ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտութ. I, № 4, 1948 Физ.-мат., естеств. и тех. науки

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

В. В. Пинаджян

Формулы для расчета центрально-сжатых стальных стержней

В совершенно прямых сжатых стержнях при центральном осевом приложении нагрузки прогибы по существу должны возникнуть только при достижении критической нагрузки. Между тем опыты ЦАГИ, Берлин-Далемской лаборатории, Роша, автора настоящей статьи и многих других исследователей показали, что при самой тщательной центрировке осевой нагрузки в прямых гибких стальных стержнях возникают существенные прогибы при достижении сжимающего осевого усилия 40—80% от критической (разрушающей) нагрузки.

Действительная работа гибких сжатых стержней протекает в условиях неизбежного эксцентриситета приложения нагрузки, неоднородности материала, наличия начальной кривизны стержня и ряда других факторов.

В связи с этими обстоятельствами действительная несущая способность гибких центрально-сжатых стержней всегда меньше критической силы, определяемой обобщенной теоретической формулой Эйлера—Энгессера.

За последние годы теория прочности и устойчивости сжатых гибких элементов металлических конструкций получила серьезное развитие в трудах советских исследователей.

Нормативные формулы для определения расчетной нагрузки центрально-сжатых стальных стержней базируются на одном из следующих методов:

1) В основу расчета принимаются эмпирические формулы, полученные в результате многочисленных испытаний до разрушения сжатых стоек.

2) В основу расчета принимается теоретическая формула Эйлера—Энгессера, в которую вносится дополнительный коэфициент запаса, изменяющийся в зависимости от гибкости сжатого стержня. Дополнительным коэфициентом запаса учитываются несовершенства реальных элементов конструкций.

3) В основу принимается формула для расчета сжато-изогнутых стержней с заданным начальным эксцентриситетом или прогибом,

учитывающим действительную работу сжатых элементов строительных конструкций.

Современными опытно-теоретическими исследованиями доказано, что последний метод построения расчетных формул для центрально-сжатых элементов строительных конструкций является наиболее правильным [1,2,3].

Критическая (разрушающая) нагрузка для центрально-сжатых прямых гибких стержней вычисляется по следующим формулам:

$$N_p = \varphi \cdot F_{бр} \cdot \sigma_т \tag{1}$$

$$N'_p = F_{нт} \cdot \sigma_т \tag{2}$$

Расчетной разрушающей нагрузкой является меньшая из величин, вычисленных по формулам (1) и (2).

Допускаемая нагрузка при коэфициенте запаса $k = \frac{\sigma_т}{[\sigma]}$ равна:

$$N = \frac{N_p}{k} = \varphi \cdot F_{бр} \cdot [\sigma]. \tag{3}$$

$$N' = \frac{N'_p}{k} = F_{нт} \cdot [\sigma]. \tag{4}$$

Таким образом, при заданных F и $[\sigma]$ задача определения допускаемой нагрузки для сжатых стержней сводится по существу к установлению величины φ—наименьшего коэфициента понижения допускаемых напряжений при продольном изгибе.

Для установления величины φ будем исходить из следующих основных предпосылок:

а) Стержень сжат внецентренно; внецентренность приложения нагрузки изменяется в зависимости от гибкости стержня; ось стержня изогнута по синусоиде.

б) До предела текучести материал стержня подчиняется закону Гука; за пределом текучести материал приобретает свойство идеальной пластичности (диаграмма Прандтля).

в) Сечения элемента при изгибе остаются плоскими (гипотеза Бернулли).

Рассмотрим стержень со свободно поворачивающимися концами, сжатый продольными силами N, приложенными по концам с одинаковым эксцентриситетом $e = \Phi(\lambda)$. Для рассматриваемого случая, в пределах закона Гука, зависимость между силами N и максимальными фибровыми сжимающими напряжениями σ может быть найдена из условия:

$$\frac{N}{F_{бр}} + \frac{Ne}{W_{бр}}\left(1 + \frac{1{,}23\alpha}{1-\alpha}\right) = \sigma, \tag{5}$$

где: $\alpha = \frac{N}{N_э}$; $N_э = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

Для дальнейших рассуждений воспользуемся понятием об идеальном профиле (рис. 1), успешно примененным А. Г. Назаровым при решении некоторых задач строительной механики [4].

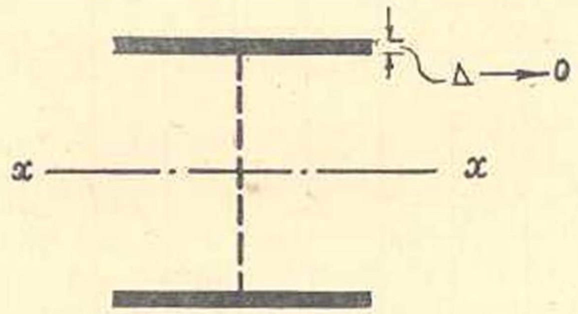

Рис. 1.

В случае, когда поперечное сечение стержня состоит из очень тонких полосок параллельных нейтральному слою („идеальный профиль"), полагая $\sigma = \sigma_т$, из условия (5) находим следующую формулу для определения критической (разрушающей) нагрузки:

$$\frac{N_р}{F_{бр}} + \frac{N_п\, e}{W_{бр}}\left(1 + \frac{1{,}23\alpha}{1-\alpha}\right) = \sigma_т \qquad (6)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{N_п}{N_э}$$

Введем следующие обозначения:

$S = \frac{W_{бр}}{F_{бр}}$ — радиус ядра сечения сжатой зоны;

$m = \frac{e}{S}$ — относительный эксцентриситет приложения продольной нагрузки;

λ — гибкость стержня;

Из уравнения (6) находим величину коэфициента:

$$\varphi = \frac{(m+n+1) - \sqrt{(m+n+1)^2 - 4n(1+0{,}23m)}}{2n(1+0{,}23m)} \qquad (7)$$

$$\text{где: } n = \frac{\sigma_т \lambda^2}{\pi^2 \cdot E} \qquad (8)$$

Нами, на основании опытных исследований [1,7], предлагается следующая формула для начального относительного эксцентриситета при продольном изгибе центрально сжатых стальных стержней:

$$m = \frac{e}{S} = \left[0{,}275 - 0{,}075\left(\frac{\lambda}{100}\right)\right]\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \qquad (9)$$

где: e — эксцентриситет приложения осевой сжимающей силы.

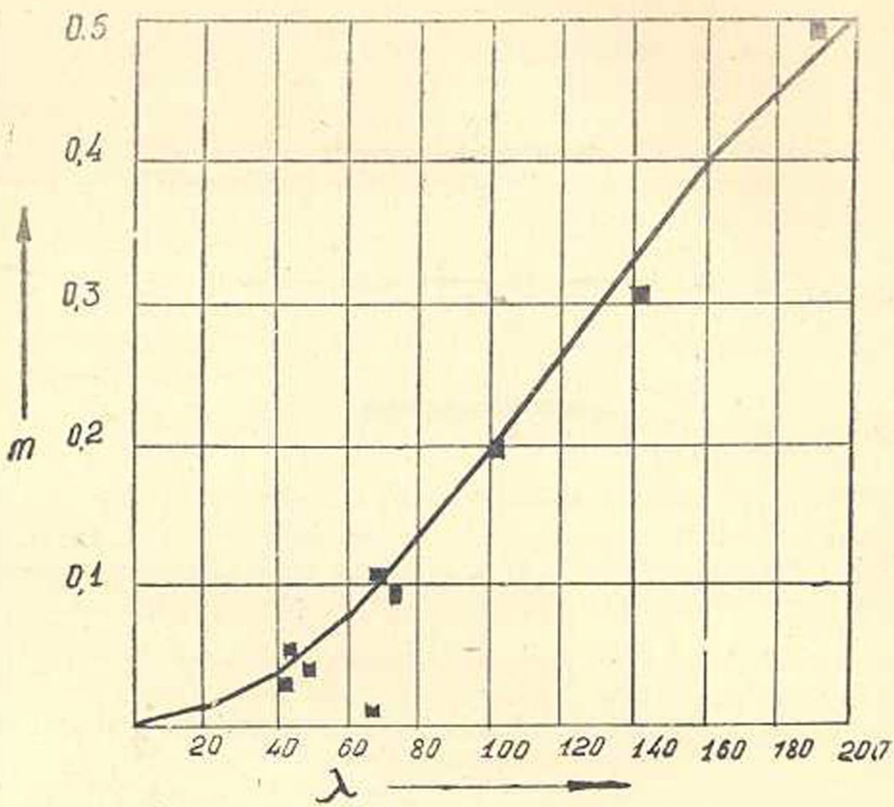

Рис. 2.

На рис. 2 показана кривая, вычисленная по формуле (9). На этом же рисунке точками показаны величины начальных относительных эксцентриситетов в зависимости об гибкости сжатого стержня, полученные Никифоровым на основании тщательных экспериментальных исследований.

Сопоставление коэфициентов φ, полученных по приближенной формуле (7) с аналогичными коэфициентами, полученными К. С. Завриевым (3) более точным путем, на базе метода „максимальных краевых напряжений" и интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки показывает, что при $m \leqslant 0{,}5$ расхождение между ними не превышает 1—2%.

Следует подчеркнуть, что формула (7), базирующаяся на методе „максимальных краевых напряжений", остается достаточно строгой для „идеального профиля".

Для внецентренно-сжатых стержней реальных профилей коэфициенты φ должны быть установлены с учетом пластических деформаций. Попытка определения коэфициентов φ для реальных профилей с учетом пластических деформаций была предпринята Хвалой [5], Ечеком [6] и рядом других исследователей.

Теоретическими исследованиями автора настоящей статьи и произведенными им испытаниями до разрушения 57 внецентренно-сжатых стальных стержней [8] было установлено следующее.

1) Способ установления величины разрушающей нагрузки сжато-изогнутых стержней по методу „максимальных краевых напряжений" является справедливым только для идеального профиля; величина разрушающей нагрузки для сжато-изогнутых стержней реальных профилей должна быть установлена с учетом пластических деформаций.

2) Величина разрушающей нагрузки для сжато-изогнутых элементов реальных профилей может быть установлена по формулам, основанным на методе „максимальных краевых напряжений" при условии подстановки в эти формулы величины $\varkappa m$ вместо m (m — относительный эксцентриситет приложения осевой нагрузки; $\varkappa$ — коэфициент, учитывающий пластические деформации).

3) Коэфициент $\varkappa$ для профилей, применяемых в стальных строительных конструкциях, в зависимости от распределения массы сечения по отношению к экваториальным осям сечения, колеблется в пределах от 0,85 до 0,45; в частности, для прокатных двутавровых профилей при изгибе элемента в плоскости стенки двутавра $\varkappa = 0{,}85$; для крестового сечения $\varkappa = 0{,}45$.

В подавляющем большинстве случаев в сжато-изогнутых элементах современных строительных стальных конструкций, с целью уменьшения веса и увеличения жесткости их, применяют профили, для которых коэфициент $\varkappa = 0{,}75-0{,}85$.

Подсчеты показывают, что при $\lambda > 40$, $m \leqslant 0{,}5$ и $\varkappa = 0{,}75-0{,}85$ величины φ, вычисленные по формулам, основанным на методе „максимальных краевых напряжений", в частности по приближенной формуле (7), совершенно незначительно отличаются от аналогичных величин, вычисленных по методу Хвалла и Ечек. При этом, по формулам, основанным на методе „максимальных краевых напряжений", получаются заниженные величины φ.

На основании изложенных соображений, учитывая, что при $\lambda \leqslant 200$ по формуле (9) $m < 0{,}5$, в запас прочности можно влияние формы сечения на величину φ не учитывать, т. е. принять $\varkappa = 1$ и расчет производить по формуле (7). В случае, когда m определяется выражением (9), величиной $0{,}23\ m$, входящей в формулу (7), можно также пренебречь. В этом случае:

$$\varphi = \frac{(m + n + 1) - \sqrt{(m + n + 1)^2 - 4n}}{2n} \tag{10}$$

Подсчеты показывают, что максимальное расхождение между величинами φ, вычисленными по формулам (7) и (10), не превышает 4%.

Перепишем формулу (10) в следующем виде:

$$\varphi = \frac{(m + n + 1) - \sqrt{1 + [2m + (m + n)^2 - 2n]}}{2n} \tag{10a}$$

В формуле (10а) выражение под радикалом, заключенное в квадратные скобки, при $\lambda \leqslant 110$ и m, определяемом по формуле (9), меньше 0,5.

Разлагая радикал в формуле (10а) в биноминальный ряд и подставляя два первых члена этого ряда в формулу, получим:

$$\varphi = 1 - \frac{(m+n)^2}{4n} \tag{11}$$

Подставляя в формулу (11) значения m и n из (8) и (9) и принимая в формуле (8) E = 2100000 *кг/см²* и $\sigma_т$ = 2400 *кг/см²*, получим:

$$\varphi = 1 - \frac{\left(1{,}435 - 0{,}075\frac{\lambda}{100}\right)^2}{4{,}64} \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \tag{12}$$

В формуле (12) множитель, стоящий перед $\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2$, при изменении λ в пределах от 0 до 110, колеблется в пределах от 0,44 до 0,40.

На основании изложенного нами предлагается следующая расчетная формула для вычисления коэфициента φ при продольном изгибе центрально-сжатых элементов из обычной строительной стали при $\lambda \leqslant 110$:

$$\boxed{\varphi = 1 - 0{,}4\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2} \tag{I}$$

Для нахождения расчетной формулы φ при значениях $\lambda > 110$ перепишем формулу (10) в следующем виде.

$$\varphi = \frac{m+1}{2n} + C, \tag{10б}$$

$$\text{где } C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\sqrt{(m+n+1)^2 - 4n} \tag{13}$$

Формула (13) при значениях m и n, заданных уравнением (8) и (9), на участке от $\lambda = 100$ до $\lambda = 200$, выражает кривую очень малой кривизны. С достаточной точностью на этом участке кривую можно заменить хордой:

$$C = 0{,}142 - 0{,}56\left(\frac{\lambda}{1000}\right) \tag{14}$$

Подставляя в формулу (10б) значения m, n, и C из (8), (9) и (14), находим следующую расчетную формулу для φ при продольном изгибе центрально-сжатых элементов из обычной строительной стали для случая, когда $\lambda > 110$:

$$\boxed{\varphi = 0{,}25 + \frac{4300}{\lambda^2} - 0{,}8\left(\frac{\lambda}{1000}\right)} \tag{II}$$

В таблице 1 коэфициенты φ, вычисленные по исходной формуле (7), сопоставлены с аналогичными величинами по формулам (10),

(I) и (II). Анализ табличных данных (см. табл. 1 и 2) позволяет констатировать, что расхождение между исходной формулой (7) и предлагаемыми расчетными формулами (I) и (II), невелико.

Таблица 1

Гибкость λ	Коэфициенты φ				Расхождение в %% между (3) и (I), (II)
	По формуле (7)	По формуле (10)	По формуле (I)	По формуле (II)	
20	0,99	0,99	0,98	—	1,01
40	0,95	0,97	0,94	—	1,05
60	0,89	0,89	0,86	—	3,4
80	0,77	0,80	0,74	—	3,9
100	0,62	0,60	0,6	0,6	3,2
120	0,47	0,45	—	0,45	4,3
140	0,37	0,36	—	0,36	2,7
160	0,29	0,28	—	0,29	0
180	0,24	0,23	—	0,24	0
200	0,196	0,189		0,197	0,5

Сопоставление величин φ, вычисленных по расчетным формулам (I) и (II) и аналогичным величинам ГОСТ 960—46, приводится в таблице 2.

Таблица 2

Гибкость λ	Коэфициенты φ			Расхождение в %%	
	По формуле (I)	По формуле (II)	ГОСТ 960—46	Между (I) и ГОСТ 960—46	Между (II) и ГОСТ 960—46
0	1,00	—	1,00	0	—
10	0,99	—	0,99	0	—
20	0,98	—	0,96	−2,1	—
30	0,96	—	0,94	−2,1	—
40	0,94	—	0,92	−2,2	—
50	0,90	—	0,89	−1,1	—
60	0,86	—	0,86	0	—
70	0,80	—	0,81	+1,2	—
80	0,74	—	0,75	+1,3	—
90	0,68	—	0,69	+1,5	—
100	0,60	0,60	0,60	0	0
110	0,52	0,52	0,52	0	0
120	—	0,45	0,45	—	0
130	—	0,40	0,40	—	0
140	—	0,36	0,36	—	0
150	—	0,32	0,32	—	0
160	—	0,29	0,29	—	0
170	—	0,26	0,29	—	0
180	—	0,24	0,26	—	0
190	—	0,22	0,23	—	−4,3
200	—	0,197	0,21	—	−4,7
			0,190		−3,7

Анализ данных таблицы 2 показывает, что расхождение между коэфициентами φ для строительной стали, приведенными в ГОСТ 960—46 и по предлагаемым нами расчетным формулам (I) и (II) при $\lambda < 170$ не превышает 2,2%.

Насколько нам известно, коэфициенты φ ГОСТ 960—46 получены на основании теории Хвалла [5] и опытно-теоретических исследований, произведенных С. Н. Никифоровым [7]. В основу этих исследований была положена действительная индикаторная диаграмма строительной стали, полученная в результате массового испытания стержней.

Коэфициенты φ Хвалла были получены на основании безупречных и, вместе с тем, кропотливых и трудоемких расчетных построений, связанных с исследовательными попытками при определении „кривых внутреннего сопротивления" графо-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений и т. д. Удовлетворительное совпадение результатов наших расчетных построений с данными ГОСТ 960—46 и теорий Хвалла позволяет сделать следующие выводы.

1. Коэфициенты φ понижения допускаемых напряжений при продольном изгибе центрально-сжатых стальных элементов в таблице 9 ГОСТ 860—46 следует признать теоретически обоснованными.

2. При составлении Общесоюзного „Урочного Положения" по строительству взамен таблиц φ (или наряду с таблицами) могут быть с успехом использованы предлагаемые нами расчетные формулы (I) и (II) для определения коэфициентов φ понижения допускаемых напряжений центрально-сжатых стальных элементов. При этом надо учесть, что эти формулы могут быть распространены на все строительные стали, предел текучести которых не превышает 2400 *кг/см²*.

3. На основании формул (8), (9) и (10) по предлагаемому нами методу, без особых затруднений, могут быть составлены простые расчетные формулы коэфициента φ центрально-сжатых элементов любой марки стали с хорошо развитой площадкой текучести.

* * *

В действующих Т. У. и Н. имеются существенные противоречия по определению величины поперечной силы для центрально-сжатых составных стержней при продольном изгибе.

Следуя методу К. С. Завриева [3], попытаемся составить обоснованную расчетную формулу поперечной силы.

Критическое состояние сжатого элемента при продольном изгибе определяется из условия:

$$\frac{N_p}{F_{бр}} + \frac{N_p \cdot y_0}{W_{бр}} = \sigma_т \qquad (a)$$

При введенных выше обозначениях, из условия (а) находим следующее выражение для стрелы прогиба при критическом состоянии сжатого элемента:

$$y_0 = \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot S \tag{в}$$

Исходя из предположения, что ось стержня изогнута по синусоиде, получим следующее значение критической поперечной силы:

$$Q_p = N_p \cdot \max\left(\frac{dy}{dx}\right) = N_p \cdot y_0 \cdot \frac{\pi}{l} \tag{c}$$

Подставляя значение y_0 из (в) в (c) и принимая во внимание что $\lambda = \frac{l}{r}$, получим:

$$Q_p = \frac{\pi . S}{\lambda r} \cdot \left(\frac{1}{\varphi} - 1\right) \cdot N_p \tag{d}$$

Допускаемая поперечная сила:

$$Q = \frac{Q_p}{k} = \frac{\pi . S}{\lambda \cdot r}\left(\frac{1}{\varphi} - 1\right) \cdot N_{доп} \tag{e}$$

Принимая во внимание выражение (3), получим:

$$Q = \frac{\pi\, S . [\sigma]}{\lambda r}(1-\varphi) . F_{бр} \tag{15}$$

Для основных типов сечений металлоконструкций можно принять $\frac{S}{r} = 0{,}85$.

Подставляя в формулу (15) значения коэфициента φ из (I) и (II) и принимая $[\sigma] = 1400$ *кг/см²*, и $\frac{S}{r} = 0{,}85$, находим:

при гибкости элемента $\lambda \leqslant 110$:

$$\boxed{Q = 0{,}15\lambda . F_{бр}} \tag{III}$$

при гибкости элемента $\lambda > 110$:

$$Q = \left[3 + \frac{2800}{\lambda} - \left(\frac{252}{\lambda}\right)^3\right] F_{бр} \tag{16}$$

Исследование выражения (16) показывает, что при изменении λ в пределах от 110 до 200 Q колеблется в пределах от 15 $F_{бр}$ до 17,2 $F_{бр}$. Поэтому при $\lambda > 110$ можем принять:

$$\boxed{Q = 17\, F_{бр}} \tag{IV}$$

Институт Строительных Материалов
и Сооружений
Академии Наук Армянской ССР.

Поступило 28 VIII 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.*—Устойчивость упругих систем. Москва—Ленинград, 1946.
2. *Стрелецкий Н. С.*—Курс металлических конструкций, ч. 1, Москва, 1940.
3. *Завриев К. С.*—Расчетные формулы прочности в особых случаях. Москва, 1935.
4. *Назаров А. Г.*—О применении понятия „идеального профиля" к анализу несущей способности статически неопределимых систем. Сб. тр. АН СССР. Москва, 1937.
5. *Chwalla E.*—Die Theorie des aussermittig gedrückten Stabes aus Baustahl. Stahlbau, H. 21—23, 1934.
6. *Jezek K.*—Die Festigkeit von Drückstäben aus Stahl. Wien, 1937.
7. *Никифоров С. Н.*—Устойчивость сжатых стержней сварных ферм. Москва—Ленинград, 1938.
8. *Пинаджян В. В.*—К вопросу о несущей способности сжато-изогнутых стержней. Проект и стандарт, № 1, 1938. Экспериментальное исследование устойчивости внецентренно-сжатых стальных стержней. Строительная промышленность, № 11, 1938;

   Сб. тр. по строительной механике под ред. *К. С. Завриева*, Москва, 1940.
   ДАН Армянской ССР, VIII, № 1, 11, 1948.

Վ. Վ. Փինաջյան

ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ՝ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ-ՍԵՂՄՎԱԾ ՊՈՂՊԱՏՅԱ ՁՈՂԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հենվելով ժամանակակից տեսական և փորձնական հետազոտությունների վրա, հեղինակն առաջարկում է բանաձևեր, որոնց միջոցով կարելի է հաշվել ընդերկայնական ծռման ժամանակ թույլատրելի լարումների իջեցման φ գործակիցը։

Բերված բանաձևերն օգտագործելի են սովորական շինարարական պողպատից ($\sigma_T = 2400$ կգ/սմ²) *պատրաստված, ընդերկայնական ծռման աշխատող ձողերի համար։*

Հեղինակի առաջարկած մեթոդը հնարավորություն է տալիս առանց դժվարության կազմելու հաշվային բանաձևերը՝ այլ մարկաների պողպատներից պատրաստված ձողերի համար, որոնց նյութերն ունեն զգալի զարգացած հոսունության հարթակ։