ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտուբ. I, № 6, 1948 Физ.-мат. естеств. и тех. науки

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. Т. Хачатурян

Устойчивость круговой цилиндрической оболочки

Задачи об устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки при действии продольной сжимающей силы, равномерной поперечной нагрузки, крутящих моментов, а также при совместном действии продольной силы и поперечного давления, решены в работах ряда авторов (Мизес, Тимошенко, Шверин, Доннель, Флюге, Зволинский, Муштари, Галеркин и др.). Кроме Галеркина, указанные авторы свои решения базируют на уравнениях Лява, при некотором их изменения в сторону упрощения. Галеркин пользуется им же выведенными уравнениями.

В 1944 г. В. З. Власов опубликовал работу [1], в которой уравнения Лява уточнены в деталях. Предложенные Власовым уравнения, в смысле последовательности в учете малых величин одинакового порядка, являются наиболее совершенными.

Ниже, на базе уравнений Власова, дается решение задачи об устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки при одновременном действии продольной сжимающей силы, поперечного равномерного давления и крутящего момента. Из полученного общего решения, в качестве частных случаев, получаются решения отдельных задач, рассмотренных указанными авторами.

1. Уравнение устойчивости, приведенное в работе Власова, имеет следующий вид:

$$\nabla^8\varphi+2\nabla^6\varphi+\nabla^4\varphi-2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}-\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}\right)\nabla^2\varphi+12(1-\sigma^2)\frac{R^2}{\delta^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^4}=$$

$$=\frac{R^2}{D}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(T_1^\circ\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^4\varphi+S^\circ\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^4\varphi\right)+T_2^\circ\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)\nabla^4\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}S^\circ\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^4\varphi\right], \qquad (1.1)$$

где α и β—безразмерные координаты в долях радиуса оболочки R, соответственно по образующей и дуге круга, σ—коэфициент Пуассона, δ—постоянная толщина оболочки, D—цилиндрическая жесткость,

T_1° и T_2°—нормальные усилия вдоль α и β в момент потери устойчивости, S°—сдвигающее усилие, φ—искомая функция перемещений,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}.$$

Перемещения, усилия и моменты выражаются через φ формулами, приведенными в вышеупомянутой работе Власова. Выражение для радиального перемещения w, которым ниже мы будем пользоваться, имеет следующий вид:

$$w = \nabla^4\varphi. \tag{1.2}$$

2. Предположим, что на замкнутую цилиндрическую оболочку одновременно действуют равномерно распределенная поперечная нагрузка q, равномерно распределенные на концах цилиндра продольные сжимающие усилия T и крутящий момент M, который осуществляется также приложенными по концам цилиндра равномерно распределенными касательными напряжениями. Тогда в (1.1) можем принять:

$$T_1^\circ = -T;\ T_2^\circ = -qR;\ S^\circ = \frac{M}{2\pi R^2}. \tag{2.1}$$

Уравнению (1.1) можно удовлетворить, полагая его решение в следующем виде:

$$\varphi = \sum_m \varphi_m\ \mathrm{Sin}\,(\lambda_m\alpha - n\beta). \tag{2.2}$$

Здесь n—число полуволн в направлении окружности,

$$\lambda_m = \frac{m\pi R}{a}, \tag{23.}$$

m—число полуволн по длине цилиндра, a—длина цилиндра. Начало координат принято на одном из концов цилиндра.

Подставив (2.2) в (1.1), получим следующее характеристическое уравнение (опустив для удобства индекс m при λ_m).

$$(\lambda^2+n^2)^4 - 2(\lambda^2+n^2)^3 + (\lambda^2+n^2)^2 + 2(1-\sigma)\lambda^2(\lambda^4-n^4) + \lambda^4k^4 -$$
$$-(\lambda^2+n^2)^2[t_1\lambda^2 + t_2(n^2-1) + 2S\lambda n] = 0 \tag{2.4}$$

Здесь введены обозначения:

$$t_1 = \frac{TR^2}{D};\ t_2 = \frac{qR^3}{D};\ S = \frac{M}{2\pi D} \tag{2.5}$$

$$k^4 = 12(1-\sigma^2)\frac{R^2}{\delta^2};\ D = \frac{E\delta^3}{12(1-\sigma^2)} \tag{2.6}$$

Полагая, что T, q и M возрастают пропорционально, можем принять

$$t_1=\gamma_1 t;\ t_2=\gamma_2 t;\ s=\gamma_3 t \qquad (2.7)$$

Учитывая (2.7), из (2.4) имеем:

$$t=\frac{(\lambda^2+n^2)^2-2(\lambda^2+n^2)+1+2(1-\sigma)\dfrac{\lambda^2(\lambda^2-n^2)}{\lambda^2+n^2}+\dfrac{k^4\lambda^4}{(\lambda^2+n^2)^2}}{\gamma_1\lambda^2+\gamma_2(n^2-1)+2\gamma_3\lambda n} \qquad (2.8)$$

Критическое состояние оболочки характеризуется тем, что при нем величина t принимает минимальное значение. При этом λ и n должны быть такими, чтобы решение (2.2) удовлетворяло также условиям закрепления цилиндра на обоих его концах.

Для очень длинного цилиндра удовлетворение граничных условий не требуется. В этом случае из (2.8):

1) полагая $\gamma_2=\gamma_3=0$, $\gamma_1=1$, $n=0$ и подбирая λ так, чтобы t оказалось наименьшим, получим решение Лоренца—Тимошенко для критической продольной сжимающей силы;

2) полагая $\gamma_1=\gamma_3=0$, $\gamma_2=1$, $\lambda=0$ и принимая $n=2$, получим известное решение для критического поперечного давления;

3) полагая $\gamma_1=\gamma_2=0$, $\gamma_3=1$, $n=2$ и подбирая λ так, чтобы t оказалось наименьшим, получим решение Шверина для критического крутящего момента.

Таким образом, для всех указанных частных задач решения получаются из (2.8) в обычном порядке и все они совпадают с известными результатами. Общая задача об очень длинном цилиндре, когда γ_1, γ_2, γ_3 все отличны от нуля, особого интереса не представляет. При наличии продольной сжимающей силы обычно выпучивание происходит от эйлеровой критической силы. Более интересным является задача о короткой оболочке и оболочке средней длины, когда должны быть удовлетворены также и граничные условия. Эта задача, т. е. определение минимального значения t из (2.8) при соблюдении граничных условий на концах цилиндра облегчается, если:

1) ограничиться удовлетворением граничных условий только для радиального перемещения w (которое является главнейшим);

2) упростить (2.8) путем отбрасывания: а) единицы в числителе и б) единицы при γ_2 в знаменателе, т. е. вместо (2.8) определять t по формуле

$$t=\frac{(\lambda^2+n^2)^2-2(\lambda^2+n^2)+2(1-\sigma)\dfrac{\lambda^2(\lambda^2-n^2)}{\lambda^2+n^2}+\dfrac{k^4\lambda^4}{(\lambda^2+n^2)^2}}{\gamma_1\lambda^2+\gamma_2 n^2+2\gamma_3\lambda n} \qquad (2.9)$$

3) в окончательных формулах пренебрегать единицей по сравнению с k^2, т. е. принять:

$$\sqrt{12(1-\sigma^2)}\cdot\frac{R}{\delta}\pm 1=\sqrt{12(1-\sigma^2)}\cdot\frac{R}{\delta} \qquad (2.10)$$

Для металлических оболочек все эти упрощения вполне приемлемы, поскольку последние имеют очень малую толщину (по сравнению с их радиусом). Для железобетонных оболочек, когда отношение $R:\delta$ будет порядка 15—20, эти упрощения могут внести некоторую неточность (главным образом первое). Однако полученные здесь результаты также могут быть вполне удовлетворительными, так как в железобетоне большей точности не требуется (модуль упругости железобетона может меняться в больших пределах, чем минимальные значения выражений (2.8) и (2.9).

Введя вместо n новую переменную z

$$z=\frac{n}{\lambda} \tag{2.11}$$

и подставив (2.11) в (2.9), после сокращения на λ^2, получим:

$$t=\frac{\lambda^2(1+z^2)^2-2(1+z^2)-2(1-\sigma)\dfrac{z^2-1}{z^2+1}+\dfrac{k^4}{\lambda^2(1+z^2)^2}}{\gamma_1+\gamma_2 z^2+2\gamma_3 z} \tag{2.12}$$

Из условий $\partial t/\partial\lambda^2=0$ получим следующую зависимость между λ и z:

$$\lambda(1+z^2)=k. \tag{2.13}$$

Введя (2.13) в (2.12), получим:

$$t=2\frac{k^2-1-z^2-(1-\sigma)\dfrac{z^2-1}{z^2+1}}{\gamma_1+\gamma_2 z^2+2\gamma_3 z} \tag{2.14}$$

Вторая производная t показывает, что (2.14) есть минимальное значение (2.12).

Радиальное перемещение w, согласно (1.2) и (2.2), выразится так:

$$w=\sum_m \varphi_m(\lambda_m^2+n^2)^2 \mathrm{Sin}(\lambda_m\alpha-n\beta) \tag{2.15}$$

Поскольку мы ограничимся удовлетворением граничных условий только для w, в (2.2), а следовательно и в (2.15), берем два члена ряда. Полагая, что края цилиндра свободно оперты, имеем:

$$w=0 \quad \text{при } \alpha=0,\ \alpha=\frac{a}{R}. \tag{2.16}$$

Из (2.15) и (2.16) получим:

$$\left[\varphi_1(\lambda_1^2+n^2)^2+\varphi_2(\lambda_2^2+n^2)^2\right]\mathrm{Sin}\, n\beta=0 \tag{2.17}$$

$$\varphi_1\left(\lambda_1^2+n^2\right)^2\mathrm{Sin}\left(\lambda_1\frac{a}{R}-n\beta\right)+\varphi_2\left(\lambda_2^2+n^2\right)^2\mathrm{Sin}\left(\lambda_2\frac{a}{R}-n\beta\right)=0$$

Имея в виду, что $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 \neq 0$, а координата β переменная, из (2.17) находим:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 2\,pc, \tag{2.18}$$

где p — произвольное целое положительное число, а

$$c = \frac{\pi R}{a} \tag{2.19}$$

Введя вместо z его значение из (2.11), формулу (2.13) можем представить так:

$$\lambda^2 + n^2 = k\lambda. \tag{2.20}$$

λ_1 и λ_2, входящие в (2.18), являются корнями уравнения (2.20). Следовательно:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= k \\ \lambda_1 . \lambda_2 &= n^2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Из (2.18) и (2.21) находим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{k-2pc}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{k+2pc}{2} \\ n &= \frac{\sqrt{k^2-4p^2c^2}}{2} \end{aligned} \tag{2.22}$$

В зависимости от произвольного целого числа p, из (2.22) получим два значения для z, входящего в (2.14):

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{n}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{k+2pc}{k-2pc}} \\ &\text{и} \\ z_2 &= \frac{n}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{k-2pc}{k+2pc}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Подставив z_1 и z_2 из (2.23) в (2.14), получим два значения для t:

$$t = 2\,\frac{k^2(k-2pc) - 2k - 2pc.\,\dfrac{1-\sigma}{k}}{\gamma_1(k-2pc) + \gamma_2(k+2pc) + 2\gamma_3\sqrt{k^2-4p^2c^2}} \tag{2.24}$$

$$t=2\frac{k^2(k+2pc)-2k+2pc\frac{1-\sigma}{k}}{\gamma_1(k+2pc)+\gamma_2(k-2pc)+2\gamma_3\sqrt{k^2-4p^2c^2}}\tag{2.25}$$

По заданным γ_1, γ_2 и γ_3 нужно подобрать такие значения числа p, чтобы правые части (2.24) и (2.25) оказались наименьшими. Меньшее из значений t, определенное из (2.24) и (2.25) указанным образом, будет критическим числом.

Заметим, что при определении n перед корнем правой части (2.22) мы брали знак плюс. Если бы мы брали знак минус, то этим в знаменателях (2.24) и (2.25) знак перед γ_3 оказался бы отрицательным. Но при этом в (2.2) также должны были менять знак перед n, а это приводило бы к повторной замене знака перед γ_3; следовательно вместе с предыдущим опять получается перед γ_3 знак плюс. Таким образом, в (2.24) и (2.25) величина γ_3 всегда должна быть положительной, независимо от направления крутящего момента M. Величины γ_1 и γ_2 являются положительными соответственно при продольном сжатии и поперечном внешнем давлении. При растяжении и внутреннем давлении знаки перед γ_1 и γ_2 должны быть заменены на минус.

При положительных γ_1 и γ_2 всегда наименьшее значение для t дается (2.24), причем число p должно быть взято наибольшим из всех возможных. Последнее ограничено тем, что подкоренное выражение должно быть действительным числом. Следовательно

$$\begin{gathered} k-2cp_{max}>0 \\ k-2c(p_{max}+1)<0 \end{gathered}\tag{2.26}$$

Кроме (2.26), если иметь в виду, что наименьшее число полуволн в направлении образующей не может быть меньше единицы, то мы должны принять

$$2cp_{max}=k-2c.\tag{2.27}$$

При этом из (2.22) и (2.3) получим следующие значения для чисел полуволн

$$\begin{gathered} m_1=1 \\ m_2\approx\frac{k}{c}-1 \\ n\approx\sqrt{kc-c^2} \end{gathered}\tag{2.28}$$

Подставив (2.27) в (2.24), для наименьшего критического числа t получим следующую формулу

$$t_{min}=\frac{2ck^2-2k-(1-\sigma)\left(1-\frac{2c}{k}\right)}{\gamma_1c+\gamma_2(k-c)+2\gamma_3\sqrt{ck-c^2}}\tag{2.29}$$

На основании (2.10) последний член в числителе (2.29) всегда можно отбросить. Кроме этого можно принять $kc-1 \approx kc$, т. к.

$$kc=\pi \sqrt[4]{12(1-\sigma^2)} \cdot \frac{R}{a}\sqrt{\frac{R}{\delta}} \tag{2.29}$$

представляет по сравнению с единицей большое число. Таким образом в качестве расчетной формулы для t_{min} получим формулу

$$t_{min}=\frac{2ck^2}{\gamma_1 c+\gamma_2(k-c)+2\gamma_3\sqrt{ck-c^2}} \tag{2.31}$$

Для не очень коротких оболочек в (2.31) можно принять

$$k-c \approx k.$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Продольное сжатие цилиндра

В этом случае $\gamma_2=\gamma_3=0$, $\gamma_1=1$. Получим

$$t_{min}=2k^2=t_1 \tag{2.32}$$

На основании (2.5) находим

$$T_{кр}=\frac{D}{R^2}t_1=\frac{E}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{\delta^2}{R} \tag{2.33}$$

Это есть формула Лоренца—Тимошенко.[2]

2. Поперечное внешнее давление

В этом случае $\gamma_1=\gamma_3=0$; $\gamma_2=1$. Получим

$$t_{min}=\frac{2k^2c}{k-c}=t_2 \tag{2.34}$$

Из (2.5) находим

$$q_{кр}=\frac{D}{R^3}t_2=\frac{2k^2c}{k-c}\cdot\frac{D}{R^3} \tag{2.34}$$

Формула Мизеса для данного случая имеет вид[2]: (в наших обозначениях)

$$q_{кр}=\frac{D}{R^3}\left(n^2-1+\frac{2n^2-1-\sigma}{n^2+c^2}\cdot c^2\right)+\frac{E\delta}{R}\frac{c^4}{(n^2-1)(n^2+c^2)^2} \tag{2.35}$$

где n—число полуволн в окружном направлении.

Если в (2.35) подставить значение n из (2.28) и полагать $kc-1\approx kc$, $k^3+c^3\approx k^3$, то получим (2.34). Следовательно (2.34) равносильна формуле Мизеса с той разницей, что у последнего решение дано в неопределенном виде (n является в 2.35 неизвестным, его нужно подобрать), а (2.34) и (2.28) задачу решают вполне определенно.

3. Кручение цилиндра

В этом случае $\gamma_1=\gamma_2=0$; $\gamma_3=1$. Получим

$$t_{min}=\frac{ck^2}{\sqrt{ck-c^2}}=s \tag{2.36}$$

из (2.5) находим критический крутящий момент

$$M_{кр}=2\pi D\cdot s=2\pi\frac{ck^2}{\sqrt{ck-c^2}}\cdot D \tag{2.37}$$

Эта формула очень близка к формуле Муштари[3]

4. Совместное действие продольного сжатия и поперечного давления

В этом случае $\gamma_3=0$. Принимая $\gamma_2=1$, а за γ_1 отношение

$$\gamma_1=\frac{T}{qR} \tag{2.38}$$

из (2.31) получим:

$$t_{min}=\frac{2k^2c}{\gamma_1 c+k-c}=t_2 \tag{2.39}$$

Критическое давление q согласно (2.5) определится формулой

$$q_к=\frac{D}{R^3}t_2=\frac{2k^2c}{\gamma_1 c+k-c}\cdot\frac{D}{R^3} \tag{2.40}$$

Для случая закрытой цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного внешнего давления, имеем:

$$\gamma_1=\frac{\gamma_2}{2}=\frac{1}{2} \tag{2.41}$$

В этом случае (2.40) дает

$$q_к=\frac{2k^2c}{k-0{,}5c}\cdot\frac{D}{R^3}\ . \tag{2.42}$$

Решение Мизеса для этого случая имеет следующий вид[2]

$$q_{кр}=\frac{E\delta}{R}\frac{1}{n^2+0{,}5c^2}\left[\frac{c^4}{(n^2+c^2)^2}+\frac{\delta^2}{12(1-\sigma^2)R^2}(n^2+c^2)^2\right] \tag{2.43}$$

Если в эту формулу подставим значение n из (2.28), то получим (2.42). Следовательно (2.42) равносильна формуле Мизеса, в которой следует n определить из (2.28).

При γ_1 отличных от (2.41) решение задачи дается формулой (2.40).

5. Совместное действие продольной сжимающей силы и крутящего момента

В этом случае $\gamma_2=0$. Полагая $\gamma_3=1$, а γ_1 определенным из отношений

$$\gamma_1=2\pi R^2\frac{T}{M} \tag{2.44}$$

из (2.31) имеем:

$$t_{min}=\frac{2ck^2}{\gamma_1 c+2\sqrt{kc-c^2}}=s. \tag{2.45}$$

Критический крутящий момент будет равным

$$M_{кр}=2\pi D\cdot s=4\pi\frac{k^2c}{\gamma_1 c+2\sqrt{ck-c^2}}D. \tag{2.46}$$

6. Совместное действие крутящего момента и поперечного давления

В этом случае $\gamma_1=0$. Полагая $\gamma_2=1$, а γ_3 определенным из отношений

$$\gamma_3=\frac{M}{2\pi qR^3}, \tag{2.47}$$

получим:

$$t_{min}=\frac{2ck^2}{k-c+2\gamma_3\sqrt{ck-c^2}}=t_2. \tag{2.48}$$

Критическое давление q определится формулой:

$$q_к=\frac{D}{R^3}t_2=\frac{2ck^2}{k-c+2\gamma_3\sqrt{ck-c^2}}\cdot\frac{D}{R^3} \tag{2.49}$$

Возвращаясь к общему случаю (2.31), мы можем принять один из коэфициентов γ_1, γ_2, γ_3 равным единице, а два остальных коэфициента определить как отношение соответствующих нагрузок. Например, полагая $\gamma_2=1$, должны γ_1 и γ_3 определить так:

$$\gamma_1=\frac{T}{qR};\ \gamma_3=\frac{M}{2\pi qR^3}. \tag{2.50}$$

Тогда из (2.31) будем иметь:

$$t_{min}=\frac{2ck^2}{\gamma_1 c+k-c+2\gamma_3\sqrt{ck-c^2}}=t_2. \tag{2.51}$$

Критическое поперечное давление определится формулой:

$$q_к\frac{D}{R^3}t_2=\frac{2ck^2}{\gamma_1 c+k-c+2\gamma_3\sqrt{ck-c^2}}\frac{D}{R^3} \tag{2.52}$$

Во всех приведенных частных случаях, а также и в общем случае (2.52) количество волн в продольном и поперечном направлениях определятся формулами (2.28).

Примечания

I. Построенное общее решение (2.52), а также все частные решения (2.33), (2.34), (2.37), (2.40), (2.46) и (2.49) были основаны на следующих упрощениях:

1. Были удовлетворены только краевые условия $w=o$ на обоих концах цилиндра;

2. было принято

$$T_2^{\circ}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)\approx T_2^{\circ}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}; \tag{a}$$

3) в окончательных результатах были приняты:

$$\begin{aligned} k^2\pm1&\approx k^2 \\ ck-1&\approx ck \end{aligned} \tag{в}$$

Если бы мы исходили вместо основного уравнения (1.1) из более простого уравнения:

$$\nabla^8\varphi+12\left(1-\sigma^2\right)\frac{R^2}{\delta^2}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^4}=\frac{R^2}{D}\left[T_1^{\circ}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+T_2^{\circ}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2S^{\circ}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\right]\nabla^4\varphi, \quad ...(c)$$

то пришли бы к тем же результатам (2.52), (2.33), (2.34), (2.37), (2.40), (2.46) и (2.49). Это показывает, что все члены в левой части (1.1), не учтенные в (с), по сравнению с членами

$$\nabla^8\varphi+12(1-\sigma^2)\frac{R^2}{\delta^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^4},$$

малы как единица по сравнению с k^2 и kc (это утверждение верно, если оболочки на криволинейных краях имеют опоры, обеспечивающие там $w=o$ и не всегда верно, если на криволинейных краях опор не имеется).

II. Формулы (2.52), (2.34) (2.37) (2.46) и (2.49) дают несколько пониженные значения критических нагрузок, т. к. при определении минимума выражения (2.12) мы полагали λ непрерывным. В действительности должны были подобрать два ближайших целых числа в выражении $\lambda=cm$ (именно $m-1$ и $m+1$) так, чтобы (2.12) при $\lambda=cm$ было меньше, чем при $\lambda=c\,(m-1)$ и $\lambda=c\,(m+1)$. Такой путь осложнял бы математические выкладки и мы не получили бы компактные расчетные формулы. Полученные формулы предпочтительны еще тем, что нам нужно иметь некоторый запас для учета дефектов оболочки (недочеты при изготовлении и пр.).

III. Формулы (2.52) (2.33) (2.34) (2.37) (2.46) и (2.49) могут быть применены также для проверки на устойчивость незамкнутой оболочки. В этом случае только надо в формуле (2.28) вместо n подразумевать $n\frac{\pi}{\Theta}$, где Θ—есть центральный угол оболочки.

Сектор Математики и Механики
Академии Наук Армянской ССР.

Поступило 4 XI 1948.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. З. Власов*—Основные диференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. Прикл. мат. и механика, стр. 109, 1944.
2. *С. П. Тимошенко*—Устойчивость упругих систем. Гостехиздат 1946, Москва—Ленинград.
3. *Х. М. Муштари*—Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применениями к решению задач устойчивости упругого равновесия. Прикл. мат. и механика, стр. 439, 1938.

Թ. Թ. Խաչատրյան

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ տրվում է գլանային թաղանթների կայունության խնդրի լուծումը, երբ թաղանթի վրա ազդում են ընդերկայնական սեղմող ուժեր, ընդլայնական ճնշում, և որոշ մոմենտներ: Ինչպես կրիտիկական թվի, նույնպես և ալիքների թվերի համար (ընդերկայնական ուղղությամբ և թաղանթի շրջագծի ուղղությամբ) տրվում են պարզ բանաձևեր: Որպես մասնավոր դեպքեր, աշխատության մեջ տրված լուծումից ստացվում են Լորենց-Տիմոշենկոյի, Միզեսի, Շվերինի և Մուշտարու դիտած մասնավոր խնդիրների լուծումները: Աշխատության հիմքում ընդունված են Վլասովի բանաձևերը, որոնք ճշտված են 1944 թվին Վլասովի կողմից: Սահմանային պայմաններից բավարարվում են միայն ռադիալ տեղափոխման վրա դրված պայմանները: