ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտութ. I, № 6, 1948 Физ-мат., естеств. и тех. науки

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян

Безмоментная теория анизотропных оболочек

Настоящая статья посвящена расчету анизотропных слоистых оболочек по так называемой „безмоментной теории", когда напряжения от моментов и поперечных усилий столь незначительны, что ими можно пренебрегать.

В отношении равновесия задача безмоментной теории оболочек статически определима; поэтому статическая задача безмоментной теории анизотропных оболочек самостоятельного интереса не представляет.

Однако, перемещения и деформации анизотропных оболочек при безмоментном напряженном состоянии существенно будут отличаться от таковых, найденных для изотропных оболочек.

Укажем, что все условия, необходимые для существования безмоментного напряженного состояния данные для изотропных оболочек остаются в силе и для анизотропных оболочек.

1. Основные уравнения. Непосредственно из уравнений равновесия общей теории оболочек, для безмоментной задачи имеем [1, 2]:

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial AS}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}S-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2\right)+X=0$$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BS}{\partial\alpha}+\frac{\partial AT_2}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}S-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1\right)+У=0 \qquad 1.1$$

$$k_1T_1+k_2T_2=Z^*$$

Как нетрудно заметить, количество неизвестных T_1, T_2, S соответствует количеству уравнений, т. е. имеем статически определимую задачу.

Для перемещений можем написать [3]:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v+k_1w=\frac{1}{2\delta\Omega}(t_{22}T_1-t_{12}T_2),$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u+\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+k_2w=\frac{1}{2\delta\Omega}(t_{11}T_2-t_{12}T_1), \qquad 1.2$$

$$\omega=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)=\frac{1}{2\delta t_{66}}S\,.$$

Здесь мы ограничиваемся рассмотрением слоистых оболочек симметричного, относительно срединной поверхности, строения, когда каж-

* Здесь и в дальнейшем будем придерживаться известных обозначений.

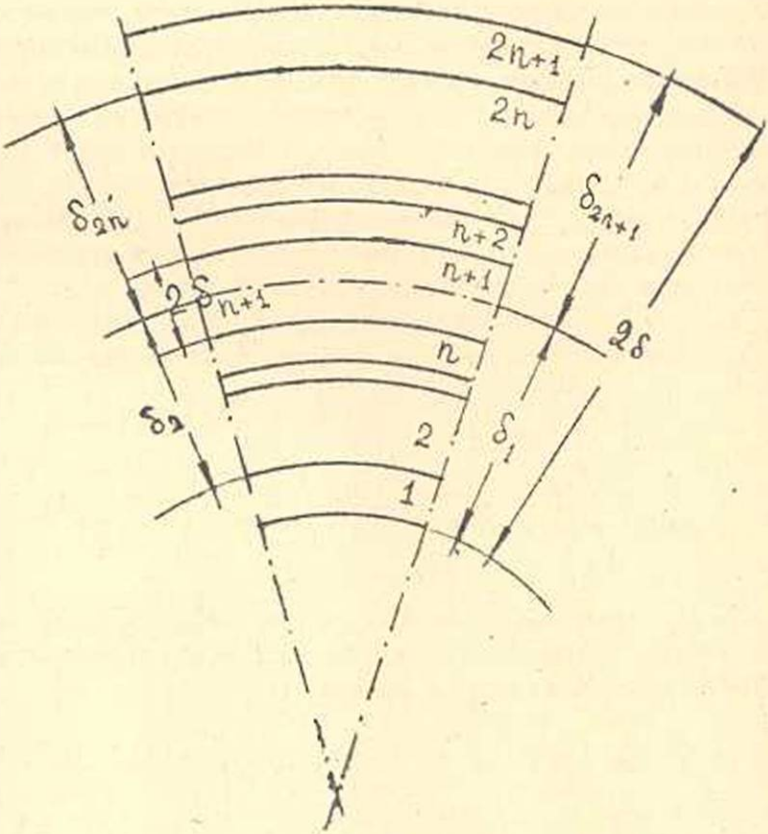
дый слой является ортотропным и главные плоскости упругой симметрии всех слоев взаимно параллельны, а одна из них в каждом слое параллельна срединной поверхности [4]. Считаем, что гипотеза Кирхгоффа-Лява справедлива для всего пакета в целом; тогда для t_{ik} будем иметь [3]:

$$t_{ik} = \frac{1}{\delta}\left[B_{ik}^{n+1}\,\delta_{n+1} + \sum_{S=1}^{n} B_{ik}^{S}\left(\delta_S - \delta_{S+1}\right)\right] \qquad 1.3$$

одновременно

$$\Omega = \left(t_{11}t_{22} - t_{12}^2\right). \qquad 1.4$$

Здесь постоянные B_{ik}^m для любого слоя определяем из соотношений [4] (фиг. 1).



Фиг. 1.

$$B_{11}^m = \frac{E_\alpha^m}{\gamma^m}, \quad B_{22}^m = \frac{E_\beta^m}{\gamma^m}, \quad B_{66}^m = G_{\alpha\beta}^m, \qquad 1.5$$

$$B_{12}^m = \frac{E_\alpha^m\,\mu_{\beta\alpha}^m}{\gamma^m} = \frac{E_\beta^m\,\mu_{\alpha\beta}^m}{\gamma^m}, \quad \gamma^m = 1 - \mu_{\alpha\beta}^m\,\mu_{\beta\alpha}^m,$$

где E_α, E_β, $G_{\alpha\beta}$ — упругие постоянные, $\mu_{\alpha\beta}$, $\mu_{\beta\alpha}$ — коэфициенты Пуассона. В частном случае, если будем иметь однородную анизотропную оболочку, то:

$$t_{ik} = B_{ik}^{n+1} = B_{ik}. \qquad 1.6$$

Напряжения в каждом слое определяем посредством формул: [4,3]

$$\sigma_\alpha^m = B_{11}^m \varepsilon_1 + B_{12}^m \varepsilon_2, \quad \sigma_\beta^m = B_{12}^m \varepsilon_1 + B_{22}^m \varepsilon_2, \quad \tau_{\alpha\beta}^m = B_{66}^m \omega. \qquad 1.7$$

При выводе этих формул, ввиду безмоментности задачи, принято, что изменения кривизны весьма малы. Остальные компоненты напряжений, в силу их громоздкости, здесь не приводим [3].

2. Цилиндрические оболочки. Здесь мы изучаем цилиндрические оболочки произвольной формы, но будем изучать только такие задачи, в которых внутренние усилия известны.

За координатные линии принимаем образующие и направляющие цилиндрической оболочки; тогда: $A=B=1$, $k_1=0$, $k_2=k_2(\beta)=\frac{1}{r}$. Рассмотрим два примера [2].

1. Расчет обшивки овальной рубки, составленной из анизотропных слоев. Пусть рубка находится под действием равномерно распределенной нагрузки, нормально приложенной к поверхности обшивки. При этом:

$$X=Y=0, \quad Z=-P=\text{const}.$$

Далее примем, что опоры являются абсолютно жесткими в своих плоскостях, но не могут воспринимать усилий, действующих по направлению α (фиг. 2). Тогда: при $\alpha=0$, $\alpha=L$, $w=0$, $T_1=0$ уравнения равновесия примут вид:

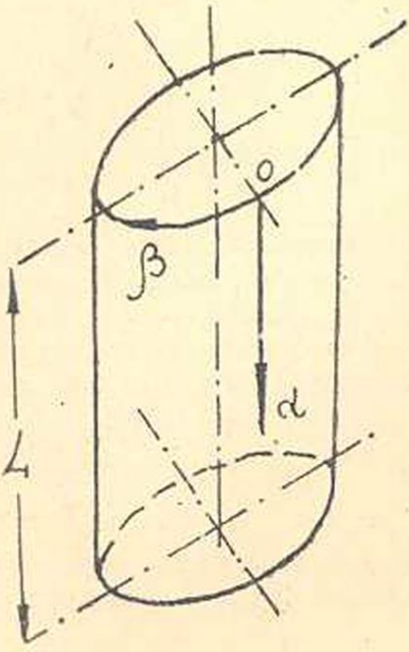
$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} = 0,$$

$$T_2 = -Pr. \qquad 2.1$$

Решением этой системы для внутренних усилий получим [2]:

$$T_1 = -P\alpha \frac{\alpha - L}{2} \frac{d^2 r}{d\beta^2}, \quad T_2 = -Pr$$

$$S = P\left(\alpha - \frac{L}{2}\right)\frac{dr}{d\beta}. \qquad 2.2$$



Фиг. 2.

Подставляя значения внутренних усилий в уравнения деформаций [1.2] и учитывая все условия данной задачи, получим:

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial \alpha}=\frac{p}{2\delta\Omega}\left[t_{12}r-t_{22}\frac{\alpha(\alpha-L)}{2}\frac{d^2r}{d\beta^2}\right],$$

$$\varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{w}{r}=\frac{p}{2\delta\Omega}\left[t_{12}\frac{\alpha(\alpha-L)}{2}\frac{d^2r}{d\beta^2}-t_{11}r\right], \qquad 2.3$$

$$\omega=\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial v}{\partial \alpha}=\frac{p}{2\delta t_{66}}\left(\alpha-\frac{L}{2}\frac{dr}{d\beta}\right)$$

Подставляя значения деформаций в формулы (1.8), получим формулы для определения напряжений в каждом слое оболочки:

$$\sigma_{\alpha}^{m}=\frac{p}{2\delta\Omega}\left[\left(B_{11}^{m}t_{12}-B_{12}^{m}t_{11}\right)r-\left(B_{11}^{m}t_{22}-B_{12}^{m}t_{12}\right)\frac{\alpha(\alpha-L)}{2}\frac{d^2r}{d\beta^2}\right],$$

$$\sigma_{\beta}^{m}=\frac{p}{2\delta\Omega}\left[\left(B_{22}^{m}t_{12}-B_{12}^{m}t_{22}\right)\frac{\alpha(\alpha-L)}{2}\frac{d^2r}{d\beta^2}-\left(B_{22}^{m}t_{11}-B_{12}^{m}t_{12}\right)r\right], \qquad 2.4$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{m}=\frac{p}{2\delta}\frac{B_{66}^{m}}{t_{66}}\left(\alpha-\frac{L}{2}\right)\frac{dr}{d\beta}.$$

Для определения перемещений необходимо совместно решать уравнения (2.3); при этом надо учитывать все контурные условия и симметричность задачи. Выполняя вышеупомянутые действия, для определения перемещений получим следующие формулы:

$$u=\frac{pr}{2\delta}\frac{t_{12}}{\Omega}\left(\alpha-\frac{L}{2}\right)-\frac{p}{12\delta}\frac{t_{22}}{\Omega}\left(\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2L+\frac{L^3}{4}\right)\frac{d^2r}{d\beta^2},$$

$$v=\frac{p}{2\delta}\left(\frac{1}{t_{66}}-\frac{t_{12}}{\Omega}\right)\frac{\alpha(\alpha-L)}{2}\frac{dr}{d\beta}+$$

$$+\frac{p}{48\delta}\frac{t_{22}}{\Omega}\alpha\left(\alpha^3-2\alpha^2L+L^3\right)\frac{d^3r}{d\beta^3}, \qquad 2.5$$

$$w=-\frac{pr}{2\delta}\left[\frac{t_{11}r}{\Omega}+\alpha(\alpha-L)\frac{d^2r}{d\beta^2}+\frac{t_{22}}{24\Omega}\alpha(\alpha^3-2\alpha^2L+L^3)\frac{d^4r}{d\beta^4}\right].$$

Для каждого частного случая, имея значение $r=r(\beta)$, легко можем определить все интересующие нас расчетные величины.

II. Цилиндрическое перекрытие. Рассмотрим цилиндрическую оболочку произвольного очертания под действием собственного веса интенсивностью q. При этом уравнения равновесия имеют вид [2]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \varphi}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_2}{\partial \beta^2}=-q.\operatorname{Sin}\varphi,$$

$$T_2=-q\,r.\cos\varphi, \qquad 2.6$$

где φ — угол между нормалью к срединной поверхности и вертикалью, r — радиус кривизны поверхности.

$$r=\frac{r_0}{(1+\gamma\operatorname{Sin}^2\varphi)^{3/2}}. \qquad 2.7$$

Угол φ связан с дугой β зависимостью $r\,d\varphi = d\beta$. При различных γ формула (2.7) может дать различные направляющие, которые будут кривыми второго порядка. Принимая, что перекрытие не имеет промежуточных опор, свободно оперта по торцам $\left(\alpha = \pm \frac{L}{2}\right)$ и симметрично относительно плоскости $\varphi = \varphi_0 = 0$, для внутренних усилий получим [2]:

$$T_2 = -q r_0 \frac{\cos\varphi}{(1+\gamma\cdot\sin^2\varphi)^{3/2}}, \quad S = \frac{2\alpha}{L} S^\circ,$$
$$T_1 = \left(1 - \frac{4\alpha^2}{L^2}\right) T_1^\circ, \tag{2.8}$$

где $S^\circ = -\frac{q4}{2}\frac{2+\gamma(2+\cos^2\varphi)}{1+\gamma\cdot\sin^2\varphi}\sin\varphi$ — значение усилия S в плоскости $\alpha = \frac{4}{2}$, $T_1^\circ = \frac{q\,4^2}{8r_0}(1+\gamma\cdot\sin^2\varphi)^{3/2}\left[1-3(1+\gamma)\frac{1-\gamma\cdot\sin^2\varphi}{(1+\gamma\cdot\sin^2\varphi)^2}\right]\cdot\cos\varphi$ — значение усилия T_1 в плоскости $\alpha=0$. Принимая $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} = 0$, получим: $B_{11}^m = E_\alpha^m$, $B_{22}^m = E_\beta^m$, $B_{66}^m = G_{\alpha\beta}^m$, $B_{12}^m = 0$.

При этом
$t_{12} = 0$, в силу чего $\Omega = t_{11}\, t_{22}$. На основании полученного для деформаций найдем:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\delta t_{11}}\left(1 - 4\frac{\alpha^2}{L^2}\right) T_1^\circ,$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w = \frac{r}{2\delta t_{22}} T_2(\varphi), \tag{2.9}$$
$$\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\delta t_{66}}\frac{2\alpha}{L} S^\circ.$$

Подставляя (2.9) в (1.8), легко можно найти формулы для определения напряжений в каждом слое:

$$\sigma_\alpha^m = B_{11}^m \frac{1}{2\delta t_{11}}\left(1 - 4\frac{\alpha^2}{L^2}\right) T_1^\circ,$$
$$\sigma_\beta^m = -B_{22}^m \frac{q r_0}{2\delta t_{22}}\frac{\cos\varphi}{(1+\gamma\cdot\sin^2\varphi)^{3/2}}, \tag{2.10}$$
$$\tau_{\alpha\beta}^m = B_{66}^m \frac{1}{2\delta t_{66}}\frac{2\alpha}{L} S^\circ.$$

Решая совместно уравнения (2.9), при этом учитывая все контурные условия, получим следующие формулы для определения перемещений:

$$U = \frac{\alpha}{2\delta t_{11}}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{\alpha^2}{L^2}\right) T_1^\circ,$$

$$v = \frac{1}{2\delta}\left(\alpha^2 - \frac{L^2}{4}\right)\left[\frac{S^\circ}{t_{66}L} + \frac{1}{3t_{11}}\left(\frac{\alpha^2}{L^2} - \frac{5}{4}\right)\frac{1}{r}\frac{dT_1^\circ}{d\varphi}\right],$$

$$w = \frac{1}{2\delta}\left\{\frac{r}{t_{22}}T_2(\varphi) - \left(\alpha^2 - \frac{L^2}{4}\right)\left[\frac{1}{t_{66}L}\frac{dS^\circ}{d\varphi} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3t_{11}}\left(\frac{\alpha^2}{L^2} - \frac{5}{4}\right)\frac{1}{r}\frac{d^2T_1^\circ}{d\varphi^2}\right]\right\}. \qquad 2.11$$

Пример расчета. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, состоящую из трех ортотропных слоев (фиг. 3). Пусть наружные слои будут вдвое тоньше, чем средний слой, а соответствующие упругие постоянные наоборот—во внешних слоях вдвое больше, чем во внутреннем. При этом, как нетрудно заметить:

$$\delta_1 = \delta_3 = \delta, \quad \delta_2 = \eta\delta, \text{ где } \eta = 0{,}5.$$

Обозначим

$$m_{ik} = \frac{B''_{ik}}{B_{ik}},$$

где B_{ik} относится к внешним слоям (1-ый и 3-й), а B''_{ik} — к внутреннему слою (2-ой). Замечая, что для трехслойной оболочки n=1, из (1.3) получим:

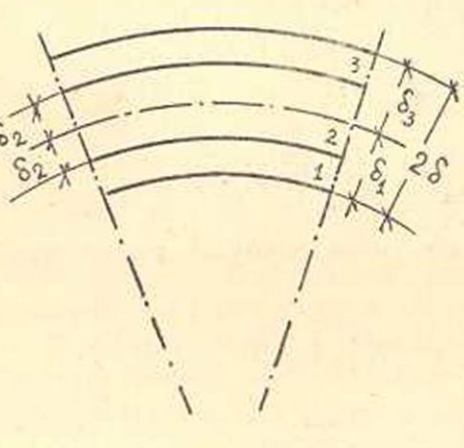
$$t_{ik} = 0{,}75\, B_{ik}.$$

Для круговой цилиндрической оболочки, принимая $\gamma=0$, получим, $r = r_0$. Тогда для внутренних усилий найдем:

$$T_1 = -\frac{qL^2}{4r_0}\left(1 - \frac{4\alpha^2}{L^2}\right)\cos\varphi,$$

$$T_2 = -qr_0\cos\varphi,$$

$$S = -2q\alpha\cdot\sin\varphi.$$



Фиг. 3.

Для напряжений получим: в крайних слоях

$$\sigma_\alpha^{|1|} = \sigma_\alpha^{|3|} = -$$

$$= -\frac{qL^2}{6r_0\delta}\left(1 - 4\frac{\alpha^2}{L^2}\right)\cos\varphi,$$

$$\sigma_\beta^{|1|} = \sigma_\beta^{|3|} = -\frac{qr_0}{1{,}5\delta}\cos\varphi, \quad \tau_{\alpha\beta}^{|1|} = \tau_{\alpha\beta}^{|3|} = -\frac{q\alpha}{0{,}75\delta}\sin\varphi,$$

в среднем слое

$$\sigma_\alpha^{|2|} = -\frac{qL^2}{12\delta r_0}\left(1 - 4\frac{\alpha^2}{L^2}\right)\cos\varphi, \quad \sigma_\beta^{|2|} = -\frac{qr_0}{3}\cos\varphi,$$

$$\tau^{(2)}_{\alpha\beta} = -\frac{q\alpha}{1{,}5\delta}\cdot \sin\varphi.$$

Перемещения определяем, пользуясь формулами (2.11). Подставляя значения внутренних усилий и учитывая условия задачи, получим:

$$u = -\frac{qL^2}{6\,r_0\delta E_\alpha}\left(1-\frac{4}{3}\frac{\alpha^2}{L^2}\right)\cos\varphi,$$

$$v = \frac{q}{1{,}5\delta}\left(\alpha^2-\frac{L^2}{4}\right)\left(\frac{L^2}{12\,r_0^2 E_\alpha}-\frac{1}{G_{\alpha\beta}}\right)\sin\varphi,$$

$$w = \frac{q}{1{,}5\delta}\left\{\frac{r_0}{E_\beta}+\left(\alpha^2-\frac{L^2}{4}\right)\left[\frac{L^2}{12\,r_0^2 E_\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{L^2}-\frac{5}{4}\right)-\frac{1}{G_{\alpha\beta}}\right]\right\}\cos\varphi.$$

3. *Весьма пологие оболочки.* В силу большой пологости оболочки коэфициенты первой квадратичной формы при диференцировании принимаем за постоянные [3], и при соответствующем подборе координат приближенно принимаем $A \approx B \approx 1$. Ограничиваясь рассмотрением случая, когда $X = У = 0$, $Z \neq 0$, для уравнений равновесия получим:

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial S}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{\partial S}{\partial\alpha}=0, \tag{3.1}$$

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 = Z.$$

Из уравнений статики, после некоторых преобразований, получим:

$$k_2\,\partial_1^2 T_1 + k_1\,\partial_2^2 T_1 = \partial_2^2 Z, \tag{3.2}$$

$$k_2\,\partial_1^2 T_2 + k_1\,\partial_2^2 T_2 = \partial_1^2 Z, \tag{3.3}$$

$$k_2\,\partial_1^2 S + k_1\,\partial_2^2 S = -\,\partial_1\partial_2 Z, \tag{3.4}$$

где

$$\partial_1^i=\frac{\partial^i}{\partial\alpha^i},\quad \partial_2^k=\frac{\partial^k}{\partial\beta^k},\quad \partial_1^i\,\partial_2^k=\frac{\partial^{i+k}}{\partial\alpha^i\,\partial\beta^k}.$$

Из основных уравнений деформации (1.2), учитывая наши предпосылки и произведя некоторые преобразования, получим:

$$k_2\,\partial_1^2 u + k_1\,\partial_2^2 u = \frac{1}{2\delta}\left\{\frac{k_1}{t_{66}}\,\partial_2 S+\frac{1}{\Omega}\left[(k_2\,t_{22}+k_1\,t_{12})\,\partial_1 T_1 - (k_1\,t_{11}+k_2\,t_{12})\,\partial_1 T_2\right]\right\}, \tag{3.5}$$

$$k_2\,\partial_1^2 v + k_1\,\partial_2^2 v = \frac{1}{2\delta}\left\{\frac{k_2}{t_{66}}\,\partial_1 S+\frac{1}{\Omega}\left[(k_1\,t_{11}+k_2\,t_{12})\,\partial_2 T_2 - (k_2\,t_{22}+k_1\,t_{12})\,\partial_2 T_1\right]\right\}, \tag{3.6}$$

$$k_2\,\partial_1^2 w + k_1\,\partial_2^2 w = -\frac{1}{2\delta}\left\{\frac{1}{t_{66}}\,\partial_1\partial_2 S + \right.$$

$$+\frac{1}{\Omega}\left[\left(t_{11}\partial_1^4-t_{12}\partial_2^4\right)T_2+\left(t_{22}\partial_1^4-t_{12}\partial_2^4\right)T_1\right]\Bigg\}. \qquad 3.7$$

Как нетрудно заметить, уравнения (3.2)...(3.7) отличаются друг от друга только неоднородными частями.

Таким образом задача расчета достаточно пологой оболочки сводится к решению одного однородного уравнения

$$\left(k_2\partial_1^4+k_1\partial_2^4\right)\varphi=0$$

и к нахождению соответствующих частных решений. Однако этот путь решения задачи не единственный и для решения задачи нет необходимости искать частные решения всех уравнений (3.2)...(3.7), хотя последнее больших затруднений не вызывает.

4. Рассмотрим один частный случай. Пусть требуется рассчитать достаточно пологую анизотропную оболочку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой $Z=P=\text{const.}$ и перекрывающую прямоугольный план. Пусть по торцам оболочка свободно оперта; тогда

$$\text{при } \alpha=0,\ \alpha=a,\ T_1=0.$$

При этих контурных условиях решение уравнения (3.2) ищем в форме:

$$T_1=\sum_m T_{1m}(\beta)\sin\lambda_m\alpha, \qquad 4.1$$

где
$$\lambda_m=\frac{m\pi}{a}.$$

Как нетрудно заметить T_1 удовлетворяет условиям на торцах $\alpha=0$, $\alpha=a$. Подставляя значение T_1 из (4.1) и нагрузку в уравнение (3.2), получим:

$$\frac{d^2T_{1m}}{d\beta^2}-P_m^2T_{1m}=0, \qquad 4.2$$

где
$$P_m=\frac{k_2}{k_1}\lambda_m^2.$$

Решая диференциальное уравнение (4.2), учитывая при этом симметричность задачи относительно плоскости $\beta=0$, получим:

$$T_{1m}=A_m\,\mathrm{ch}\,P_m\beta, \qquad 4.3$$

где A_m — постоянное интегрирования.

Подставляя (4.3) в (4.1), для T_1 получим:

$$T_1=\sum_m A_m\,\mathrm{ch}\,P_m\beta\sin\lambda_m\alpha \qquad 4.4$$

Подставляя значение T_1 из (4.4) в третье уравнение равновесия, найдем:

$$T_2=\frac{P}{k_2}-\frac{k_1}{k_2}\sum_m A_m\,\mathrm{ch}\,P_m\beta\sin\lambda_m\alpha. \qquad 4.5$$

Подставляя значения T_1 и T_2 из (4.4) и (4.5) соответственно в первое и второе уравнения равновесия и произведя интегрирование, получим:

$$S = -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sum_m A_m \, \mathrm{Sh}\, P_m \beta \cos \lambda_m \alpha + f_1(\alpha),$$

$$S = -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sum_m A_m \, \mathrm{Sh}\, P_m \beta \cos \lambda_m \alpha + f_2(\beta).$$

Сравнивая эти значения S, приходим к заключению, что $f_1(\alpha)$ и $f_2(\beta)$ должны быть равны, т. е. должны представлять постоянную величину. Но в силу того, что задача относительно $\beta = 0$ симметрична, S должно быть нечетной функцией β; поэтому эта постоянная должна быть равна нулю. Тогда:

$$S = -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sum_m A_m \, \mathrm{Sh}\, P_m \beta \cos \lambda_m \alpha. \qquad 4.6$$

Постоянные A_m определяем из уравнения (4.5). Учитывая, что при

$$\beta = \frac{b}{2}, \quad T_2 = 0, \text{ получим:}$$

$$A_m = \frac{4P}{k_1 \pi m \, \mathrm{ch}\, P_m \frac{b}{2}}. \qquad 4.7$$

Подставляя значение A_m в (4.4), (4.5) и (4.6), получим:

$$T_1 = \frac{4P}{k_1 \pi} \sum_m \frac{\mathrm{ch}\, P_m \beta}{m \, \mathrm{ch}\, P_m \frac{b}{2}} \sin \lambda_m \alpha, \qquad 4.8$$

$$T_2 = \frac{P}{k_2} \left(1 - \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{\mathrm{ch}\, P_m \beta}{m \, \mathrm{ch}\, P_m \frac{b}{2}} \sin \lambda_m \alpha \right), \qquad 4.9$$

$$S = -\frac{4p}{k_1 \pi} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sum_m \frac{\mathrm{Sh}\, P_m \beta}{m \, \mathrm{ch}\, P_m \frac{b}{2}} \cos \lambda_m \alpha. \qquad 4.10$$

Переходим к определению перемещений. Подставляя значения T_1, T_2 и S из (4.8), (4.9) и (4.10) в (3.5), а так же представляя решение полученного уравнения в форме:

$$u = \sum_m U_m(\rho) \cos \lambda_m \alpha, \qquad 4.11$$

после некоторых преобразований получим:

$$\frac{d^2 U_m}{d\beta^2} - P_m^2 \, U_m = B_{um} \, \mathrm{ch}\, P_m \beta, \qquad 4.12$$

где

$$B_{um} = -\frac{4P\lambda_m}{2\delta k_1 \pi m \operatorname{ch} P_m \frac{b}{2}} \left[\frac{1}{t_{66}} - \frac{1}{k_1 \Omega}(k_2 t_{22} + k_1 t_{12}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k_2 \Omega}(k_1 t_{11} + k_2 t_{12}) \right].$$

В уравнении (4.12) правая часть является решением однородного уравнения; тогда частное решение неоднородного уравнения будет:

$$\tilde{U}_m \frac{B_{um}}{2P_m} \beta \,.\, \operatorname{Sh} P_m \beta. \qquad 4.13$$

Полное решение будет:

$$u = \sum_m \left(\bar{A}_m \operatorname{ch} P_m \beta + \bar{B}_m \operatorname{Sh} P_m \beta + \frac{B_{um}}{2P_m} \beta \,.\, \operatorname{Sh} P_m \beta \right) \cos \lambda_m \alpha. \qquad 4.14$$

Постоянные интегрирования определяем из условий:

$$\text{при } \beta = \frac{b}{2} \text{ или } \beta = -\frac{b}{2} \quad u = 0.$$

Выполняя эти условия, найдем:

$$\bar{B}_m = 0, \quad \bar{A}_m = -\frac{B_{um}}{4P_m} b \frac{\operatorname{Sh} P_m \frac{b}{2}}{\operatorname{ch} P_m \frac{b}{2}}. \qquad 4.15$$

Подставляя значения $\bar{A}_m$ и $\bar{B}_m$ из (4.15) в (4.14), получим:

$$u = -\frac{PD}{\delta k_1 \pi} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sum_m \frac{1}{m \operatorname{ch} P_m \frac{b}{2}} \cdot$$

$$\left(\beta \operatorname{Sh} P_m \beta - \frac{b}{2} \frac{\operatorname{Sh} P_m \frac{b}{2}}{\operatorname{ch} P_m \frac{b}{2}} \operatorname{ch} P_m \beta \right) \cos \lambda_m \alpha, \qquad 4.16$$

где

$$D = \left[\frac{1}{t_{66}} - \frac{1}{k_1 \Omega}(k_2 t_{22} + k_1 t_{12}) - \frac{1}{k_2 \Omega}(k_1 t_{11} + k_2 t_{12}) \right]. \qquad 4.17$$

Подставляя значение u из (4.16) в (1.2) и произведя интегрирование, при этом учитывая, что при $\alpha = 0$, $\alpha = a$, $v = 0$, получим:

$$v = \frac{P}{\delta k_1 \pi} \sum_m \frac{1}{m P_m \operatorname{ch} P_m \frac{b}{2}} \left\{ \left[\left(1 - \frac{b}{2} P_m \frac{\operatorname{Sh} P_m \frac{b}{2}}{\operatorname{ch} P_m \frac{b}{2}} \right) D - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2}{t_{66}} \right] \operatorname{Sh} P_m \beta + D P_m \beta \operatorname{ch} P_m \beta \right\} \cdot \operatorname{Sin} \lambda_m \alpha. \qquad 4.18$$

Подставляя значение v из (4.18) во второе уравнение (1.2), получим:

$$w = \frac{1}{2\,k_2\,\delta\,\Omega}\left(t_{11}\,T_2 - t_{12}\,T_1\right) -$$

$$-\frac{P}{\delta\,k_1\,k_2\,\pi}\sum_m \frac{1}{m P_m\,\mathrm{ch}\,P_m \frac{b}{2}}\left\{\left[\left(2 - \frac{b}{2}P_m\,\frac{\mathrm{Sh}P_m \frac{b}{2}}{\mathrm{ch}P_m \frac{b}{2}}\right) D -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{2}{t_{66}}\right]\mathrm{ch}\,P_m\beta + D\,P_m\beta\cdot\mathrm{Sh}\,P_m\beta\right\}\sin\lambda_m\alpha. \qquad 4.19$$

Все полученные расчетные формулы можно было получить непосредственно из диференциальных уравнений (3.2) . . . (3.7).

Институт строительных Материалов
и Сооружений
Академии Наук Армянской ССР.

Поступило 15. VII. 1948.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ляв*—Математическая теория упругости. 1935. Москва.
2. *В. В. Новожилов*—Теория тонких оболочек. 1947. Ленинград.
3. *С. А. Амбарцумян*—Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. ДАН АН Арм. ССР, т. VIII, № 5. 1948.
4. *С. Г. Лехницкий*—Анизотропные пластинки. 1947. Москва.

Ս. Ա. Համբարձումյան

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում տրված է թաղանթների հաշվման այսպես կոչված անմոմենտ տեսության կիրառումը անիզոտրոպ շերտավոր թաղանթների տեսության մեջ։

Բերված են մի քանի կարևոր ինժեներական խնդիրների լուծումներ, որոնք առաջին երկու խնդիրներում վերջավոր են՝ (2.2), (2.4), (2.5), (2.8), (2.10), (2.11)։