

ГИДРАВЛИКА

А. К. Анянян

**Применение теории пограничного слоя к определению
потери напора на переходных участках открытой
деривации**

Постановка задачи

Многочисленные опыты и исследования показали, что в непосредственной близости к обтекаемому телу поток жидкости затормаживается и в нем возникают сильные вихри. Эти вихри, возникнув, сохраняются долго, увлекаются общим течением жидкости и вытягиваются за телом в вихревые усы и беспорядочно завихренные хвосты (рис. 1).

Опыты показали, что сопротивление тела, оказываемое им потоку, в основном сосредотачивается в этом слое, и поэтому изучение свойства пограничного слоя лежит в основе теории сопротивления.

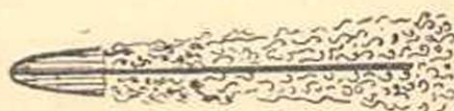


Рис. 1.

При обтекании жидкостью двух длинных пластинок, поставленных рядом друг с другом, пограничные слои постепенно погружаются в ядро. На определенном расстоянии они пересекаются; дальше жидкость полностью охватывается пограничным слоем (рис. 2).

В пределах нарастающих пограничных слоев имеется беспрерывное переформирование эпюры скоростей; в ядре течения скорости почти остаются постоянными (конечно только в пределах каждого рассматриваемого сечения); за пределами линии пересечения пограничных слоев изменение скоростей больше не происходит, если, конечно, никакие внешние причины не нарушают эти условия.

Мы рассматривали пример обтекания жидкостью двух рядом поставленных пластинок, так как это имеет большое практическое значение. В частном случае, течение жидкости вдоль стенок и канала можно представить как одностороннее обтекание пластинки жидкостью.

Необходимо отметить, что скорости в толще пограничного слоя меняются по определенным законам, принципиально различным для ламинарного и турбулентного пограничных потоков.

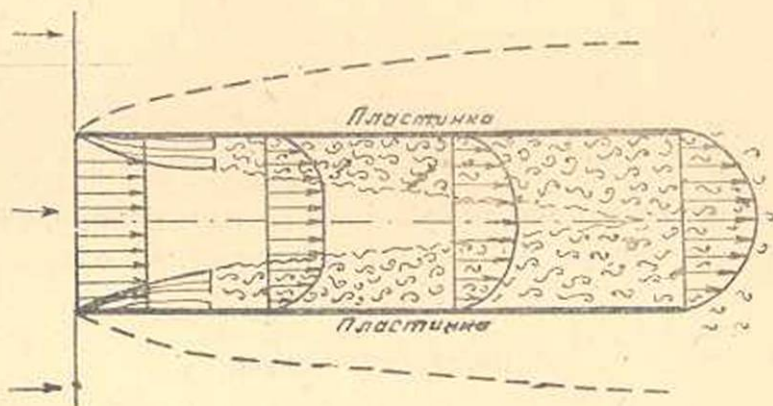


Рис. 2.

Определение длины начального участка, на протяжении которого профиль распределения скоростей приобретает свою окончательную форму, имеет весьма важное практическое значение.

Несомненно, указанное распределение скоростей по длине переходного участка сильно отличается от нормального. Кроме того, перераспределение скоростей по длине переходного участка создает иную работу силы трения, которая должна быть оценена как потеря напора на местные сопротивления [2].

Было бы ошибочным считать, что при изменении сечения или направления струй потери напора ограничиваются местом сужения потока и что непосредственно за местом сужения устанавливаются нормальные скорости. Опытами было установлено, что потери напора имеют место не только на том коротком участке, где происходит преобразование в распределении скоростей потока. Потери возникают на гораздо большем протяжении (главным образом, вниз по течению) и имеют место до того сечения, где эпюра скоростей принимает свою окончательную „установившуюся“ форму. Эти формы принципиально различны для ламинарного и турбулентного потоков.

Обращаясь к вопросу, которому посвящена настоящая статья отмечаем, что источник потери напора на переходных участках надо искать в изменении и нарушении нормального распределения скоростей в поперечном сечении. Эти изменения влияют на величину силы внутреннего трения между отдельными частицами. Таким образом потери напора на переходном участке не ограничиваются только длиной того участка, на протяжении которого сечения переходят одно в другое. Наличие перехода сказывается на значительно большем расстоянии, которое в конечном счете определяется местом

пересечения пограничных слоев, развивающихся по периметру того или иного поперечного сечения (рис. 3, 4).

Из вышесказанного ясно, что потери напора на переходном участке складываются из потерь, возникающих в зоне изменения профиля поперечного сечения и из потерь на участке, в пределах которого скорости постепенно перераспределяются и эпюра их распределения принимает „нормальную“ форму. Длину этого участка можно определить, пользуясь теорией турбулентного слоя, при обтекании тел.

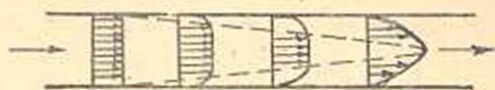


Рис. 3.

Определение длины входного участка для турбулентного безнапорного движения жидкости

Рассмотрим переход потока из канала прямоугольного сечения в тоннель круглого сечения (рис. 4).

С гидромеханической точки зрения имеет место движение жидкости в конфузоре, так как сечение канала постепенно и симметрично суживается и переходит в тоннель круглого сечения.

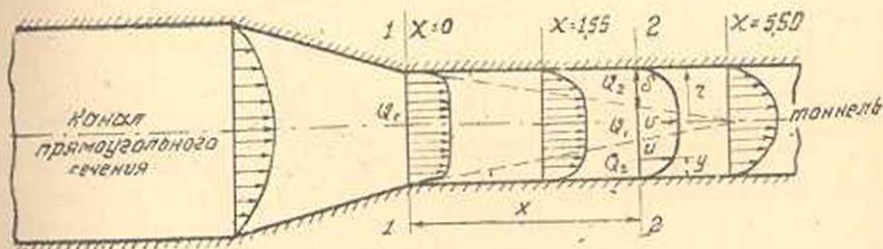


Рис. 4.

Рис. 4.

Как известно из гидромеханики, в конфузоре не наблюдается отрыва струй и вихрей на всем протяжении его поверхности вследствие того, что место наименьшего давления, благодаря форме конфузора, находится в его концевом сечении [1,5]. Кроме того, произведенные Гидроэлектрической лабораторией Водно-Энергетического Института Академии Наук Арм. ССР, под руководством проф. И. В. Егиазарова, измерения поля скоростей на моделях деривации ГюмүшГЭС показывают равномерное распределение скоростей в сечении кроме зоны у дна канала, где невозможно было производить измерения трубкой Пито-Ребока (рис. 5). Эти теоретические и опытные данные дают возможность считать, что пограничный слой в основном начинает развиваться от начального сечения входного тоннеля.

Для исследования закономерности развития турбулентного слоя в тоннеле можно пользоваться интегральным условием Кармана, так как оно относится лишь к импульсам и силам, а беспорядочная пульсация скоростей на количестве движения не отразится. Однако, для учета трения нельзя пользоваться формулой Ньютона с градиентом скорости для μ , так как она справедлива лишь для ламинарного

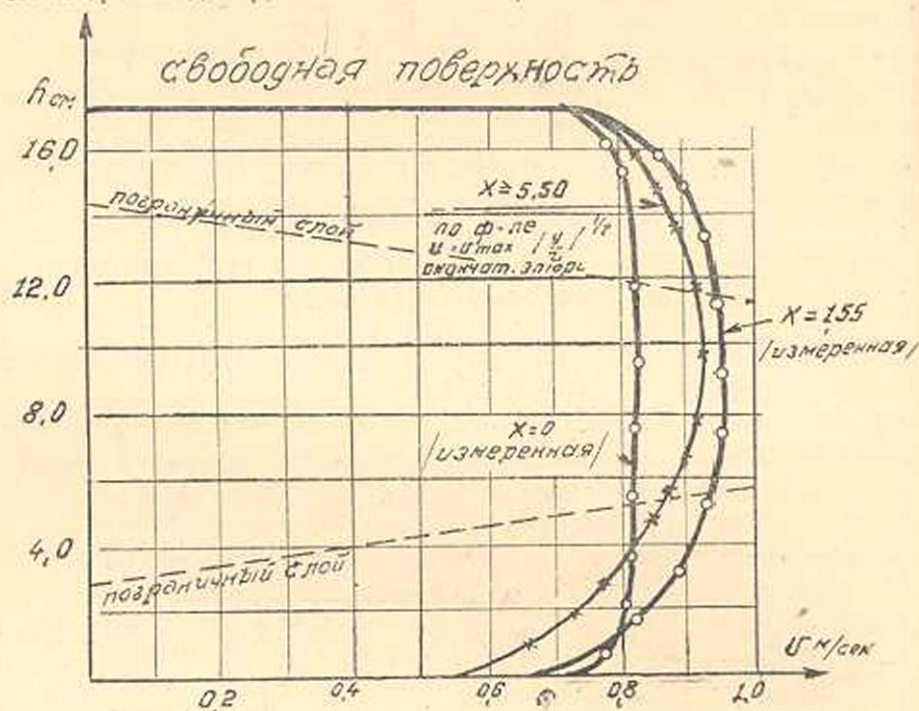


Рис. 5.

ного движения [9]. Правда, по современным взглядам и при турбулентном пограничном слое жидкость на поверхности тела неподвижна и всегда имеется очень тонкий ламинарный подслой, в котором собственно и происходит трение. Этот путь теоретического исследования, основанный на анализе ламинарного подслоя, оказывается очень трудным. Поэтому предпочитают пользоваться прямо результатами опытов по исследованию трения пограничного слоя о тело. Прандтль и Карман, на основании весьма тщательно произведенных опытов Блазиуса и Никурадзе вывели формулу (16) (стр. 558) для определения напряжения трения в турбулентном слое.

Наше решение поставленной задачи по определению длины входного участка конфузора отличается от решения аналогичной задачи Шиллера [3,6] следующим:

1. Нами рассматривается развитие турбулентного слоя, где распределение скоростей подчиняется степенному закону, что коренным образом отличается от параболического закона распределения скоростей в ламинарном слое;

2. напряжение трения, в силу сказанного выше, принимается не по закону Ньютона, а по закону турбулентного перемешивания;

3. рассматривается безвихорное движение жидкости в круглой трубе (несимметричная задача);

4. при составлении дифференциального уравнения движения турбулентного пограничного слоя нами учтена и работа силы тяжести.

Прежде чем перейти к выводу расчетных формул, ставим следующие допущения:

1. Ядро течения, толщина которого постепенно уменьшается, имеет во всех точках постоянную скорость (рис. 6). Опыты Гидроэлектрической лаборатории и различных исследователей подтверждают справедливость этого допущения (рис. 5).

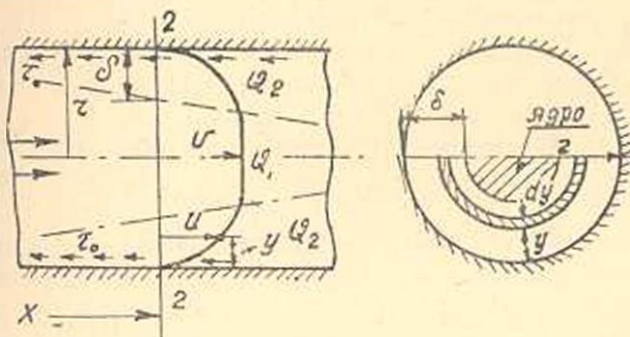


Рис. 6.

2. Турбулентный слой, толщина которого постепенно увеличивается, имеет скорости, величины которых (как в окончательно развившемся течении, так и в промежуточных стадиях его развития) определяются по степенному закону Прандтля (рис. 5).

Вопрос о законах распределения скоростей в турбулентном слое имеет важное значение вследствие непосредственной связи его с общей задачей сопротивления.

Прандтль [1,7] сделал из опытов Блазиуса и Никурадзе заключение, что скорость турбулентного потока вблизи стенки меняется пропорционально расстоянию от стенки, взятому в степени $n = \frac{1}{7}$ „закон корня седьмой степени“.

Приведенными в литературе (1,7) сравнительными анализами законов логарифмического распределения скоростей и различных степенных $\left(n = \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \right)$ законов установлено, что область при-

менения степени $n = \frac{1}{7}$ дает практически удовлетворительные результаты в пределах числа $Re = 10^5$ до $2 \cdot 10^7$. При более высоких числах Re степень должна быть заменена $\frac{1}{8}$ или $\frac{1}{9}$.

3. Скорости в ядре не меняются и остаются постоянными в пределах рассматриваемого поперечного сечения (рис. 5, 6).

Принятое допущение, конечно, условно, но для турбулентного потока вполне допустимо, так как эпюра скоростей в толще сечения ядра с глубиной изменяется незначительно. На это указывают опыты, произведенные Гидроэлектрической лабораторией Водно-Энергетического Института АН Арм. ССР (рис. 5).

4. Уравнение Бернулли применимо для рассматриваемого переходного участка, так как течение в ядре подчиняется приблизительно закону потенциального движения.

Давление в ядре течения считается переходящим без изменения в давление пограничного слоя (в том же поперечном сечении). Такое допущение принято и Шиллером [3].

5. Многочисленные эксперименты многих исследователей и опыты „ГЭЛ“ показали, что отношение максимальной скорости к

средней для турбулентного потока лежит в пределах $\frac{V_{\max}}{V_{\text{ср}}} = 1,2 \div 1,15$. [8,4].

Учтя все вышеуказанные допущения, переходим к составлению уравнения неразрывности и изменения количества движения для выделенного отсека (рис. 4).

Составим уравнения неразрывности для входного и произвольно взятого сечения на расстоянии x от входа (рис. 4)

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \dots \quad \text{где} \quad (1)$$

Q_0 — расход жидкости, проходящий через входное сечение (1—1)

Q_1 — расход жидкости, проходящий через толщу ядра, (сечение 2—2).

Q_2 — расход жидкости, проходящей через толщу пограничного слоя (сечение 2—2, рис. 6).

$$Q_0 = F_0 V_0 = \frac{\pi r^2}{2} \cdot V_0 \quad (2)$$

$$Q_1 = F \cdot V = \frac{\pi (r - \delta)^2}{2} \cdot V \quad (3)$$

Согласно допущению 2 скорость V остается постоянной только для данного рассматриваемого сечения (рис. 5) и меняется по длине входного участка.

$$Q_2 = F_2 \cdot U \quad \text{где}$$

U — скорость в толще пограничного слоя. Она определяется по формуле Праудтля [1].

$$U = V \left(\frac{y}{\delta} \right)^n \quad (4)$$

$$Q_2 = \int_0^{\delta} \pi (r - y) U dy \quad (5)$$

где δ переменная толщина турбулентного слоя.

Уравнение неразрывности (1) примет вид

$$\frac{\pi r^2}{2} \cdot V_0 = \frac{\pi(r-\delta)^2}{2} V + \int_0^\delta \pi(r-y) U dy \quad (6)$$

После раскрытия уравнения (6) с учетом уравнения (4) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \pi(r-y) V \left(\frac{y}{\delta}\right)^n dy &= \pi r V \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^n dy - \pi V \int_0^\delta y \left(\frac{y}{\delta}\right)^n dy = \\ &= \frac{\pi r V}{n+1} \cdot \delta - \frac{\pi V}{n+2} \delta^2 \quad \text{или принимая } n = \frac{1}{7}, \end{aligned}$$

$$\int_0^\delta \pi(r-y) V \left(\frac{y}{\delta}\right)^n dy = \frac{7\pi r V}{8} \delta - \frac{7\pi V}{15} \delta^2$$

$$\pi r V_0 = \pi \left(r^2 - 2\delta r + \delta^2 \right) + 2 \left(\frac{7\pi r V}{8} \delta - \frac{7\pi V}{15} \delta^2 \right) \quad (7)$$

После ряда простых преобразований уравнение (7) примет вид

$$\frac{V_0}{V} = 1 - \frac{1}{4} \frac{\delta}{r} + \frac{1}{15} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2$$

или

$$\left(\frac{\delta}{r} \right)^2 - \frac{15}{4} \left(\frac{\delta}{r} \right) + 15 \left(1 - \frac{V_0}{V} \right) = 0 \quad (8)$$

После решения уравнения (8) получим

$$\frac{\delta}{r} = \frac{15}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{8} \right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V} \right)} \quad (9)$$

Как видно из уравнения (9), отношение толщины пограничного слоя к радиусу трубы двучленное (для одного и того же поперечного сечения), что физически не может иметь места. Для определения знака уравнения (9), прибегаем к следующим пограничным условиям: При $x=0$ $V=V_0$; тогда уравнение 9 дает $\delta=0$ при знаке минус перед вторым членом правой части.

При $x=L$ (точка, где пересекаются пограничные слои)

$$\frac{\delta}{r} = 1$$

Принимая (по условию 5): $\frac{V_{cp}}{V_{max}} = 0.82[8]$ и подставляя это значение

в уравнение (9), получаем $\frac{\delta}{r} = 1$.

Таким образом уравнение (9) удовлетворяет пограничным условиям при знаке минус перед вторым членом правой части.

$$\frac{\delta}{r} = \frac{15}{8} - \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} \quad (9^a)$$

Для определения точки пересечения турбулентного пограничного слоя с осью трубы, составляем уравнение изменения количества движения для выделенного отсека (рис. 4).

Изменение количества движения должно равняться импульсу сил в единицу времени.

$$m_1 V_1 - m_2 V_0 = \Sigma p \cdot t \quad (10)$$

Из действующих на выделенный объем сил должны быть приняты во внимание: силы гидродинамического давления в сечениях 1—1 и 2—2, силы тяжести и касательные силы, действующие у боковых поверхностей, ограничивающих данный объем.

$$K = P + G - T \quad (10^a)$$

$$m_2 V_0 = \frac{\pi r^2}{2} \cdot V_0^2 \cdot \rho \quad (11)$$

$$m_1 V_1 = mV + m'U$$

mV —количество движения в толще ядра,

$m'U$ —количество движения в турбулентном пограничном слое.

$$mV = \rho \frac{\pi(r-\delta)^2}{2} \cdot V^2 \quad (12)$$

$$m'U = \int_0^{\delta} \pi \rho (r-y) U^2 dy \quad (13)$$

Гидродинамическое давление (движущую силу) по условию 5 можно определить из уравнения Бернулли

$$P = \rho \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{V^2 - V_0^2}{2} \quad (14)$$

Сила тяжести может быть отброшена ввиду малости объема жидкости между двумя очень близко выделенными сечениями. Однако, ввиду возможности распространить выводы и на сечения, отстоящие друг от друга на произвольное расстояние, не представляет трудности принятие во внимание и этой силы.

$$G = \int_0^x \frac{\pi r^2}{2} \sin \alpha dx = \int_0^x \rho g \frac{\pi r^2}{2} \sin \alpha dx \quad (15)$$

Остается найти импульс касательных сил у боковых поверхностей, ограничивающих данный объем, что является существенным вопросом в рассматриваемой задаче турбулентного пограничного

слой в отличие от ламинарного, принятого Шиллером. В этом случае применение закона Ньютона о силах трения отпадает.

Как известно, первое решение задачи о сопротивлении пластины турбулентному потоку было дано одновременно Прандтлем и Карманом, которые использовали при этом опыты Никурадзе и Блазиуса [1,9].

Напряжение трения в турбулентном слое по Прандтлю [1,9] (рис. 6) равняется

$$\tau_0 = \xi \rho V^2 = \left(\frac{y}{rV} \right)^{1/4} = \xi \rho V^2 \cdot Re^{-1/4} \quad (16)$$

Импульсы суммарных сил трения на поверхности рассматриваемого отсека

$$T = - \int_0^x \pi r \tau_0 dx = - \int_0^x \pi r \xi Re^{-1/4} \rho V^2 dx \quad (17)$$

Уравнение количества движения с учетом уравнений (11—17) примет вид:

$$\begin{aligned} & -\rho \frac{\pi r^2}{2} V_0^2 + \rho \frac{\pi(r-\delta)^2}{2} V^2 + \int_0^x \pi \rho (r-y) U^2 dy = \\ & = \rho \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{V^2 - V_0^2}{2} - \pi r \int_0^x \xi \rho V^2 \cdot Re^{-1/4} dx + \int_0^x \rho g \frac{\pi r^2}{2} \sin \alpha dx \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим отдельно левую часть уравнения (18)

$$\begin{aligned} k &= -\rho \frac{\pi r^2}{2} V_0^2 + \rho \frac{\pi(r-\delta)^2}{2} V^2 + \int_0^x \pi \rho (r-y) U^2 dy \\ &= \int_0^{\delta} \pi \rho (r-y) V^2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{2n} dy = \frac{7}{9} \pi r \rho V^2 \delta - \frac{7}{16} \pi \rho V^2 \cdot \delta^2 \end{aligned} \quad (19)$$

После ряда преобразований получаем:

$$\begin{aligned} k &= -\pi \rho \frac{r^2 V_0^2}{2} + \pi \rho \frac{V^2 r^2}{2} \left[1 - 2 \frac{\delta}{r} + \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right] + \\ &+ 7 \pi \rho V^2 r^2 \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{\delta}{r} - \frac{1}{16} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (20)$$



Подставляя значение $\frac{\delta}{r}$ из уравнения (9а) в уравнение (20), получим:

$$k = -\rho\pi \frac{r^2}{2} \cdot V_0^2 + \pi\rho \frac{V^2}{2} \cdot r^2 \left[-\frac{686}{64} - \frac{14}{18} \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} + \right. \\ \left. + 15 \frac{V_0}{V} \right] + 7\pi\rho V^2 r^2 \left[0,708 + \frac{142}{1152} \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} - \frac{15}{16} \cdot \frac{V_0}{V} \right] \quad (21)$$

Приращение количества движения из уравнения (10а)

$$\frac{dk}{dx} = \frac{dP}{dx} + \frac{dG}{dx} - \frac{dT}{dx} \quad \text{или}$$

$$dk = dP + \frac{dG}{dx} dx - \frac{dT}{dx} \cdot dx \quad (20) \quad \text{где}$$

$$dk = \pi\rho V r^2 \left\{ \left[-\frac{686}{64} - \frac{14}{8} \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} + 0,15 \frac{V_0}{V} \right] + \right. \\ \left. + \rho \frac{\pi V^2}{2} r^2 \left\{ \frac{14}{16} \left[\left(\frac{15}{16}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \right]^{-1/2} \cdot \frac{15V_0}{V} - \frac{15V_0}{V^2} \right\} + \right. \\ \left. + 14 \pi\rho V r^2 \left[0,708 + \frac{142}{1152} \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} - \frac{15}{16} \cdot \frac{V_0}{V} \right] + \right. \\ \left. + 7\pi\rho V^2 r^2 \left\{ -\left[\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \right]^{-1/2} \cdot \frac{142}{2304} \cdot \frac{15V_0^2}{V^2} + \frac{15V_0}{16V^2} \right\} \right\} dV \quad \text{или} \\ dk = \pi r^2 \rho \left\{ -0,8V - 0,025V \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} + \right. \\ \left. + 0,95 V_0 + 0,1 V_0 \left[\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \right]^{-1/2} \right\} dV \quad (22)$$

$$dP = \frac{\pi r^2}{2} \rho V dV$$

$$dG = -d \int \rho g \frac{\pi r^2}{2} \sin \alpha dx \quad \text{или}$$

$$\frac{dG}{dx} = +\rho g \frac{\pi r^2}{2} \sin \alpha \quad (23)$$

$$dT = -d \int \xi \rho V^2 R_c^{-1/4} \pi r dx \quad \text{или}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\xi \rho V^2 R_c^{-1/4} \cdot \pi r \quad (24)$$

Уравнение (22) изменения количества движения примет вид

$$\begin{aligned} \pi r^2 \rho \left\{ -0,8V - 0,025V \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} + 0,95 V_0 + \right. \\ \left. + 0,1V_0 \left[\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \right]^{-1/2} \right\} dV = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \rho V dV + g \rho \frac{\pi r^2}{2} \cdot \sin \alpha dx - \\ - \pi r \rho \xi V^2 R_e^{-1/4} dx \end{aligned} \quad (25)$$

Сокращая на πr и выделяя переменные из уравнения (25), получим

$$\begin{aligned} r \left\{ -1,3V - 0,025V \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} + \right. \\ \left. + 0,95 V_0 + 0,1 V_0 \left[\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \right]^{-1/2} \right\} dV = \\ = \left(g \cdot \frac{r}{2} \sin \alpha - \xi V^2 \cdot R_e^{-1/4} \right) dx \quad \text{или} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx = \frac{r}{g \frac{r}{2} \sin \alpha - \xi V^2 R_e^{-1/4}} \left\{ -1,3V - 0,025V \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} + \right. \\ \left. + 0,95 V_0 + 0,1 V_0 \left[\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \right]^{-1/2} \right\} dV \end{aligned} \quad (26)$$

При малых уклонах дериивации величиной $g \frac{r}{2} \sin \alpha$ (ввиду малости $\sin \alpha$) можно пренебречь по сравнению с $\xi V^2 R_e^{-1/4}$. Учет этого члена в уравнении (26) принципиальной трудности не представляет, но ради упрощения задачи нами этот член отброшен.

$$\begin{aligned} dx = \frac{r}{\xi^2 R_e^{-1/4}} \left[\frac{13}{V} + \frac{0,025}{V} \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)} - 0,95 \frac{V_0}{V^2} - \right. \\ \left. 0,1 \frac{V_0}{V^2} \left[\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \right]^{-1/2} \right] dV. \end{aligned} \quad (27)$$

Для облегчения интегрирования уравнения (27) обозначим

$$m = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V}{V_0} - 1 \quad (28)$$

$$V = V_0 (1 + m) \quad dV = V_0 dm$$

Пределы изменения m от нуля до m'

$$\int_0^m \frac{1,3}{V} = 1,3 \ln(1+m)$$

$$\int_0^m \frac{0,025}{V_0(1+m)} \sqrt{\frac{15}{1+m} - 11,48} V_0 dm = \int_0^m \frac{0,025}{1+m} \sqrt{\frac{3,52 - 11,48 m}{1+m}} dm$$

Делая подстановку $1+m=t^2$ или $dm=2tdt$, получим

$$\int_0^m \frac{0,025}{1+m} \sqrt{\frac{3,52 - 11,48 m}{1+m}} dm = 0,17 \int \frac{\sqrt{1,31-t^2}}{t^2} dt =$$

$$= -0,17 \left[\frac{\sqrt{1,31-m}}{\sqrt{1+m}} + \arcsin \frac{\sqrt{1+m}}{1,145} \right] + 0,278$$

$$\int 0,95 \frac{V_0}{V^2} dV = -0,95 \left(1 - \frac{1}{1+m} \right)$$

$$\int 0,1 \frac{V_0}{V^2} \left[\left(\frac{15}{8} \right)^2 - 15 \left(1 - \frac{V_0}{V} \right) \right] dV = 0,1 \int \frac{V_0 dV}{V^2 \sqrt{15 \frac{V_0}{V} - 11,48}}$$

Делая подстановку $\frac{V_0}{V} = x$ $dV = -\frac{V_0}{x^2} dx$

$$= -0,1 \int \frac{dx}{\sqrt{15x - 11,48}} = -0,0133 \left[\sqrt{\frac{15}{1+m} - 11,48} - 1,88 \right]$$

Подставляя полученные интегралы в уравнение (27), получим

$$L_x = \frac{r R_e^{1/4}}{\xi} \left\{ -0,70 + 1,3 \ln(1+m) + \frac{0,95}{1+m} - \right. \\ \left. - 0,17 \left[\sqrt{\frac{0,31-m}{1+m}} + \arcsin \frac{\sqrt{1+m}}{1,145} \right] + 0,0133 \sqrt{\frac{15}{1+m} - 11,48} \right\} \quad (29)$$

$$\text{или} \quad L_x = \frac{r R_e^{1/4}}{\xi} f(m) \quad (30)$$

Эта окончательная формула устанавливает связь между тремя безразмерными величинами

$\frac{L_x}{r}$, $\frac{R_e^{1/4}}{\xi}$, $f(m)$ и дает возможность очень просто вычислять длину входного участка, т. е. ту длину, на протяжении которой скорости полностью переформируются.

Полученное уравнение можно проверить по пограничным условиям, т. е. $x=0$, $V=V_0$ и толщине пограничного слоя $\delta=0$.

Действительно,

$$m = \frac{V}{V_0} - 1 = 0$$

из уравнения (29) при $m=0$ $f(m)=0$.

Для определения полной длины переходного участка необходимо принять (условие 5)

$$m = \frac{V}{V_0} - 1 = \frac{V}{0,82V} - 1 = 0,23$$

$$f(m) = \left\{ -0,70 + 1,3 \ln(1 + 0,23) + \frac{0,95}{1 + 0,23} - 0,17 \left[\sqrt{\frac{0,31 - 0,23}{1 + 0,23}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \arcsin \frac{\sqrt{1 + 0,23}}{1,145} \right] \right\} + 0,0133 \sqrt{\frac{15}{1 + 0,23}} - 11,48 = 0,0853$$

Значение коэффициента ξ можно взять равным [5,9] 0,025.

Полная длина входного участка будет

$$L = \frac{r}{\xi} Re^{1/4} f(m) = \frac{0,0853}{0,0250} r Re^{1/4} = 3,4 r Re^{1/4}$$

$$L = 3,4 r Re^{1/4} \quad (31)$$

Полная длина входного участка, полученная Шиллером для ламинарного лотка, равняется [3,6]

$$L_L = 0,574 r Re \quad (32)$$

Как видно структура формул (31) и (32) в основном одинаковая, только с той принципиальной разницей, что значения коэффициентов $f(m)$ резко различаются и, что самое главное, число Рейнольдса в ламинарном потоке дано в первой степени. Так и надо было ожидать, так как при турбулентном движении жидкости скорости несравнимо быстрее выравниваются и длина входного участка вследствие этого становится более короткой по сравнению с ламинарным движением.

Для исследованных в „ГЭЛ“ [4] переходных участков, для которых $Re = 69000$ $r = 0,1$ м, длина турбулентного переходного участка по формуле (31) равна

$$L = 3,4 \times 0,1 \times 69000^{1/4} = 5,50 \text{ м}$$

Это подтверждается опытами, произведенными в „ГЭЛ“, а также многочисленными, чисто эмпирическими указаниями, имеющимися в литературе [2,10,11,12]. Эти указания даны для $\frac{L}{r} = 40 \div 60$,

при которых изменение профиля распределения скоростей заканчивается.

Длина ламинарного переходного участка по формуле Шиллера будет:

$$L_d = 0.574 \cdot 0.1 \times 69000 \approx 400 \text{ м или}$$

$$\frac{L}{r} = 4000.$$

Для облегчения вычислений значений коэффициентов $f(m)$ по формуле (29) составлены таблица и графики (рис. 7).

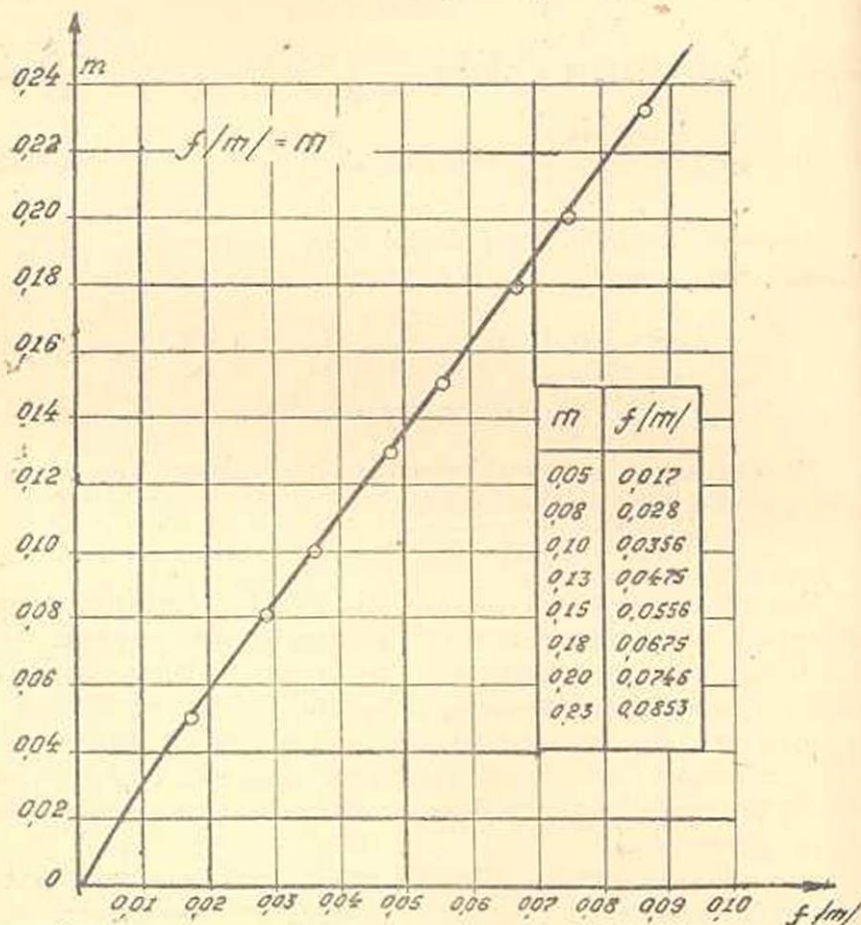


Рис. 7.

Таким образом формула (30) дает искомую аналитическую зависимость, по которой весьма просто можно определить ту длину, за пределами которой эпюры скоростей не подвержены никаким изменениям, т. е. эпюра скорости принимает свою нормальную форму. Кроме того, это уравнение подводит научную базу под критический подход к имеющимся в литературе указаниям относительно

но различных величин отношения $\frac{L}{d}$ (длины входного участка к диаметру).

Однако задача наша была бы односторонней, если бы не был затронут вопрос о величине коэффициентов дополнительных потерь на длине входного участка. Для определения этой величины принимаем в основу формулу турбулентного сопротивления [8].

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \rho \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{V^3}{2} \quad (33)$$

Согласно уравнениям (14) и (28)

$$m = \frac{V}{V_0} - 1 \quad (14)$$

$$p - p_0 = \rho \frac{V^2 - V_0^2}{2} \quad (28)$$

Уравнение (33) можно преобразовать следующим образом:

$$p_0 - p = \rho \frac{V_0^2}{2} \left[\frac{V^2}{V_0^2} - 1 \right] = \rho \frac{V_0^2}{2} [(1+m)^2 - 1] = \rho \frac{V_0^2}{2} (2m + m^2)$$

$$\text{или} \quad \frac{p_0 - p}{\rho \frac{V_0^2}{2}} = 2m + m^2 \quad (34)$$

Из уравнения (33) имеем

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\rho \frac{V^3}{2}} \cdot \frac{d}{x_2 - x_1}$$

с учетом уравнения (34) получим

$$\lambda = \frac{2m + m^2}{x_2 - x_1} \cdot d \quad (35)$$

Из уравнения (30)

$$\text{или} \quad \frac{L_x}{r} = \frac{1}{\xi} Re^{1/4} \cdot f(m)$$

$$\frac{x_2 - x_1}{d} = \frac{1}{2\xi} Re^{1/4} \cdot f(m) \quad (36)$$

Подставляя значение $\frac{x_2 - x_1}{d}$ из уравнения (36) в уравнение (35), получим

$$\lambda = \frac{2\xi(2m + m^2)}{Re^{1/4} f(m)} \quad \text{или} \quad (37)$$

$$\lambda = \frac{A}{R_e^{1/4}} \quad (38)$$

где

$$A = \frac{2\xi(2m+m^2)}{i(m)} \quad (39)$$

Как видно из уравнения (38) значение коэффициента дополнительных потерь (за счет длины входного участка) обратно пропорционально числу Рейнольдса. Так и надо было ожидать, так как при больших числах Рейнольдса длина входного участка укорачивается благодаря более быстрому выравниванию эпюры скорости в сильно турбулентном потоке.

На основании вышеизложенного общий коэффициент потерь напора конфузора (рис. 4), определяется суммой двух коэффициентов

$$\xi_0 = \xi_1 + \lambda \quad \text{где}$$

ξ_1 — коэф. потерь, определяемый из уравнения Бернулли [4]

$$\xi_1 = \frac{\frac{V_1^2}{2g} + \Delta h - h_e}{\frac{V_2^2}{2g}} \quad (40)$$

Входящие в формулу (40) величины изображены на рис. 8, кроме h_e , которая определяется по формуле Шеши и равна

$$h_e = \frac{V_{cp}^2 \cdot l}{C_{cp}^2 \cdot R_{cp}}$$

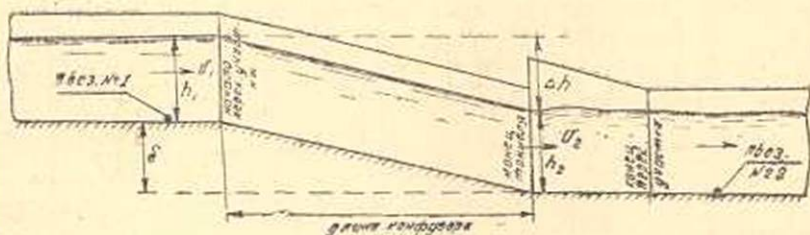


Рис. 8.

λ — коэффициент дополнительной потери напора на длине входного участка, определяемый по формуле (37).

Для исследованного в Гидроэлектрической лаборатории переходного участка деривации ГюмушГЭС имеем следующие величины

Из опытов по формуле (40) получено [4]

$$\xi_1 = 0.10$$

Дополнительный коэффициент потери по формуле (37)

$$\lambda = \frac{2\xi(2m+m^2)}{R_e^{1/4}f(m)} = \frac{2 \cdot 0,025 \cdot 0,513}{69000^{1/4} \cdot 0,0853} \approx 0,02$$

Общий коэффициент потери напора на вход по формуле (37)

$$\xi_0 = 0,10 + 0,02 = 0,12$$

Как видно, разница довольно ощутительная, так как общий коэффициент потери на вход увеличивается примерно на 20%.

Надо при этом учесть еще одно обстоятельство, что скорости в Гюмшской деривации (в туннели) довольно большие; при уменьшении этих скоростей в допустимых пределах % расхождения увеличится, так как при этом число Рейнольдса уменьшается (см. формулу 37).

Действительно, при скоростях порядка 3,5 м/сек. в натуре или 70 см/сек. на модели (масштаб модели 1/25), число Рейнольдса $R_e = 54000$ (R_e отнесено к радиусу). Тогда по формуле (37) коэффициент дополнительных потерь напора по длине входного участка будет

$$\lambda = \frac{2\xi(2m+m^2)}{R_e^{1/4}f(m)} = \frac{2 \cdot 0,025 \cdot 0,513}{54000^{1/4} \cdot 0,0853} \approx 0,023.$$

Отсюда следует, что значение коэф. дополнительных потерь увеличивается с уменьшением числа Рейнольдса и % расхождения тем больше, чем меньше значение R_e .

Для исследованных переходных участков на модели ГюмшГЭС дополнительные потери могут достигнуть 25% от потерь в конфузоре.

На основании вышеприведенных подсчетов по формулам (37) (35) и (30) и сопоставления их с опытными данными, полученными в Гидроэлектрической лаборатории*, можно сделать тот вывод, что недоучет дополнительных потерь за счет длины входного участка должен привести к недостаточно точным значениям коэффициентов потерь для переходного участка в целом. Это в конечном счете идет не в запас.

Значение коэффициента λ тем более ощутительное, чем меньше значение числа R_e .

Полученные формулы, кроме всего вышесказанного, вносят определенную ясность в имеющиеся в литературе [2,10,11,12] указания о пределах отношения $\frac{L_x}{d}$, которое принимается постоянным. Но, как видно из полученных формул, это отношение не есть величина

* Исследование переходных участков ГюмшГЭС подготавливается к печати.

постоянная, ввиду переменности L_x (длины входного участка) и зависит от числа Re .

Приведенная методика аналитического исследования по определению дополнительных потерь, дает возможность применить ее не только к задаче конфузора, но и к самым различным задачам, связанным с определением потерь напора, если они обусловлены перераспределением скоростей.

Для более наглядной иллюстрации полученных формул (36) и (37) составлены кривые (рис. 9, 10).

Из кривой (рис. 10) видно, что отношение

$$\frac{2m + m^2}{f(m)} = \frac{2m + m^2}{\frac{Lx \cdot \xi}{rRe^{1/4}}}$$

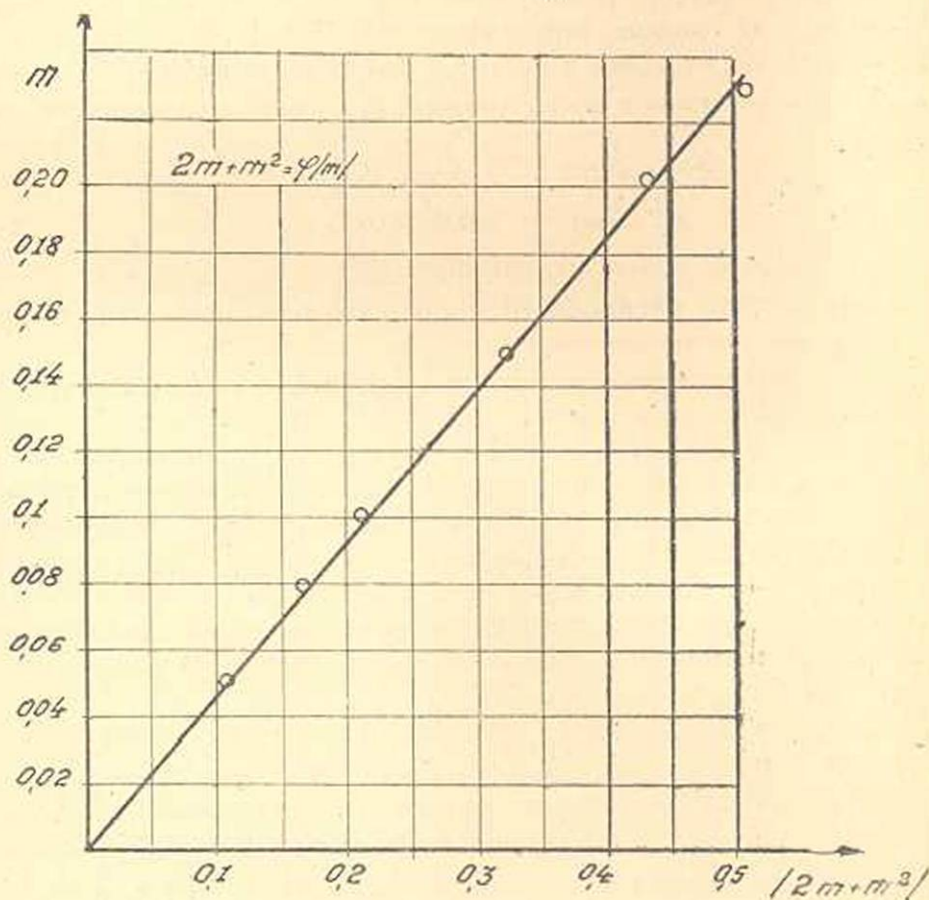


Рис. 9.

есть величина постоянная и равняется тангенсу угла, составляемого прямой АВ (рис. 10) с осью $\frac{Lx\xi}{rRe^{1/4}}$.

Выводы

1. При изменении сечения канала потери напора не ограничиваются местом сужения потока.

Потери возникают на гораздо большем протяжении (вниз по течению) и сохраняются до того места, где эпюра скоростей принимает свою окончательную „установившуюся“ форму.

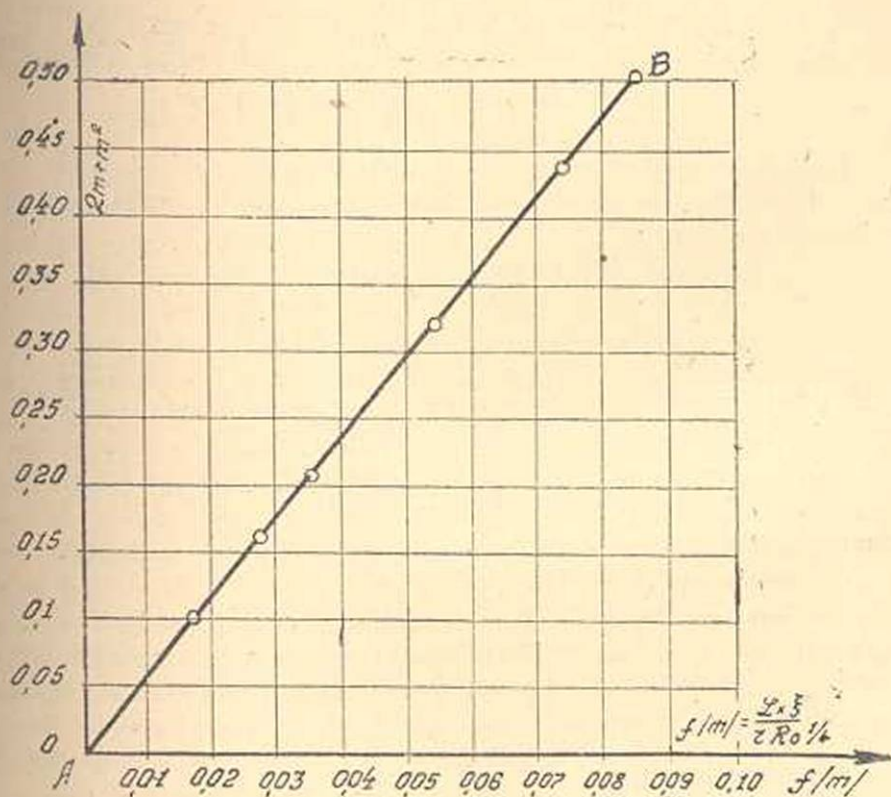


Рис. 10.

Длина дериивации, на протяжении которой изменение скоростей прекращается и устанавливается окончательная форма эпюры скоростей, называется „длиною входного участка“.

2. Причиной образования дополнительных потерь на переходном участке является главным образом перераспределение векторов скоростей, что создает дополнительные силы трения, которые должны быть оценены как потери напора на местные сопротивления.

3. Длина переходного участка (конфузора) определяется суммой двух величин: длиной конфузора, где заканчиваются изменения поперечных сечений, и длиной входного участка канала, где кончаются изменения эпюры скоростей. В соответствии с этим суммарный коэффициент потерь определяется по формуле

$$\xi_0 = \xi_1 + \lambda,$$

где

ξ_1 — коэффициент потери только в конфузоре, определяемая по формуле

$$\xi_1 = \frac{\frac{V_1^2}{2g} + \Delta h - h_e}{\frac{V_2^2}{2g}}$$

λ — коэффициент потери на длине входного участка, определяемая по формуле

$$\lambda = \frac{2\xi(2m + m^2)}{Re^{1/4} f(m)} \text{ или } \lambda = \frac{2m + m^2}{L_x} \cdot d$$

4. Длина турбулентного входного участка определяется по формуле

$$L_x = \frac{rR_c^{1/4}}{\xi} f(m) = \\ = \frac{rR_c^{1/4}}{\xi} \left\{ -0,70 + 1,3 \ln(1+m) + \frac{0,95}{1+m} - 0,17 \left[\sqrt{\frac{0,31-m}{1+m}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \arcsin \frac{\sqrt{1+m}}{1,145} \right] + 0,0133 \sqrt{\frac{15}{1+m}} - 11,48 \right\};$$

значения $f(m)$ можно определить из рис. 7 или из таблицы.

Коэффициент ξ постоянен и равен 0.025.

5. Произведенные подсчеты показали, что величина λ — в основном зависит от числа Рейнольдса и может достигнуть 20–30% от потери в конфузоре. При уменьшении числа Рейнольдса величина λ увеличивается.

Гидроэлектрическая лаборатория
Водно-Энергетического Института
Академии Наук Армянской ССР.

Поступило 11 XI 1948.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прандтль и Титъенс*—Гидро-и аэродинамика, Т. II, стр. 34 и 91, 1935.
2. *И. Г. Есьман*—Гидравлика, 120, 1938.
3. *Л. Шиллер*—Hydro-and aerodynamik, В. 4, 1932.
4. Отчеты по исследованию переходных участков деривации ГюмшГЭС—часть I и II. Гидроэлектрическая лаборатория (ГЭЛ) 1948.
5. *И. Г. Ханович*—Теория корабля, 240, 1939.
6. *Л. Г. Лойцянский*—Аэродинамика пограничного слоя, стр. 138, 1941.
7. *Л. Прандтль*—Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности. Проблемы турбулентности под ред. Великанова. 1936.
8. *Б. А. Бахметев*—Механика турбулентного потока, стр. 29, 1939.
9. *Б. Н. Юрьев*—Экспериментальная аэродинамика, стр. 271, 1936.

10. Դ. Բախեր—Гидравлика трубопроводов, стр. 140, 1936.
 11. Դաբեон—Гидравлика и ее приложения, стр. 320, 1934.
 12. И. Г. Есьман—Местные сопротивления в закрытых каналах и трубах и зависимость их от распределения скоростей в поперечном сечении, 1914.

Ա. Կ. Աճառյան

ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՏԵՍՈՒՅՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԲԱՑ ԴԵՐԻՎԱՑԻԱՅԻ ԱՆՅՈՒՄԱՅԻՆ ՏԵՂԱՄԱՍԵՐՈՒՄ ՃՆՇՄԱՆ ԿՈՐՈՒՍՏԸ ՈՐՈՇԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

1. Ջրանցքի կորվածքի փոփոխման ժամանակ ճնշման կորուստները չեն սահմանափակվում կորվածքի նեղացման տեղով: Կորուստներն առաջանում են ավելի մեծ տարածություն վրա (հասանքով ներքև) և առաջանում են մինչև այն տեղը, որտեղ արագությունների էպյուրան կրնադունի իր նորմալ կայունացված ձևը:

Դերիվացիայի այն երկարությունը, որում դադարում է արագության փոփոխումը և հաստատվում է արագության էպյուրայի վերջնական ձևը, կոչվում է «մուտքի տեղամասի երկարություն»:

2. Անցման տեղամասում առաջացող լրացուցիչ կորուստների պատճառը հանդիսանում է զլխավորապես արագությունների վեկտորների վերադասումը, որն ստեղծում է շփման լրացուցիչ ուժեր և որոնք պետք է զնախադին ինչպես տեղական զիմադրություններին համապատասխանող ճնշման կորուստներ:

3. Մուտքի տեղամասի երկարությունը (կոնֆուզոր) որոշվում է երկու մեծությունների գումարով՝ կոնֆուզորի երկարությամբ, որտեղ վերջանում է բնականական կորվածքի փոփոխությունը և ջրանցքի մուտքի տեղամասի երկարությամբ, որտեղ վերջանում են արագությունների էպյուրայի փոփոխությունները:

Մյուս համապատասխան լրիվ կորուստների գործակիցը կորոշվի հետևյալ բանաձևով

$$\xi_0 = \xi_1 + \lambda,$$

որտեղ ξ_1 կորուստների գործակիցն է միայն կոնֆուզորում և որոշվում է

$$\xi_1 = \frac{V_1^2}{2g} + \Delta h - h_c$$

$$\frac{V_2^2}{2g} \quad \text{բանաձևով,}$$

λ -ն մուտքի տեղամասի երկարությամբ առաջացող կորուստների գործակիցն է և որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\lambda = \frac{2\xi(2m+m^2)}{R_e^{1/4} f(m)} \quad \text{կամ} \quad \lambda = \frac{2m+m^2}{L_x} \cdot d$$

4. Մուտքի տեղանքի երկարությունը որոշվում է հետևյալ բանա-

կերով

$$L_x = \frac{r_{1,1}^2}{r_{1,1}^2} i(m) = \frac{\frac{2}{3}}{r_{1,1}^2} \left\{ -0,70 + 1,3 \ln(1+m) + \frac{1}{1+m} - \right. \\ \left. -0,17 \left[\sqrt{\frac{0,31-m}{1+m}} + \arcsin \sqrt{\frac{1,145}{1+m}} \right] + 0,0133 \sqrt{\frac{1}{1+m}} - 11,48 \right\}$$

որտեղ $\xi = 0,025$, իսկ i (m) արժեքը որոշում ենք 7-րդ գծադրվյալ կամ համապատասխան աղյուսակից:
 5. Կատարված հաշվարկները ցույց են տալիս, որ λ -ի սկզբնական փոփոխությունը λ -ի փոփոխության հարաբերակարար փոփոխությունը կազմում է մոտավորապես 20—30%: Մեխանիկական թվի փոփոխության հետ λ -ն փոփոխվում է: