

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. Г. Назаров

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в контурных производных

Излагаемый ниже путь решения не представляет принципиальный интерес, но все же имеет известные удобства, в особенности при наличии импульсивных членов, входящих в качестве неоднородной части уравнения. Последнее часто имеет место при решении технических задач.

Пусть дано

$$a_0^{(n)} y^{(n)} + a_1^{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}^{(1)} y' + a_n^{(0)} y = f(x) \quad \dots (1)$$

при начальных условиях:

$$x = x_0; y = y_0, y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \dots (2)$$

т. е. требуется решить задачу Коши. Полагаем, что $f(x)$ содержит в себе скачки и имеет своими несобственными значениями импульсивные функции. Выразим (1) в контурных производных [1]. Отсечем ненужную нам часть функции $y(x)$, расположенную влево от точки $x = x_0$ с помощью разрывного множителя $\Gamma(x - x_0)$, и соответственно для $f(x)$ введем $\Gamma(x - x_0) f(x)$.

Подставляя контурные производные y в (1), найдем, что равенство нарушится. Для восстановления этого равенства к правой части уравнения должны быть приписаны соответствующие члены. В результате окончательно получим:

$$\begin{aligned} & a_0^{(n)} [y] + a_1^{(n-1)} [y] + \dots + a_{n-1}^{(1)} [y]' + a_n^{(0)} y = a_0 y_0 \Gamma^{(n)}(x - x_0) + \\ & + (a_0 y_0' + a_1 y_0) \Gamma^{(n-1)}(x - x_0) + (a_0 y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0) \Gamma^{(n-2)}(x - x_0) + \dots \\ & + (a_0 y_0^{(n-1)} + a_1 y_0^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y_0) \Gamma^{(1)}(x - x_0) + \Gamma(x - x_0) f(x) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

При $x < x_0$, (3) тождественно равно нулю, при $x > x_0$ оно переходит в (1). Уравнение (3) заменяет собой уравнение (1) и принадлежащие ему начальные условия (2).

Рассматривая уравнение (3), выраженное в контурных производных, мы убеждаемся, что начальные условия (2), умноженные на импульсивные функции, входят в правую часть (3) на равных началах с $f(x)$. Нетрудно убедиться, что к такому же виду приводится дифференциальное уравнение при пользовании операционным исчислением. Если $f(x) \equiv 0$ и все начальные условия нулевые, то мы получаем решение $y \equiv 0$, поскольку при $x < x_0$, $y = 0$. Таким образом, однородное дифференциальное уравнение в контурных производных практически не существует. Однородное дифференциальное уравнение в обычном смысле, преобразованное в дифференциальное уравнение в контурных производных, приводит опять-таки к неоднородному дифференциальному уравнению (3), где $f(x) \equiv 0$. Свободный член в этом случае содержит лишь систему импульсивных функций.

Докажем теперь следующее предложение:

Дифференциальное уравнение (3) может быть решено при любых начальных условиях (2) и для любого свободного члена $f(x)$, если удастся найти решение для следующего дифференциального уравнения:

$$a_0 [K(x)]^{(n)} + a_1 [K(x)]^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} [K(x)]' + a_n K(x) = \Gamma(x) \dots (4)$$

Для сокращения здесь вместо $\Gamma(x) K(x)$ пишем $K(x)$.

Уравнение это получается из (3) при $f(x) \equiv 0$,

$$y_0 = y_0' = \dots = y_0^{(n-2)} = 0 \text{ и при } y_0^{(n-1)} = \frac{1}{a_0} \dots (5)$$

Заметим, что при замене $\Gamma(x)$ через $\Gamma(x-\xi)$ мы получим решение $K(x-\xi)$. Докажем, что общее решение для (3) может быть выражено через $K(x-\xi)$. Пользуясь линейностью (3), мы можем находить частные решения для каждого свободного члена, входящего в его правую часть, и затем полученные решения сложить. Найдем частное решение, соответствующее $f(x)$, т. е. в предположении равенства нулю всех начальных условий. Разобьем $f(x)$ на элементарные импульсивные функции первого порядка:

$$\lim_{x_0} \sum_{x_0}^x \Gamma(x-\xi_i) f(\xi_i) \Delta \xi_i.$$

Каждой элементарной импульсивной функции

$$\Gamma(x-\xi_i) f(\xi_i) \Delta \xi_i$$

удовлетворяет решение

$$K(x-\xi_i) f(\xi_i) \Delta \xi_i.$$

Следовательно, решение для $f(x)$:

$$U_0(x; x_0) = \lim_{\Delta \xi_i \rightarrow 0} \sum_{\xi_i=0}^x K(x-\xi_i) f(\xi_i) \Delta \xi_i = \int_{x_0}^x K(x-\xi) f(\xi) d\xi. \quad \dots (6)$$

Чтобы найти полное решение для (3), достаточно вместо $f(x)$ подставлять импульсивные функции различных порядков. Частное решение, отвечающее $\Gamma^{(1)}(x-x_0)$, определится из (6) следующим образом:

$$U_1(x; x_0) = \int_{x_0=0}^x K(x-\xi) \Gamma^{(1)}(\xi-x_0) d\xi = K(x-x_0). \quad \dots (7)$$

Нижний предел интеграла помечен через $x_0=0$ в знак того, что точка особенности x_0 должна быть включена в пределы интеграла. Результат (7) очевиден. Он непосредственно вытекает из (4) при замене $\Gamma^{(1)}(x)$ через $\Gamma^{(1)}(x-x_0)$. Найдем теперь решение, отвечающее импульсивной функции $\Gamma^{(k)}(x-x_0)$:

$$U_k(x; x_0) = \int_{x_0=0}^x K(x-\xi) \Gamma^{(k)}(\xi-x_0) d\xi = (-1)^{k-1} \left[\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} K(x-\xi_0) \right]_{\xi=x_0}$$

или, имея в виду, что

$$(-1)^{k-1} \left[\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} K(x-\xi) \right]_{\xi=x_0} = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} K(x-x_0),$$

окончательно найдем:

$$U_k(x; x_0) = K^{(k-1)}(x-x_0). \quad \dots (8)$$

Общее решение для (3) запишется теперь в виде:

$$\begin{aligned} y = & a_0 y_0 u_n(x; x_0) + (a_0 y'_0 + a_1 y_0) u_{n-1}(x; x_0) \\ & + (a_0 y''_0 + a_1 y'_0 + a_2 y_0) u_{n-2}(x; x_0) \dots \\ & + (a_0 y_0^{(n-1)} + a_1 y_0^{(n-2)} \dots + a_{n-1} y_0) u_1(x; x_0) + u_0(x; x_0) \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Сопоставляя (9) и (3), приходим к следующему правилу: чтобы найти решение дифференциального уравнения (3), достаточно его выражение по левую сторону знака равенства приравнять искомому y , а в выражении по правую сторону знака равенства заменить $\Gamma^{(k)}$ через u_k , в частности $\Gamma(x-x_0)f(x)$ через u_0 , определяемые формулами (6), (7) и (8).

Следует помнить, что при $x < x_0$, $u_k(x - x_0) = 0$.

Если $i(x)$ содержит импульсивные функции с точками особенности в x_i , то в $u_0(x)$ будут в свою очередь входить члены типа (8) с заменой x_0 на x_i , причем при $x < x_i$, $u_k(x - x_i) = 0$.

Итак, если известно частное решение уравнения (4) для $k(x - \xi)$, то общее решение найдется согласно (6), (7), (8) и (9). $K(x - \xi)$ является здесь ничем иным, как функцией влияния Грина, решающей в данном случае задачу (1,2). Практическое удобство такого приема решения заключается в том, что для данного, часто применяемого дифференциального уравнения достаточно раз навсегда найти функцию влияния $K(x)$, и это позволит впоследствии находить решения для (1) при любых начальных условиях и свободных членах. Вся задача заключается теперь в отыскании решения дифференциального уравнения (4).

Удобнее всего для этого применить символический способ. Тогда (4) следует представить в виде:

$$\varphi(D)K(x) = \Gamma^{(1)}(x),$$

откуда

$$K(x) = \frac{\Gamma^{(1)}(x)}{\varphi(D)}.$$

Разложим рациональную дробь $\frac{1}{\varphi(D)}$ на простейшие

$$\frac{1}{\varphi(D)} = \sum_{s=1}^m \sum_{q=1}^{k_s} \frac{A_s^{(q)}}{(D - \alpha_s)^q},$$

где α_s — корни уравнения $\varphi(D) = 0$. Тогда

$$K(x) = \sum_{s=1}^m \sum_{q=1}^{k_s} \frac{A_s^{(q)} \Gamma^{(1)}(x)}{(D - \alpha_s)^q}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D - \alpha_s)^q} \Gamma^{(1)}(x) &= \frac{e^{\alpha_s x}}{(q-1)!} \int_0^x (x - \eta)^{q-1} e^{-\alpha_s \eta} \Gamma^{(1)}(\eta) d\eta \\ &= \frac{e^{\alpha_s x}}{(q-1)!} \int_0^x x^{q-1} \Gamma^{(1)}(\eta) d\eta = \frac{e^{\alpha_s x} x^{q-1}}{(q-1)!}, \end{aligned}$$

то получим

$$K(x) = \sum_{s=1}^m \sum_{q=1}^{k_s} A_s^{(q)} \frac{e^{\alpha_s x} x^{q-1}}{(q-1)!} \dots (10)$$

Задача решена до конца.

Пример. Колебания упругой системы с одной степенью свободы характеризуются уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = f(t).$$

Дифференциальное уравнение в контурных производных при начальных условиях $t=0$, $x=x_0$ и $\frac{dx}{dt} = v_0$ имеет вид:

$$\frac{d^2[x]}{dt^2} + k^2x = \Gamma^{(2)}(t)x_0 + \Gamma^{(1)}(t)v_0 + \Gamma(t)f(t).$$

Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2[K]}{dt^2} + k^2K = \Gamma^{(1)}(t).$$

Символический полином

$$\varphi(D) = D^2 + k^2$$

а решение для $K(t)$

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\Gamma^{(1)}(t)}{\varphi(D)} = -\frac{\Gamma^{(1)}(t)}{2ki(D+ki)} + \frac{\Gamma^{(1)}(t)}{2ki(D-ki)} = \\ &= \left(\frac{1}{2ki} e^{-ikt} + \frac{1}{2ki} e^{ikt} \right) \Gamma(t) \end{aligned}$$

или
$$K(t) = \frac{1}{k} \Gamma(t) \sin kt.$$

Решение, отвечающее свободному члену $f(t)$, равно:

$$\frac{1}{k} \int_0^t \sin k(t-\xi) f(\xi) d\xi.$$

а для $\Gamma^{(2)}(t)$

$$\frac{dK(t)}{dt} = \Gamma(t) \cos kt.$$

Окончательно имеем, опустив теперь без ущерба для дела $\Gamma(t)$:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t \sin k(t-\xi) f(\xi) d\xi.$$

Если $f(t)$ содержит в момент времени $t=t_1$ импульс $S \Gamma^{(1)}(t-t_1)$, то

соответствующий член выделится из интеграла следующим образом:

$$\frac{S}{k} \int_0^t \sin k(t-\xi) \Gamma^{(1)}(\xi-t_1) d\xi = \frac{S}{k} \sin k(t-t_1) \cdot \Gamma(t-t_1).$$

Институт Строительных Материалов
и Сооружений
Академии Наук Армянской ССР

Поступило 25 VI 1948.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Назаров—ДАН Арм. ССР, VII, № 1, 1947 и VIII, № 3, 1948.

Ա. Գ. Նազարով

ԵԶՐԱՅԻՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ, ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Վ

Ուսումնասիրված է հավասարումների լուծման մի ուղի, որը թեև սկզբնաբային հետաքրքրություն չի ներկայացնում, բայց ունի հայտնի առավելություններ, առանձնապես այն դեպքերում, երբ հավասարման անհամասեռ մասի մեջ մտնում են իմպուլսիվ ֆունկցիաներ: Վերջիններին հաճախի հանդիպում ենք տեխնիկական խնդիրներ լուծելու ժամանակ:

Մեթոդի էությունը կայանում է նրանում, որ (1) և (2) պայմանները լիովարինվում են եզրային ածանցյալներով հավասարմամբ (3) և սխեմիկ մեթոդով որոշվում է Գրինի ֆունկցիան: