ДАРБИНЯН С. С., ОГАНЕСЯН М. В.

СЕЙСМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОЙ ПОЛОСЫ С УЧЕТОМ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ

Пусть в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) задана упругая среда, состоящая из $n+1$ плоскопараллельных слоев (рис. 1).

$$H_{\nu-1} < x_3 < H_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} h_k, \qquad (1)$$

где $H_0 \equiv 0$; $h_{n+1} \to \infty$; $h_\nu > 0$, характеризуемых упругими параметрами λ_ν, μ_ν, ρ_ν.

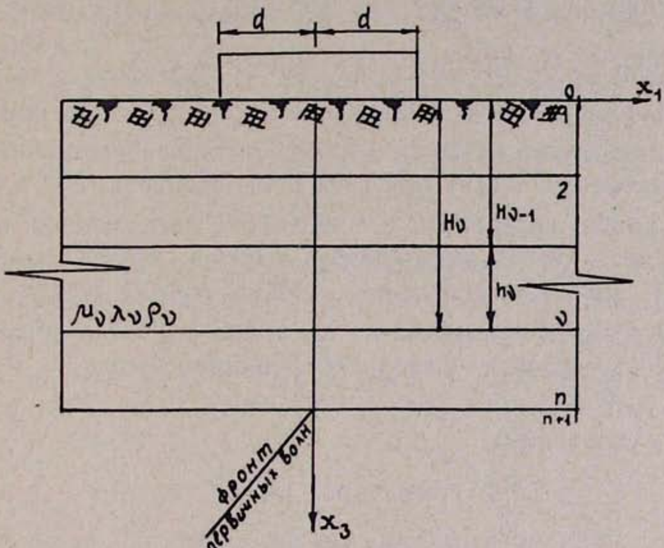

Рис. 1. Расчетная схема жесткой полосы на неоднородном основании

На поверхности $x_3=0$ лежит жесткая преграда, имеющая бесконечные размеры по направлению x_2, а по оси x_1 имеет следующие размеры $-d \leqslant x_1 \leqslant d$ и находится в условиях полного прилипания с контактной поверхностью с неоднородным многослойным основанием (1).

Принимая, что источник первичных сейсмических волн находится в среде $x_3 > H_n$, его источник расположен в точке $(0, \bar{H}_0)$.

В условиях сейсмического воздействия в среде (1), наряду с источником сейсмических волн, бесконечная полоса при взаимодействии с основанием становится новым источником волн.

Следовательно, общее волновое поле в основании (1) можно представить как сумму двух полей, первое из которых возбуждается от источника первичных сейсмических волн, излучаемых от очага землетрясения без присутствия полосы на поверхности основания (1), а источником возбуждения второго поля являются относительные перемещения полосы к основанию (1), возникающие при воздействии на него первого поля.

Принимаем следующие обозначения:

$U^{(1)}_{i\nu}$; $\sigma^{(1)}_{3i}(\nu)$—компоненты вектора общего перемещения и компоненты напряжения на площадках $x_3=\text{const}$ в ν-ом слое среды (1).

$U^{(2)}_{i\nu}$; $\sigma^{(2)}_{3i(\nu)}$—компоненты вектора перемещения и компоненты вектора напряжения на площадках $x_3=\text{const}$ в ν-ом слое среды (1), без присутствия штампа.

$U^{(3)}_{i\nu}$; $\sigma^{(3)}_{3i(\nu)}$—компоненты вектора перемещения и компоненты вектора напряжения на площадках $x_3=\text{const}$ в ν-ом слое среды (1).

$$U^{(1)}_{i\nu}(x_1, x_3, t)=U^{(2)}_{i\nu}(x_1, x_3, t)+U^{(3)}_{i\nu}(x_1, x_3, t),$$

$$\sigma^{(1)}_{3i\nu}(x_1, x_3, t)=\sigma^{(2)}_{3i\nu}(x_1, x_3, t)+\sigma^{(3)}_{3i\nu}(x_1, x_3, t). \qquad (2)$$

Поля перемещения и напряжения $U^{(2)}_{i\nu}$ и $\sigma^{(2)}_{3i\nu}$ были определены в работе [5], поэтому мы здесь их будем считать известными величинами.

Следовательно, задача сводится к определению $U^{(3)}_{i\nu}$ и $\sigma^{(3)}_{3i\nu}$, а далее из (2) можно определить и общее поле перемещения и напряжения. В плоскости $x_3=0$ компоненты вектора общего перемещения $U^{(1)}_{i(1)}(x_1, 0, t)$ характеризуются тем, что на отрезке $|x_1|\leqslant d$ они принимают постоянное значение по x_1, а при $|x_1|>d$ в общем случае являются неизвестной произвольной функцией от x_1.

При $x_3=0$ мы имеем дело с контактной задачей со смешанными граничными условиями:

$$U^{(1)}_{i(1)}=\text{const} \quad \text{при} \quad |x_1|\leqslant d \quad x_3=0$$

$$\sigma^{(1)}_{3i(1)}=0 \quad \text{при} \quad |x_1|>d \quad x_3=0. \qquad (3)$$

Задача, как мы скоро убедимся, сводится к определению контактных напряжений и перемещений:

$$\sigma^{(3)}_{3i(1)}(x_1; 0, t), \qquad U^{(3)}_{i1}(x_1, 0, t).$$

Для определения напряжений и перемещений в упругом полупространстве воспользуемся принципом суперпозиции. Эти величины определяются следующими формулами:

$$\sigma^{(3)}_{3i(\nu)}(x_1, x_3, t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}^{(3)}_{3i(\nu)}(x_1, x_3, k_4)e^{ik_4t}dk_4 \qquad (4)$$

$$U^{(3)}_{i(\nu)}(x_1, x_3, t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{U}^{(3)}_{i(\nu)}(x_1, x_3, k_4)e^{ik_4t}dk_4 \quad (i=1, 3),$$

где

$$\bar{\sigma}^{(3)}_{3i(\nu)}(x_1, x_3, k_4) = \int\limits_{-d}^{d} \bar{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(\xi_1, 0, k_4)\,\bar{\tau}_{i\nu}(x_1-\xi_1, x_3, k_4)\,d\xi_1, \tag{5}$$

$$\bar{U}^{(3)}_{i(\nu)}(x_1, x_3, k_4) = \int\limits_{-d}^{d} \bar{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(\xi_1, 0, k_4)\,\bar{U}^{*}_{i\nu}(x_1-\xi_1, x_3, k_4)\,d\xi_1. \tag{6}$$

Здесь $\tau_{i\nu}$—напряжения, вызванные в точке (x_1, x_3) упругого полупространства действием сосредоточенной гармонической силы единичной амплитуды, направленной в точке $(\xi_1, 0)$.

$$\tau_{i\nu} = \delta(x_1-\xi_1)e^{jk_4 t}. \tag{7}$$

Из формулировки очевидно, что это не что иное, как функция Грина.

Через $U^{*}_{i(\nu)}$—обозначим перемещение, вызванное напряжениями $\tau_{3i(\nu)}$.

Учитывая, что $\sigma^{(2)}_{3i(1)}(x_1, 0, t)=0$, из (2) получим:

$$\sigma^{(1)}_{3i(1)}(x_1, 0, t) = \sigma^{(3)}_{3i(1)}(x_1, 0, t). \tag{8}$$

Следовательно, использование граничного условия (3) приводит к следующим двум интегральным уравнениям первого рода:

$$\int\limits_{-d}^{d} \bar{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(x_1, 0, k_4)\,\bar{U}^{*}_{i(1)}(x_1-\xi_1; 0; k_4)\,d\xi_1 = \bar{U}^{(1)}_{i(1)}(k_4) - \bar{U}^{(2)}_{i(1)}(x_1, 0, k_4) \tag{9}$$

$$i=(1, 3)$$

где

$$\bar{U}^{(1)}_{i(1)}(k_4) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} U^{(1)}_{i(1)}(x_1, 0, t)e^{-jk_4 t}\,dt \quad \text{при} \quad |x_1| \leqslant d$$

$$\bar{U}^{(2)}_{i(1)}(x_1, x_3, k_4) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} U^{(2)}_{i(1)}(x_1, x_3, t)e^{-jk_4 t}\,dt. \tag{10}$$

Если пока считать, что функция Грина $\bar{U}^{*}_{i(1)}$, которая также подлежит определению для данной задачи—известна, то в два независимые уравнения (9) входят четыре неизвестных $\bar{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}$ и $\bar{U}^{(1)}_{i(1)k_4}$. Следовательно, для замыкания необходимо иметь еще два независимых уравнения.

Эти два уравнения получим из условия Даламбера, т. е. из условия динамического равновесия штампа в условиях сейсмического воздействия:

$$\int\limits_{-d}^{d} \bar{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(x_1, 0, k_4)\,dx_1 = M \cdot k_4^2 \bar{U}^{(1)}_{i(1)}, \tag{11}$$

где M—погонная масса бесконечной полосы. Записывая совместно (9) с (11), получим две ($i=1, 2$) системы интегральных уравнений первого рода, определяющие значения спектров контактных напряжений $\bar{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(x_1, 0, k_4)$ и спектры компонентов общего перемещения со штампом $\overline{U}^{(1)}_{i(1)}$.

$$\int_{-d}^{d} \bar{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(x_1, 0, k_4)\overline{U}^{*}_{i(1)}(x_1-\xi_1, 0, k_4)d\xi_1 = \overline{U}^{(1)}_{i(1)}(k_4) - \overline{U}^{(2)}_{i(1)}(x_1, 0, k_4), \tag{12}$$

$$\int_{-d}^{d} \bar{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(x_1, 0, k_4)dx_1 = M \cdot k_4^2 U^{(1)}_{i(1)}(k_4).$$

Учитывая, что ядро интегральных уравнений $\overline{U}^{*}_{i(1)}$ в общем случае имеет сложный вид, систему интегральных уравнений целесообразно решать по методу колакации [1].

Разобьем область контакта полосы с основанием по направлению координаты x_1 на L отдельных участков размерами x_{1l} ($l=1, 2...L$) и предположим, что функция, определяющая спектры контактных напряжений $\bar{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(x_1, 0, k_4)$, может быть аппроксимирована ступенчатой функцией по координате x_1, сохраняющей постоянное значение $\bar{\sigma}^{(3)l}_{3i(1)}$ в пределах каждого участка $l=1, 2 \ldots L$.

Будем считать, что контактные условия выполняются не по всей подошве штампа, а лишь в некоторых точках имеющих координаты $x_1=x_{1f}$ в пределах каждого участка, где $f=1, 2 \ldots L$.

Тогда вместо системы интегральных уравнений (12) получим две системы ($i=1, 2$) линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\bar{\sigma}^{3(l)}_{3i(1)}$ и $\overline{U}^{(1)}_{i(1)}$.

$$\sum_{l=1}^{L} \sigma^{(3)l}_{3i(1)} \int_{x_{1(l-1)}}^{x_{1l}} \overline{U}^{*}_{i(1)}(x_{1f}-\xi_1, 0, k_4)\, d\xi_1 = \overline{U}^{(1)}_{i(1)}(k_4) - \overline{U}^{(2)}_{i(1)}(x_{1f}, 0, k_4), \tag{13}$$

$$\sum_{l=1}^{L} \bar{\sigma}^{(3)1}_{3i(l)} \Delta x_{1l} = M \cdot k_4^2 \overline{U}^{(1)}_{i(1)}(k_4),$$

где

$$\Delta x_{1l} = x_{1l} - x_{1(l-1)}.$$

Обозначим

$$\int_{x_{1(l-1)}}^{x_{1l}} \overline{U}^{*}_{i(1)}(x_{1f}-\xi_1; 0, k_4)d\xi_1 = \delta^{*}_{fl}(k_4). \tag{14}$$

Система уравнений (13) примет вид:

$$\sum_{l=1}^{L} \overline{\sigma}_{3l(1)}^{(3)l} \delta^{*}_{fl} k_4 - \overline{U}_{l(1)}^{(1)}(k_4) = -\overline{U}_{l(1)}^{(2)}(x_{1f}, 0, k_4)$$

$$\sum_{l=1}^{L} \overline{\sigma}_{3l(1)}^{(3)l} \Delta x_{1l} - M \cdot k_4^2 \overline{U}_{l(1)}^{(1)}(k_4) = 0. \tag{15}$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&Z_{il} = \overline{\sigma}_{3l(1)}^{(3)l}(k_4) \quad (i=1,\ 2 \quad l=1,\ 2 \ldots L)\\
&Z_{i,L+1} = \overline{U}_{l(1)}^{(1)}(k_4) \quad (i=1,\ 2),\\
&b_{fl}^{(i)} = \delta^{*}_{fl}(k_4) \quad (f,\ l=1,\ 2 \ldots L),\\
&b_{f,L+1}^{(i)} = -1 \qquad b_{L+1,l} = \Delta x_{1l},\\
&b_{L+1,l+1}^{(i)} = -Mk_4^2 \qquad (f;\ l=1,\ 2 \ldots L)\\
&B_f^{(i)} = \overline{U}_{l(1)}^{(2)}(x_{1f}, 0,\ k_4) \qquad (f=1, 2 \ldots L) \quad B_{n+1}^{l} = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

С учетом обозначений (16) систему уравнения (15) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{l=1}^{L+1} b_{fl}^{(i)} \cdot Z_{il} = B_f \qquad (i=1, 2,\ f=1, 2 \ldots L+1). \tag{17}$$

Для решения (17) запишем его в матричной форме

$$[b_{f,l}^{(i)}][Z_l^{(i)}] = [B_f^{(i)}] \quad (i=1, 2), \quad (l;\ f=1, 2 \ldots L+1), \tag{18}$$

откуда и определяется значение контактного напряжения

$$[Z_l^{(i)}] = [b_{f,l}^{(i)}]^{-1}\,[B_f^{(i)}]. \tag{19}$$

С учетом (16) определяются спектры контактных напряжений и общего перемещения бесконечной полосы, а из выражений (5) и (4) определяются напряженно-деформированные состояния неоднородного многослойного основания бесконечной полосы.

Чтобы завершить построение решения поставленной задачи, остается определить функцию Грина $\tau_{l\nu}$ и $U_{l\nu}^{*}$ для среды (1).

Для определения функции Грина рассмотрим решение следующей задачи, относящейся к плоскому деформированному состоянию.

Пусть в плоскости $x_3 = 0$ действует нагрузка

$$\tau_{3l(1)}(x_1,\ 0,\ t) = \delta(x_1) e^{jk_1 t}. \tag{20}$$

Эта нагрузка вызывает в среде (1) напряженно-деформированное состояние, возникают продольные и поперечные SV волны. Требуется решить волновые уравнения

$$\begin{aligned}
&\square_1^2 \varphi_\nu = 0,\\
&\square_2^2 \psi_{2\nu} = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

с граничными условиями:

$$(U^*_{i\nu} - U_{i(\nu+1)})x_3 = H_0 = 0,$$

$$(\tau_{3i(\nu)} - \tau_{3i(\nu+1)})x_3 = H_\nu = 0 \quad (i = 1, 3;\ \nu = 1,\ 2, 3\ .\ .\ .\ n) \tag{22}$$

совместно с (20).

Потенциалы φ и ψ_2 связаны с перемещением и напряжением следующими соотношениями [3]:

$$U^*_{1\nu} = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_{2\nu}}{\partial x_3},$$

$$U^*_{3i} = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi_{2\nu}}{\partial x_1},$$

$$\tau_{31(\nu)} = \rho_\nu a^2_{2\nu}\left[\frac{\partial^2\psi_{2\nu}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\psi_{2\nu}}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x_1 \partial x_3}\right], \tag{23}$$

$$\sigma_{33(\nu)} = \rho_\nu a^2_{1\nu}\left[\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x_3^2} + \left(1 - 2\frac{a^2_{2\nu}}{a^2_{1\nu}}\right)\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x_1^2} + 2\frac{a^2_{2\nu}}{a^2_{1\nu}}\frac{\partial^2\psi_{2\nu}}{\partial x_1 \partial x_3}\right],$$

где

$$a_{1\nu} = \frac{\lambda_\nu + 2\mu_\nu}{\rho_\nu}; \qquad a_{2\nu} = \frac{\mu_\nu}{\rho_\nu}.$$

Запишем решение уравнения (21) для среды (1) в следующем виде:

$$\overline{\varphi}_\nu = e^{jk_4 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[F_{1\nu}e^{jk_1\eta_{1\nu}(x_3 - H_\nu)} + F_{2\nu}e^{-jk_1\eta_{1\nu}(x_3 - H_\nu - 1)}]e^{jk_1 x_1}dk_1,$$

$$\overline{\psi}_{2\nu} = e^{jk_4 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[F_{3\nu}e^{jk_1\eta_{2\nu}(x_3 - H_\nu)} + F_{4\nu}e^{-jk_1\eta_{2\nu}(x_3 - H_\nu - 1)}]e^{jk_1 x_1}dk_1, \tag{24}$$

где

$$\eta_{p\nu} = \sqrt{1 + \frac{k_4^2}{k_1^2 a_{p\nu}^2}} \quad (p = 1,\ 2).$$

Подставляя формулы (24) в выражения для перемещений и напряжений (23), получим:

$$U^*_{1(\nu)} = je^{jk_4 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1\{F_{1\nu}e^{jk_1\eta_{1\nu}(x_3 - H_\nu)} + F_{2\nu}e^{-jk_1\eta_{1\nu}(x_3 - H_{\nu-1})} -$$

$$-\eta_{2\nu}[F_{3\nu}e^{jk_1\eta_{2\nu}(x_3 - H_\nu)} - F_{4\nu}e^{-jk_1\eta_{2\nu}(x_3 - H_{\nu-1})}]\}e^{jk_1 x_1}d_{k_1} \tag{25}$$

$$U^*_{3(\nu)} = je^{jk_4 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1\{\eta_{1\nu}[F_{1\nu}e^{jk_1\eta_{1\nu}(x_3 - H_\nu)} - F_{2\nu}e^{-jk_1\eta_{1\nu}(x_3 - H_{\nu-1})}] +$$

$$+F_{3\nu}e^{jk_1\eta_{2\nu}(x_3-H_\nu)}+F_{4\nu}e^{-jk_1\eta_{2\nu}(x_3-H_{\nu-1})}\}e^{jk_1x_1}d_{k_1}$$

$$\sigma_{31(\nu)}=-\rho_\nu a_{2\nu}^2e^{jk_1t}\int_{-\infty}^{\infty}k_1^2\{2\eta_{1\nu}[F_{1\nu}e^{jk_1\eta_{1\nu}(x_3-H_\nu)}-F_{2\nu}e^{-jk_1\eta_{1\nu}(x_3-H_{\nu-1})}]+$$

$$+(1-\eta_{2\nu})^2[F_{3\nu}e^{jk_1\eta_{2\nu}(x_3-H_\nu)}+F_{4\nu}e^{-jk_1\eta_{2\nu}(x_3-H_{\nu-1})}]\}e^{jk_1x_1}d_{k_1}$$

и

$$\sigma_{33(\nu)}=-\rho_\nu a_{1\nu}^2e^{jk_1t}\int_{-\infty}^{\infty}k_1^2\left\{\left[\eta_{1\nu}^2-\left(1-\frac{a_{2\nu}^2}{a_{1\nu}^2}\right)\right]\right[F_{1\nu}e^{jk_1\eta_{1\nu}(x_3-H_\nu)}+ \tag{26}$$

$$+F_{2\nu}e^{-jk_1\eta_{1\nu}(x_3-H_{\nu-1})}\Big]-2\frac{a_{2\nu}^2}{a_{1\nu}^2}\eta_{2\nu}[F_{3\nu}e^{jk_1\eta_{2\nu}(x_3-H_\nu)}-F_{4\nu}\times$$

$$\times e^{-jk_1\eta_{2\nu}(x_3-H_{\nu-1})}\Big]e^{jk_1x_1}d_{k_1}.$$

Подставляя выражения (25) и (26) в граничные условия задачи (22), получим систему из $4n$ алгебраических уравнений относительно $4n+2$ неизвестных:

$$\sum_{k=1}^{4}\overline{C}_{mk}^{(\nu-1)}F_{k(\nu-1)}=\sum_{k=1}^{4}C_{mk}^{(\nu)}\cdot F_{k(\nu)}, \tag{27}$$

$$(\nu=2,3\ldots n+1);\quad (m,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Здесь следует учесть $F_1(n+1)\equiv F_3(n+1)\equiv 0$, так как очевидно, что в полупространстве $x_3>H_n$ в этом случае возникают волны, распространяющиеся в сторону убывания координаты x_3.

Входящие коэффициенты $\overline{C}_{mk}^{(\nu)}$ и $C_{mk}^{(\nu)}$ имеют следующие значения:

$$C_{11}^{(\nu)}=e^{-jk_1\eta_{1\nu}h_1}\quad C_{12}^{(\nu)}=1\quad C_{13}^{(\nu)}=-\eta_{2\nu}e^{-jk_1\eta_{2\nu}h_\nu}\quad C_{14}^{(\nu)}=\eta_{2\nu},$$

$$C_{21}^{(\nu)}=\eta_{1\nu}e^{-jk_1\eta_{1\nu}h_\nu}\quad C_{22}^{(\nu)}=-\eta_{1\nu}\quad C_{23}^{(\nu)}=e^{-jk_1\eta_{2\nu}h_\nu}\quad C_{24}^{(\nu)}=1,$$

$$C_{31}^{(\nu)}=2\rho_\nu a_{2\nu}^2\eta_{2\nu}e^{-jk_1\eta_{1\nu}h_\nu}\quad C_{32}^{(\nu)}=-2\rho_\nu a_{2\nu}^2\eta_{2\nu},$$

$$C_{33}^{(\nu)}=\rho_\nu a_{2\nu}^2(1-\eta_{2\nu}^2)e^{-jk_1\eta_{2\nu}h_\nu}\quad C_{34}^{(\nu)}=\rho_\nu a_{2\nu}^2(1-\eta_{2\nu}^2)$$

$$C_{41}^{(\nu)}=\rho_\nu a_{1\nu}^2\left[\eta_{1\nu}^2-\left(1-2\frac{a_{2\nu}^2}{a_{1\nu}^2}\right)\right]e^{-jk_1\eta_{1\nu}h_\nu} \tag{28}$$

$$C_{42}^{(\nu)}=\rho_\nu a_{1\nu}^2\left[\eta_{1\nu}^2-\left(1-2\frac{a_{2\nu}^2}{a_{1\nu}^2}\right)\right]$$

$$C_{43}^{(\nu)}=-2\rho_\nu a_{2\nu}^2\eta_{2\nu}e^{-jk_1\eta_{1\nu}h_\nu}$$

$$C_{44}^{(\nu)}=2\rho_\nu a_{2\nu}^2\eta_{2\nu}$$

$$\overline{C}_{mn}^{(\nu)}=C_{mk}^{(\nu)}e^{jk_1\eta_{1\nu}h_\nu}\qquad \text{при}\quad k=1,\ 2$$

$$\overline{C}_{mk}^{(\nu)}=C_{mk}^{(\nu)}e^{jk_1\gamma_{2\nu}h_\nu} \qquad k=3,\ 4.$$

Дополнительные два уравнения к системе (27) получим из граничных условий задачи, заданной на поверхности $x_3=0$.

Подставляя выражения напряжений из (26) и (20) при $x_3=0$: $\nu=1$, получим

$$\begin{aligned} &e^{jk_4t}(C_{31}^{(1)}F_{11}+C_{32}^{(1)}F_{21}+C_{33}^{(1)}F_{31}+C_{34}^{(1)}F_{41})=-\overline{\tau}_{31(1)}(k_1,\ 0,\ k_4),\\ &e^{jk_4t}(C_{41}^{(1)}F_{11}+C_{42}^{(1)}F_{21}+C_{43}^{(1)}F_{31}+C_{44}^{(1)}F_{41})=-\sigma_{33(1)}(k_1,\ 0,\ k_4), \end{aligned} \tag{29}$$

где коэффициенты $C_{mk}^{(1)}-(m=3,\ 4\quad k=1,2,3,4)$ определяются из (28), а для $\overline{\tau}_{3i(1)}$ $(i=1,\ 3)$ получим:

$$\overline{\tau}_{3i(1)}(k_1,0,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x_1)e^{j(k_4t_1+k_1x_1)}dx_1=\frac{e^{jk_4t}}{2\pi}. \tag{30}$$

Следовательно, с учетом (30) система уравнений (29) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{4}C_{mk}^{(1)}F_{k(1)}=\frac{1}{2\pi}. \tag{31}$$

Система уравнения (31) совместно с (27) составляет замкнутую систему из $(4n+2)$ алгебраических уравнений относительно $(4n+2)$ неизвестных $F_{k\nu}$ $(k=1,2,3,4\quad \nu=1,2\ldots n+1)$, где $F_{1(n+1)}$ и $F_{3(n+1)}$ тождественно равны нулю.

Запишем системы уравнений (27) и (31) совместно в матричной форме

$$\begin{gathered}[\overline{C}_{mk}^{(\nu-1)}][F_{k(\nu-1)}]=[C_{mk}^{(\nu)}][F_{k(\nu)}]\\ (m,\ k=1,2,3,4\quad \nu=1,2\ldots n+1),\end{gathered} \tag{32}$$

где приняты следующие обозначения:

$$[\overline{C}_{mk}^{(0)}]=[E]\quad F_{1(0)}\equiv F_{2(0)}\equiv 0;\quad F_{3(0)}\equiv F_{4(0)}\equiv\frac{1}{2\pi} \tag{33}$$

$[E]$—является единичной матрицей с размерами (4×4). Из решения (32) получим:

$$\begin{aligned} &[F_{k(\nu)}]=[D_{mk}^{(\nu)}]^{-1}[F_{k(\nu+1)}]\quad (\nu=1,2\ldots n)\\ &[F_{k(n+1)}]=[D_{mk}^{(0)}][F_{k(0)}] \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{gathered}[D_{mk}^{(\nu)}]=[C_{mk}^{(n+1)}]^{-1}[\overline{C}_{mk}^{(n)}][C_{mk}^{(n)}]^{-1}[\overline{C}_{mk}^{(n-1)}][C_{mk}^{(n-1)}]^{-1}\ldots[C_{mk}^{(\nu+1)}]^{-1}[\overline{C}_{mk}^{(\nu)}]\\ (\nu=0,1,2\ldots n).\end{gathered} \tag{35}$$

Считая все спектральные функции $[F_{k(0)}]$ известными величинами, возвращаясь к формуле (25) и принимая $x_3=0$: $\nu=1$, определим функцию Грина для среды (1):

$$U^*_{11}(x_1-\xi_1;0,k_4)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} jk_1\{F_{11}e^{-jk_1\gamma_{11}h_1}+F_{21}-\gamma_{21}(F_{31}e^{-j\gamma_{21}k_1h_1}-F_{41})\}e^{jk_1(x_1-\xi_1)}dk_1 \qquad (36)$$

$$U^*_{31}(x_1-\xi_1;0;k_4)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} jk_1\{\gamma_{11}[F_{11}(e^{-jk_1\gamma_{11}h_1}-F_{21})+F_{31}e^{-jk_1\gamma_{21}h_1}+F_{41}\}e^{jk_1(x_1-\xi_1)}dk_1.$$

В заключение рассмотрим случай, когда длина сейсмических волн в основании сооружения на один-два порядка выше поперечного размера жесткой полосы, т. е. $2d/a_{p\nu}\to 0$ или $a_{p\nu}\to\infty$.

В этом случае, пренебрегая влиянием свободной поверхности при $x_3=0$, можно считать, что эпюра контактных напряжений по контактной поверхности и по направлению координаты x_1 распределяется равномерно. Следовательно, система (32), определяющая спектральные значения контактных напряжений и перемещений без учета коэффициента бокового расширения среды, принимает вид:

$$\begin{aligned}&\overline{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(k_4)\overline{U}^*_{i(1)}2d=U^{(1)}_{i(1)}(k_4)-\overline{U}^{(2)}_{i(1)}k_4,\\&\overline{\sigma}^{(3)}_{3i(1)}(k_4)2d=Mk_4^2\overline{U}^{(1)}_{i(1)}(k_4).\end{aligned} \qquad (37)$$

Здесь величина $1/\overline{U}^*$ является коэффициентом постели винклеровского основания [2].

Учитывая, что

$$\overline{U}^{(3)}_{i(1)}(k_4)=\overline{U}^{(1)}_{i(1)}(k_4)-\overline{U}^{(2)}_{i(1)}k_4,$$

из системы уравнения (37) получим:

$$-k_4^2\overline{U}^{(3)}_{i(1)}(k_4)+\frac{1}{M\overline{U}^*_{i(1)}}\overline{U}^{(3)}_{i(1)}(k_4)=k_4^2U^{(2)}_{i(1)}(k_4). \qquad (38)$$

Принимаем обозначения $\omega_i^2=1/M\overline{U}^*_i$ (39) и, записывая уравнения (38) в оригинале, получим два самостоятельных дифференциальных уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, определяющих сейсмические колебания системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{U}^{(3)}_{i(1)}(t)+\omega^2\cdot U^{(3)}_{i(1)}(t)=-\ddot{U}^{(2)}_{i(1)}(k_4). \qquad (40)$$

Решения (40), как известно, описывается с помощью интеграла Дюемеля:

$$U^{(3)}_{i(1)}(t)=\int\limits_0^t \ddot{U}^{(2)}_{i(1)}(\tau)\cdot\sin\omega(t-\tau)d\tau. \qquad (41)$$

Подставляя (41) в выражения $\sigma_{3i(1)}$ из (37), получим значения контактных напряжений в следующем виде:

$$\sigma^{(3)}_{3i(1)}=\frac{M}{2d}\left[\ddot{U}^{(2)}_{i(1)}(t)+\omega^2\int\limits_0^t\ddot{U}^{(2)}_{i(1)}(\tau)\sin\omega(t-\tau)\right]d\tau. \qquad (42)$$

Выражения (41) и (42) определяют компоненты перемещения бесконечной жесткой полосы и значения контактных напряжений без учета дифракций волн в основании.

Как известно, выражение (41) в настоящем находит широкое применение в современной инженерной сейсмологии, однако очевидно, что этот метод является сильно упрощенным методом расчета при изучении вопросов взаимодействия сооружения с основанием.

Для количественной оценки влияния дифракций волн в основании или параметров сейсмического колебания штампа необходимо проводить сопоставление результатов расчета по формуле (36) и по формуле (41), записанной в оригинале.

Теперь заметим, что на основе результатов решения упругой задачи можно получить решение задачи в вязко-упругой постановке.

Пусть для основания (1) связь между напряжениями и деформациями определяется по закону Больцмана—Био.

$$\sigma_{ik}=2\int_0^t q_{1\nu}(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varepsilon_{ik}d\tau+\delta_{ik}\int_0^t q_{2\nu}(t-\tau)\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\tau}d\tau,$$

где $\theta_\nu=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_{k\nu}}{\partial x_k}$; $q_1(t)$; $q_2(t)$—функции по времени, которые в случае идеально упругого основания (1) переходят в постоянные Ламе μ и λ. Для получения решения поставленной задачи в вязко-упругой постановке необходимо в вышеизложенных решениях задач в упругой постановке, записанных в изображениях Фурье по времени, λ и μ, заменить величинами $\overline{\lambda}(k_4)$ и $\overline{\mu}(k_4)$ [5], где $\overline{\lambda}(k_4)=jk_4\overline{q}_2(k_4)$: $\mu(k_4)=$ $=jk_4\overline{q}_1(k_4)$, а значения $\overline{q}_p(k_4)$ $(p=1,\ 2)$ определяются:

$$\overline{q}_p(k_4)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty q_p(t)e^{jk_4t}dt.$$

ИГИС АН АрмССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильечев В. А., Таранов В. Г. Метод прогнозирования уровня колебаний сооружений и грунтов по результатам опытов. «Основания, фундаменты и механика грунтов», № 4, 1977.
2. Коренев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в беселевых функциях. М.: «Физмат» 1960,
3. Новацкий В. К. Теория упругости М.: «Мир», 1975.
4. Назаров А. Г. Метод инженерного анализа сейсмических сил. Ереван, изд. АН АрмССР, 1959.
5. Са́ргсян А. Е. Сейсмические воздействия на свободную поверхность строительной площадки и на преграду, лежащую на многослойном основании. МИРСС-81. Тезисы докладов всесоюзного научно-технического совещания. Л., 1981.