С. Х. НЕГМАТУЛЛАЕВ, А. И. ЗОЛОТАРЕВ

ОБОБЩЕННАЯ СЕЙСМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА ДЛЯ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ, УЧИТЫВАЮЩИХ ПОДАТЛИВОСТЬ ОСНОВАНИЯ И СОБСТВЕННУЮ КРУТИЛЬНУЮ ИНЕРЦИЮ I_0

В большинстве принимаемых динамических расчетных схем зданий считается, что крутильный момент инерции I_k, связанный с вращением массы M_k вокруг оси, перпендикулярной к плоскости колебаний и проходящей через центр тяжести массы, пренебрежительно мал, т. е. массы перекрытий M_k считаются точечными. Однако в случае не очень высоких зданий предположение о пренебрежимо малой крутильной инерции I_k будет неоправданным. Это особенно относится к жестким зданиям, возведенным на податливых грунтах, когда здание раскачивается, в основном, как одно жесткое целое. В общем случае каждое перекрытие колеблется вокруг своей оси поразному. Однако мы будем предполагать, что основная доля угла поворота каждого перекрытия вокруг оси вращения определяется углом поворота фундамента $\varphi(t)$ в податливом грунте.

Естественно, что при колебаниях возникают инерционные вращательные моменты $I_k \cdot \ddot{\varphi}(t)$. Следовательно, наряду с известными горизонтальными инерционными силами вида $M_k \cdot \ddot{y}_k$ возникают дополнительные силы инерции в виде сосредоточенных пар, которые приводят к перераспределению всей сейсмической нагрузки по высоте здания, что может сказаться на ее численном изменении.

Из приблизительного равенства углов поворота для всех перекрытий получается, что все эти вращения соответствуют одной степени свободы, выражаемой величиной $\varphi = x/H$, где x—смещение верха консоли динамической расчетной схемы в результате поворота фундамента в податливом грунте, H—полная высота консоли. Этой степени свободы φ соответствует обобщенная инерционная характеристика

$$I_0 = I_\varphi + \sum_{k=1}^{n} I_k, \tag{1}$$

где I_φ—собственный крутильный момент инерции фундамента.
Сумму (1) собственных моментов инерции I_0 не следует путать с полным моментом инерции всего здания I относительно оси „раскачивания", который определяется по формуле:

$$I = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot h_k^2 + \sum_{k=1}^{n} I_k + I_\varphi = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot h_k^2 + I_0, \tag{2}$$

где h_k—расстояние от оси „раскачивания" до центра тяжести k-ой массы M_k.

В силу сделанных предположений будем рассматривать динамическую расчетную схему, изображенную на рис. 1. Предполагается также, что в промежутке между двумя массами консоль работает только на сдвиг. На динамической расчетной схеме k_z обозначает горизонтальный отпор R_z грунта при единичном смещении фундамента в грунте, а k_φ—упругий отпор M_φ грунта при повороте фундамента на единичный угол, т. е.

$$R_z = k_z \cdot z, \quad M_\varphi = \varphi \cdot k_\varphi = x \cdot \frac{k_\varphi}{H}, \tag{3}$$

где z—упругое горизонтальное перемещение фундамента в грунте.

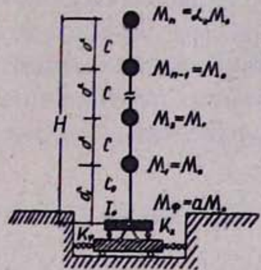

Рис. 1. Частично регулярная расчетная схема при условии упруго-податливого защемления в грунте

Если теперь ввести величину

$$M_\gamma = \frac{I_0}{H^2}, \tag{4}$$

то расчетную схему рис. 1 с $n+2$ степенями свободы можно представить схемой рис. 2. На этой схеме все массы M_k являются точечными, их крутильная инерция компенсируется условной массой M_γ, которая находится на горизонтальной жесткой консоли длиной H.

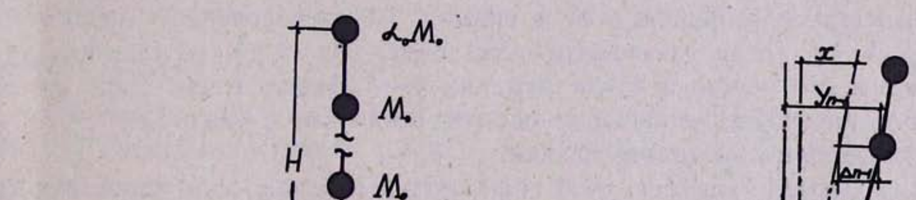

Рис. 2. Частично регулярная расчетная схема с условной массой

Подчеркнем условность этой массы $M_т$ не только в том смысле, что в реальном сооружении она отсутствует, но и в том, что при вертикальных колебаниях массы $M_т$ возникает вертикальная сила инерции $-M_т \cdot \ddot{x}$, зато при горизонтальных колебаниях основания горизонтальная сила инерции $-M_т \cdot \ddot{y}$ не учитывается. Эта условность связана с тем, что крутильные моменты инерции $I_n, I_{n-1}, \ldots, I_1, I_\varphi$ создают инерционный опрокидывающий момент только по отношению к степени свободы $\varphi = x/H$; если вращение отсутствует, то при любом $\ddot{y}_0$ крутильная инерция I_0 не оказывает никакого влияния. Но поскольку мы от угла поворота φ переходим к условному линейному смещению $x=\varphi \cdot H$, то удобно ввести соответствующую массу $M_т$ (4) и рассматривать ее вертикальные перемещения. Величина крутильной инерции I_0 будет полностью известна, если задать безразмерный коэффициент β:

$$M_т = \beta \cdot M_0, \quad I_0 = \beta \cdot M_0 \cdot H^2, \tag{5}$$

где M_0—масса, сосредоточенная в уровнях междуэтажных перекрытий.

Подчеркнем, что вопрос об учете собственной крутильной инерции I тесно связан с введением степени свободы $\varphi(t)$.

Предположим, что мы согласно СНиП не будем учитывать собственные крутильные моменты инерции перекрытий и фундамента, то есть будем считать массы на динамической расчетной схеме точечными. Иногда ошибочно считают, что такая схема имеет $n+1$ степень свободы, так как горизонтальные смещения всех точечных масс вполне определяются вектором с $n+1$ компонентом. Но знание только этих горизонтальных смещений не достаточно для того, чтобы иметь полное представление о деформированном состоянии расчетной схемы, включающей в себя упругое податливое основание. Действительно, можно все здания наклонить на угол φ только за счет упругого вращения фундамента в грунте; в этом случае имеем $z=0$, $y_k = h_k \cdot \varphi$, где y_k—горизонтальное смещение k-ой массы расчетной схемы. Но можно в предположении $\varphi=0$ создать точно такие же по величине горизонтальные смещения всех масс только за счет упругих деформаций самого здания.

Отсюда следует, что при учете податливости основания мы должны рассматривать расчетную схему с $n+2$ степенями свободы (рис. 1). В качестве таких степеней свободы можно взять величины $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, z, x$, где Δ_k—горизонтальное смещение массы M_k, возникающее только за счет упругих деформаций здания (в предположении $z=\varphi=0$). Полное смещение $y_k(t)$ (для $k=1, 2, \ldots, n$) представится в виде:

$$y_k = \Delta_k + z + \varphi \cdot h_k. \tag{6}$$

Для определения $n+2$ неизвестных функций $\Delta_1(t), \Delta_2(t), \ldots$ $\ldots, \Delta_n(t), z(t)$ и $x(t)$, описывающих колебания динамической расчетной схемы, необходимо составить $n+2$ условия равновесия для сил инерций и внутренних упругих сил. n—Условий равновесия получаются с помощью „вырезания" каждой из точечных масс $M_1, M_2, \ldots, M_n$. При этом горизонтальная сила инерции, действующая на массу M_k, приравнивается к сумме перерезывающих сил непосредственно над и под этой массой. Еще одно уравнение равновесия получается, если упругий горизонтальный отпор грунта $k_z \cdot z$ приравнять к сумме всех горизонтальных сил инерций. Последнее, $n+2$-ое уравнение равновесия получается приравниванием упругого реактивного момента $k_\varphi \cdot \varphi$ сумме моментов горизонтальных сил инерций относительно оси „раскачивания", которая имеет вид:

$$M_{\text{опр.}} = \sum_{k=1}^{n} h_k \cdot (-\ddot{y}_k \cdot M_k). \qquad (7)$$

Если в это выражение вместо y_k подставить сумму (6), то в правой части (7) появится, в частности, слагаемое $\overline{I} \cdot \ddot{\varphi}$, где

$$\overline{I} = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot h_k^2. \qquad (8)$$

Величина $\overline{I}$ представляет собой неполный крутильный момент инерции здания относительно оси „раскачивания", когда все массы M_k считаются точечными.

В данной работе исследуется вопрос о том, как изменяются величины сейсмических нагрузок по высоте таких невысоких, жестких зданий, когда в правой части (7) необходимо рассматривать дополнительный инерционный крутящий момент

$$\Delta M_{\text{опр.}} = -I_\varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sum_{k=1}^{n} I_k \cdot \ddot{\varphi} = -I_0 \cdot \ddot{\varphi}, \qquad (9)$$

возникающий в связи со значительным собственным крутильным моментом инерции $I_0 = I_\varphi + \sum_{k=1}^{n} I_k$.

Важность учета дополнительного опрокидывающего момента вида (9) связана не только с тем, что для невысоких зданий величина I_0 сравнима с $\overline{I}$, не менее важно еще и то, что инерционный опрокидывающий момент $-I_0 \cdot \ddot{\varphi}$ нужно представить себе как дополнительную внешнюю силу в виде сосредоточенной пары сил, которая не может создать перерезывающей силы в самом здании, но при этом наклоняет здание, создавая внутреннее усилие в упругом основании. Это означает, что понятие условной сейсмической нагрузки для динамической расчетной схемы здания обобщается в том смысле, что наряду с $n+1$ горизонтальными силами, приложенными к соответствующим массам, появляется еще и сосредоточенный сейсмический момент, который всегда можно мыслить приложенным к фундаменту здания.

При этом важно подчеркнуть, что численная величина этой дополнительной сосредоточенной пары сил пропорциональна именно величине собственного крутильного момента инерции I_0. Иными словами, важность учета собственного крутильного момента инерции I_0 диктуется тем, что опрокидывающий момент (7), зависящий от I_0, создается горизонтальными силами, вызывающими внутренние усилия в здании, а дополнительный сосредоточенный момент (9) вызывает усилия только в упругом основании.

Таким образом, выявление роли сосредоточенного момента (9) связано с выявлением уменьшения сейсмических внутренних усилий при землетрясениях. Заранее можно сказать, что учет дополнительного опрокидывающего момента (9) может дать существенный эффект только в тех случаях, когда величина I_0 сравнительна с $\overline{I}$ и когда крутильное ускорение $\ddot{\varphi}$ велико, т. е. учет роли собственной крутильной инерции I_0 нужно производить одновременно с учетом влияния роли податливости основания и возникающих качательных колебаний $\varphi(t)$.

Перейдем теперь к определению вектора статической сейсмической нагрузки S, который статически воссоздает деформированное состояние y. Как известно [1], вектор $y\{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_N(t)\}$ можно разложить по векторам нормированных форм колебаний η_i:

$$y(t)=a_1(t)\cdot\eta_1+a_2(t)\cdot\eta_2+\ldots+a_N(t)\cdot\eta_N, \tag{10}$$

где функции $a_i(t)$ определяются из уравнений вида

$$a_i(t)+\alpha p_i\cdot\dot{a}_i(t)+p_i^2\cdot a_i(t)=-\ddot{y}_0(t), \tag{11}$$

где α — мера рассеяния энергии,

$\ddot{y}_i(t)$ — произвольное сейсмическое воздействие, заданное акселерограммой колебаний грунта.

Эти простейшие дифференциальные уравнения (11) соответствуют колебаниям линейных осцилляторов с частотами $p_i=2\pi/T_i$, где T_i — i-ый собственный период колебаний рассматриваемой динамической расчетной схемы.

После определения всех функций $a_i(t)$ из уравнений вида (11), а также вычисления всех нормированных на основании работы [3] векторов η_i мы можем найти вектор S:

$$S=ky=a_1(t)\cdot k\eta_1+a_2(t)\cdot k\eta_2+\ldots+a_N(t)\cdot k\eta_N. \tag{12}$$

Но на основании равенства $k\eta_i=p_i^2\cdot M\eta$, где M — диагональная матрица масс M_k, получаем

$$a_i(t)\cdot k\eta_i=a_i(t)\cdot p_i^2\cdot M\eta_i. \tag{13}$$

Если теперь матрицу M умножить на ускорение силы тяжести g, а вместо величины $\max\limits_t\left|\dfrac{a_i(t)\cdot p_i^2}{g}\right|$ подставить нормативную величину $K_c \cdot \beta(T_i)$, то получим нормативную нагрузку, соответствующую i-ой форме колебаний:

$$S_{ik} = k_c \cdot \beta(T_i) \cdot \eta_{ik} \cdot Q_k, \quad k=0, 1, 2, \ldots, N. \tag{14}$$

Формально здесь нет никакого различия с нормативной методикой СНиП [2]. Однако для схем, которые учитывают собственную крутильную инерцию I_0 (соответственно условную массу $M_\text{т} = \frac{Q_\text{т}}{g}$ на горизонтальной консоли рис. 2), мы получаем принципиальные различия с методикой СНиП по двум причинам:

1) нормированные коэффициенты η_{ik} в рассматриваемом случае определяются по формуле [3]:

$$\eta_{ik} = \frac{x_{ik} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} Q_k \cdot x_{ik}}{\sum\limits_{k=0}^{n} Q_k \cdot x_{ik}^2 + Q_\text{т} \cdot (x^i)^2}, \tag{15}$$

где $k=0$ соответствует весу фундамента $Q=Q_\text{ф}$ и горизонтальному смещению $x_{i0}=z$ фундамента в податливом основании, а $x_i = \varphi^i \cdot H$ соответствует вертикальному смещению условного груза $M_\text{т}$ на консоли рис. 2;

2) в связи с появлением новой степени свободы x^i появляется и новая сейсмическая сила S^i, которая направлена вверх и приложена к условной массе $M_\text{т}$; ее действие сводится к появлению дополнительного опрокидывающего момента

$$\mathscr{L}_i = S^i \cdot H = K_c \cdot \beta(T_i) \cdot \eta_x^i \cdot Q_\text{т} \cdot H, \tag{16}$$

где

$$\eta_x^i = \frac{x^i \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} Q_k \cdot x_{ik}}{\sum\limits_{k=0}^{n} Q_k \cdot x_{ik}^2 + Q_\text{т}(x^i)^2}.$$

Именно поэтому мы называем вектор S вектором обобщенной сейсмической нагрузки.

Таким образом, без всякого усложнения обычной нормативной методики определения сейсмической нагрузки мы можем существенно уточнить эту нагрузку для невысоких жестких зданий, возводимых на податливых грунтах. Ясно, что формулы (14) и (16) приведут к уменьшению расчетной перерезывающей сейсмической силы по каждой (особенно по первой) форме колебаний. Это связано с тем, что силовой фактор $\mathscr{L}^i$ не создает перерезывающей силы в поперечном сечении, а только наклоняет здание, деформируя основание под ним. При этом могут увеличиться расчетные напряжения в грунте под фундаментом. Возникновение нового силового фактора $\mathscr{L}^i$ связано с собственной крутильной инерцией I_0 или условной массой $M_\text{т} = \beta \cdot M$ на горизонтальной консоли.

Перейдем теперь к сравнению величин внутренних усилий на простейших примерах зданий в условиях податливого и жесткого оснований с целью выяснения роли собственной крутильной инерции I_0 на величины этих усилий. Будем рассматривать динамическую расчетную схему регулярной структуры. Для этого случая имеем $Q_k = Q_0$ для $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда перерезывающая сила $R_1^{(i)}$ между фундаментом и первым перекрытием для i-ой формы колебаний определится так:

$$R_1^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} S_{ik} = K_c \cdot \beta(T_i) \cdot Q_0 \cdot \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}. \tag{17}$$

Для жестких невысоких зданий согласно СНиП достаточно ограничиться рассмотрением первой формы колебаний, т. е. положить в (17) $i=1$. Рассмотрим два одинаковых здания, но при разных значениях безразмерных величин n_1 и n_2 [4]:

$$n_1 = \frac{T_0}{T_z}, \qquad n_2 = \frac{T}{T_\varphi}, \tag{18}$$

где T_0—основной период свободных колебаний для рассматриваемого здания при условии, что $K_z \to \infty$ и $K_\varphi \to \infty$;

T_z—условный период, соответствующий предположению, что масса всего здания сосредоточена на уровне фундамента, а жесткости здания C и грунта k_φ неограниченно увеличиваются,

T_φ—условный период качательных колебаний аналогичной системы с одной степенью свободы, когда C и k_z неограниченно возрастают.

Пусть в первом случае основание очень жесткое и $n_1 = n_2 = 2$. Величина β (5) в этом случае почти не играет никакой роли, так как перекрытия практически не вращаются. Например, если взять трехэтажное жесткое здание с развитой подземной частью, для которого величина β достаточно большая (положим $\beta=1{,}5$, а величину $a = \frac{M_ф}{M}$, где $M_ф$—масса фундамента, примем равной $a=2$), то согласно [4] получим:

$$P_1 = 0{,}394 \cdot \sqrt{\frac{C}{M_0}}, \quad \sum_{k=1}^{3} \eta_{1k} = 2{,}945,$$

где P_1—основная частота свободных колебаний здания.

Если же взять значения $a=0{,}5$ и $\beta=0{,}01$, оставив остальные параметры без изменений, то получим:

$$P_1 = 0.370 \cdot \sqrt{\frac{C}{M_0}}, \quad \sum_{k=1}^{3} \eta_{1k} = 2{,}851,$$

что мало отличается от предыдущих значений.

Теперь возьмем второй пример, соответствующий этому же трехэтажному зданию, но на податливом основании при $n_1=1$ $n_2=0{,}25$ ($a=2$, $\beta=1{,}5$). В этом втором случае имеем:

$$\tilde{P}_1=0{,}143\cdot\sqrt{\frac{C}{M_0}},\quad \sum_{k=1}^{3}\tilde{\eta}_{1k}=1{,}632.$$

Логично предположить, что и в первом и во втором случаях величина первого периода мала, т. е. $T_1<0{,}3\ c$ и $\tilde{T}_1<0{,}3\ c$. Тогда $\beta(T_1)=\beta(\tilde{T}_1)$. Для соответствующих перерезывающих сил на первом этаже $R_1^{(1)}$ и $\tilde{R}_1^{(1)}$ (по первой форме колебаний) получим отношение:

$$\frac{\tilde{R}_1^{(1)}}{R_1^{(1)}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{3}\tilde{\eta}_{1k}}{\sum\limits_{k=1}^{3}\eta_{1k}}=\frac{1{,}632}{2{,}945}=0{,}55.$$

Следовательно, при учете собственной крутильной инерции здания с учетом податливости основания величина перерезывающей силы по первой форме колебаний уменьшается почти в два раза (по сравнению со случаем очень жесткого основания).

Подчеркнем еще раз, что в данном случае такое существенное уменьшение перерезывающей силы произошло в основном из-за влияния собственной крутильной инерции I_0: если бы мы в этом же примере оставили большую податливость ($n_1=1$, $n_y=0{,}25$), но взяли бы малое значение β, то получили бы незначительное уменьшение перерезывающей силы. Уменьшение перерезывающей силы при большом значении β происходит, как мы уже отмечали, в связи с появлением значительного сосредоточенного сейсмического опрокидывающего момента, определяемого по формуле(16). Этот сосредоточенный момент раскачивает здание, не создавая при этом перерезывающей силы.

Все сказанное имеет непосредственное отношение к проблеме сейсмического микрорайонирования. Например, если в данном сейсмическом регионе при переходе от скальных грунтов к лессовым необходимо по условиям сейсмического микрорайонирования увеличить коэффициент сейсмичности K_c в два раза, то для невысоких жестких зданий увеличение коэффициента K_c на лессе может вполне компенсироваться соответствующим уменьшением коэффициентов η_{1k} (если учитывать собственную крутильную инерцию), т. е. окончательная величина внутренних усилий для жестких невысоких зданий на лессе может и не увеличиваться (несмотря на увеличение коэффициента сейсмичности K_c). Иными словами, для таких типов зданий внутренние сейсмические усилия на участке с твердым основанием будут такие же, как и на участке с лессовыми грунтами. Это обстоятельство следует иметь в виду при обследовании последствий разрушительных землетрясений.

На основании анализа полученных результатов можно сделать вывод, что учет собственной крутильной инерции I_0 приводит к уменьшению величин горизонтальных сейсмических нагрузок. Формально такое уменьшение сейсмических сил выражается в том, что в знаменателе нормированного коэффициента формы колебаний η_{ik} (15) появляется дополнительное положительное слагаемое вида $M_{\text{т}} \cdot (x^i)^2$, что приводит к уменьшению η_{ik}.

Этот вывод можно обосновать также следующим. Мы показали, что наряду с горизонтальными сейсмическими нагрузками вида (14) мы получаем еще и дополнительный опрокидывающий момент $\mathcal{L}^i$ (16). Появившийся опрокидывающий момент $\mathcal{L}^i$ должен уменьшать величину перерезывающей силы, которая возникает от горизонтальных сейсмических сил (14). Физически это объясняется очень просто: в процессе сейсмических колебаний здание находится в наклоненном (повернутом в грунте) и деформированном состоянии; в отличие от обычного подхода, не учитывающего крутильную инерцию I_0, наклон здания в данном случае вызывается не только горизонтальными силами, но и опрокидывающим моментом $\mathcal{L}$. Ясно, что при наличии такого опрокидывающего момента нужны меньшие горизонтальные силы для создания соответствующего деформированного состояния (количество возникшей энергии у нас остается постоянным, мы только ее перераспределяем).

Институт сейсмологии
и сейсмостойкого строительства
АН Таджикской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Дергачев А. А. Методы регуляризации некоррективных задач теории сейсмических нагрузок. Душанбе, изд. «Дониш», 1972.
2. Строительство в сейсмических районах. Нормы проектирования. СНиП II—А, 12—69. М., Госстройиздат, 1976.
3. Деркачев А. А., Негматуллаев С. Х. Динамические расчетные схемы зданий и их свободные колебания. Душанбе, изд. «Дониш», 1970.
4. Золотарев А. И. Решение задачи о собственных значениях и собственных векторах для регулярных динамических расчетных схем с учетом податливости основания и крутильной инерции здания. Деп. № 812—79.1979.