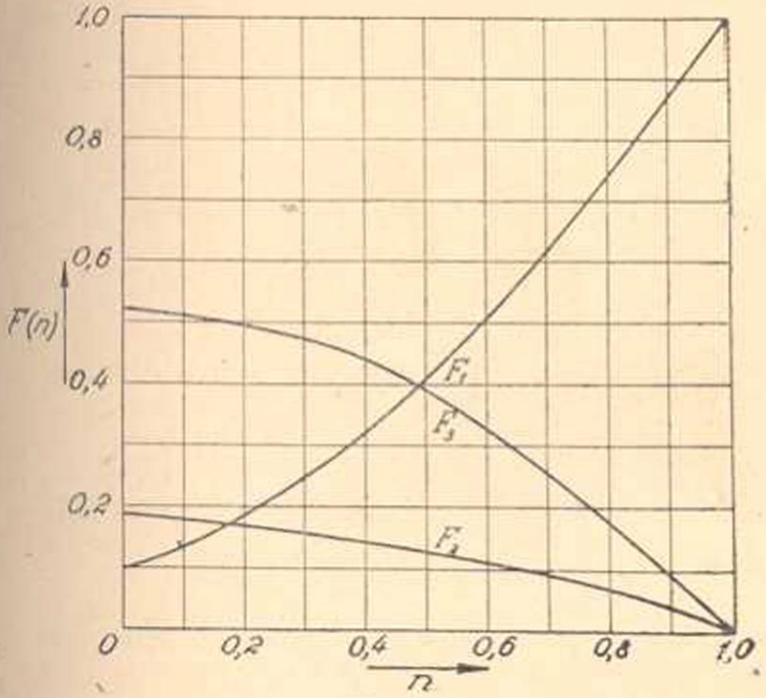
$$F_3(n) = (1-n)\left[\frac{4}{3}+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{3}+\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5}{9}\right)n\right] =$$

$$= (1-n)(0{,}520 + 0{,}491\,n)$$

Графики этих функций даны на фиг. 1.

Формула 53 и есть искомая расчетная формула для определения наинизшего горизонта воды в уравнительном резервуаре. При выводе ее мы предполагали, что величины ε и μ суть величины одинакового порядка малости. Если в действительности это окажется не так, то очевидно, что полученная формула будет давать погрешность порядка куба большей из величин ε и μ.

Как мы уже указывали, формулы других авторов выведены в предположении, что расход турбин не зависит от положения горизонта в резервуаре, что справедливо при больших напорах, когда можно считать $\mu=0$. Те из указанных формул, которые выведены



Фиг. 1.

теоретически, с теми или иными произвольными допущениями, не представляют в данном случае интереса. Среди же эмпирических формул одной из наиболее точных является эмпирическая формула Фогта-Акснеса [5], полученная в результате обработки данных численного интегрирования уравнений колебания масс. Эта формула, принятая действующими расчетными нормами, в наших обозначениях пишется так:

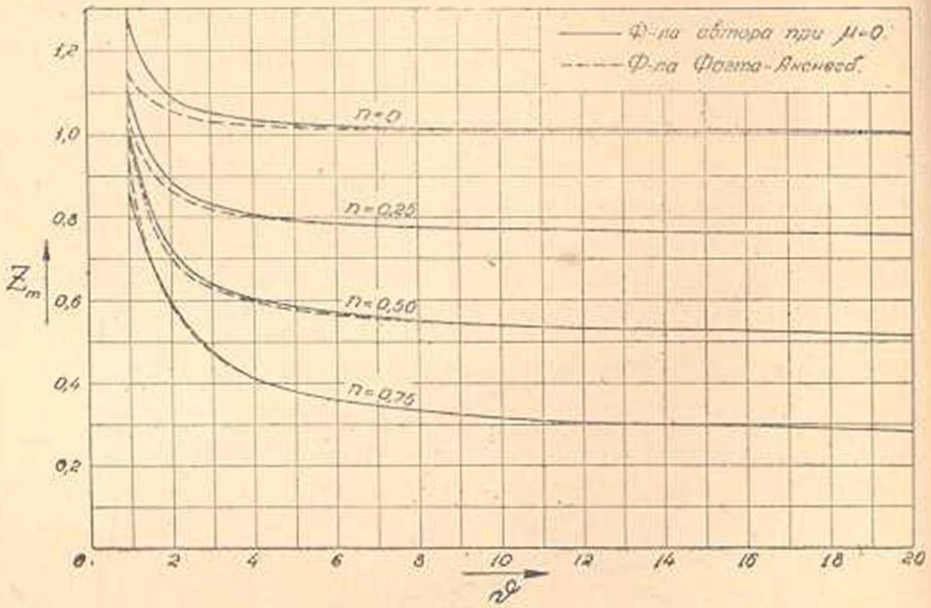
$$Z_m = \varepsilon + (1-n)(1-n\varepsilon^{1,34})\left(\sqrt{1-0,275\,\varepsilon^2\sqrt{n}} + 0,05\,\varepsilon^2 - 0,9\,\varepsilon\right) \qquad 54$$

формула же 53 при $\mu=0$ приобретает вид:

$$Z_m = 1 - n + F_1(n)\,\varepsilon + F_2(n)\,\varepsilon^2 \qquad 55$$

На фиг. 2 даны кривые зависимости Z_m от $\vartheta = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{z_0}{h_p}$ и n по формулам 54 (пунктир) и 55 (сплошные линии). Если учесть, что случай $n=0$ не может иметь места на практике (т. к. даже в исключительно редком случае наличия только одной машины следует считаться с расходом холостого хода) и что значения $\vartheta < 3$ могут встретиться только в виде исключения, следует констатировать практически полное совпадение результатов, даваемых формулами

54 и 55. Это говорит о том, что формула 55, а значит и 53, дает точность, равную точности численного интегрирования, т. е. более чем достаточную.



фиг. 2.

В практике проектирования приходится обычно по заданной амплитуде отыскивать площадь сечения резервуара. Для этой цели формулу 53 удобнее преобразовать, положив

$$Z_m = Y_m \frac{1}{\vartheta}\ ;\ \mu = \vartheta\beta;\ Y_m = \frac{z_m}{h_D}\ ;\ \beta = \frac{h_D}{H_0 - h_D},$$

после чего она принимает вид:

$$Y_m = (1-n)\vartheta + F_1(n) + 0{,}785\,(1-n)\vartheta^2\beta\,C + \frac{F_2(n)}{\vartheta^2} -$$

$$- F_3(n)\,\vartheta\beta\,C + (1-n)\left[0{,}558\,C^2 + \frac{2}{3}(1-n)B\right]\vartheta^2\beta^2 \qquad 56$$

Площадь сечения резервуара входит здесь только в параметр ϑ (через величину z_0).

Гидроэлектрическая лаборатория
Водно-Энергетического Института
Академии Наук Армянской ССР.

Поступило 3 XII 1948.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *А. Ляпунов.*—Общая задача об устойчивости движения. Харьков. 1892.
2. *И. В. Егиазаров.*—Гидроэлектрические силовые установки. Часть 1. Ленинград-Москва. 1934.

3. *Н. А. Картвелишвили.*—Об устойчивости гидроэлектрических установок, снабженных уравнительными башнями. Изв. АН Армянской ССР. № 5, 1947.

4. *Н. М. Крылов,* и *Н. И. Боголюбов.*—Введение в нелинейную механику. Киев, 1937.

5. *F. Vogt.*—Berechnung und Construction des Wasserschlosses. Stuttgart, 1923.

6. *J. Schüller*—Das Stabilitätskriterium für gedämpfte Wasserschlösser bei Belastungsstörungen mit endlichen Schwingungsweiten. Wasserkraft und Wasserwirtschaft. № 22, 1928.

Ն. Ա. Քարթվելիշվիլի

ՀԻԴՐՈԷԼԵԿՏՐԻԿ ՍԱՐՔԱՎՈՐՈՒՄՆԵՐՈՒՄ ՋՐԻ ՄԱՍՍԱՅԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԱՆԱԼԻԶԸ ԲԵՌ ՏԱԼՈՒ ԴԵՊՔՈՒՄ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում քննարկվում են ճնշումով դերիվացիայի և հավասարակշռող աշտարակի մեջ ջրի մասսայի տատանումները, որոնք առաջ են գալիս վերջավոր մեծության բեռ տալու դեպքում։ Այդ տատանումների անալիզում կիրառելով Վան-դեր-Պոլի մեթոդը, հեղինակը ցույց է տալիս, որ վերջավոր ամպլիտուդով տատանումների դեպքում հավասարակշռող աշտարակի մեջ կայունության պայմանները համընկնում են անվերջ փոքր տատանումների համար Թոմայի հայտնի պայմանին։ Օգտվելով նույն մեթոդով, հեղինակը դուրս է բերում հավասարակշռող աշտարակում բեռ տալու դեպքում ջրի մակարդակի տատանման ամպլիտուդը որոշելու բանաձև։ Ի տարբերություն մինչ այժմ եղած բանաձևերի, հեղինակի բանաձևով հաշվի է առնվում տուրբինների ելքի ավելացումը աշտարակում՝ ջրի մակարդակի իջնելիս և կայանի ագրեգատների օգտակար գործողության գործակցի փոփոխումը՝ ճնշումները փոփոխելիս։