В. Г. ТИЩЕНКО, Ф. Х. ЮЛДАШЕВ

О ДИНАМИЧЕСКОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ РАСЧЕТНЫМИ СХЕМАМИ С ДИСКРЕТНЫМИ И СПЛОШНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

Расчетные схемы конструкций многоэтажных зданий, принимаемых в виде упруго связанных между собой дискретно распределенных масс, не подвергались обсуждению в отношении соответствия их динамических свойств натуре. Так как конструкции многоэтажных зданий представляют собой сплошные периодические системы, то здесь рассматривается соответствие между периодическими дискретными и сплошными структурами, что, как нам кажется, может оказаться полезным также и при изучении соответствия, которое связано с высокочастотными волновыми процессами в конструкциях, могущими вызывать напряженные состояния в них, связанные с отражениями волн, то есть связанные со стесненным прохождением волн внутри конструкций. Скорости волн и дисперсия—критерии соответствия.

Нельзя сказать, что такого рода напряженное состояние может обязательно иметь место во всех конструкциях и при всяких сейсмических воздействиях, и тем более нельзя считать, что сейсмостойкость (сейсмоустойчивость) зданий (сооружений) может определяться только напряженным состоянием их конструкций в упругой стадии работы. Тем не менее широкая информация о динамических свойствах конструкций нам представляется необходимой для рационального проектирования их при всяких видах динамических воздействий.

Само собой разумеется, что расчетная схема конструкций в виде сплошной однородной системы, в которой волны любой длины проходят беспрепятственно (без отражений внутри конструкций), не может воспроизвести некоторые важные натурные свойства, хотя основные периоды собственных колебаний многоэтажных зданий могут определяться и по такой схеме.

Рассмотрим распространение волн сдвига в одномерной сплошной периодической структуре, изображенной на рис. 1. Каждое звено структуры совершает поступательное горизонтальное перемещение в вертикальной плоскости.

Уравнения движения для различных участков структуры длиной h_1 и h_2:

на интервале $-h_1 \leqslant z \leqslant 0$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\sigma z^2}; \qquad (1)$$

на интервале $-0 \leqslant z \leqslant h_2$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}. \qquad (2)$$

Решения уравнений (1) и (2):

$$u_1=(Ae^{\chi_1 z}+Be^{-\chi_1 z})e^{i\omega t}, \tag{3}$$

$$u_2=(Ce^{\chi_2 z}+De^{-\chi_2 z})e^{i\omega t}. \tag{4}$$

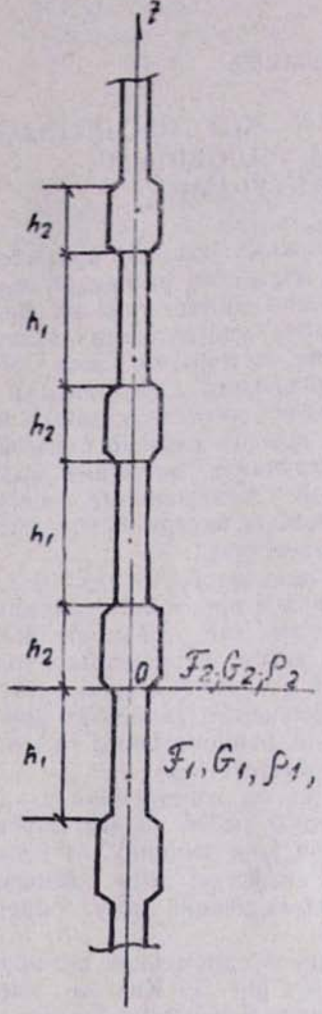

Рис. 1. Схема сплошной (непрерывной) периодической структуры

Скорости распространения сдвиговых волн

$$c_1=\sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}; \quad c_2=\sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}, \tag{5}$$

где G_1, G_2, ρ_1, ρ_2 — модули упругости при сдвиге и плотности участков структуры длиной h_1 и h_2 соответственно. A, B, C и D — произвольные постоянные.

Так как период структуры равен $h_1+h_2=d$, то общее решение может быть представлено в форме, предложенной Флоке [7]:

$$u=[A_1\xi_1(z)e^{\bar{\gamma} z}+A_2\xi_2(z)e^{-\bar{\gamma} z}]e^{i\omega t}, \tag{6}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, а $\xi_1(z)$ и $\xi_2(z)$ — периодические функции с периодом $d=h_1+h_2$; $\xi_1(z)=\xi_1(z\pm d)$; $\xi_2(z)=\xi_2(z\pm d)$ [2].

Выберем одну из экспонент, входящих в общее решение (6)

$$u(z,\ t)=A_1\xi_1(z)e^{\bar{\gamma} z}e^{i\omega t}. \tag{7}$$

Легко убедиться, что из (7) получается

$$u(z,\ t)=e^{\bar{\gamma} d}\cdot u[(z-d),\ t], \tag{8}$$

из-за периодичности функции $\xi_1(z)$, период которой равен d.

Из (8) следует, что на интервале $h_2<z<h_1+h_2=d$, длина которого равна h_1, решение может быть записано в виде:

$$u(z,\ t)=e^{\bar{\gamma} d}(Ae^{\chi_1(z-d)}+Be^{-\chi_1(z-d)})e^{i\omega t}. \tag{9}$$

Действительно, если принять в (9) $z-d=\nu$, то при $z<d$, что соответствует неравенству $h_2<z<h_1+h_2=d$, ν будет отрицательной величиной и выражение в скобках (9) должно относиться к решению (3) на интервале $-h<z<0$.

Теперь для определения коэффициентов A, B, C и D, входящих в уравнение (3), (4), необходимо с помощью уравнения (9), являющегося для них связывающим звеном в периодической структуре, выполнить условия сопряжения двух функций u_1 и u_2 на стыке участков длиной h_1 и h_2. Условия сопряжения на стыке сводятся в данном случае к тому, что перемещения u_1 и u_2 должны быть равны. Силы сдвига также должны быть равны. Это соответствует условиям непрерывности функции.

При $z=0$ из (3) и (4) имеем:

$$u_1(0, t)=u_2(0, t);$$

$$G_1F_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)_{z=0}=G_2F_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)_{z=0},$$

где F_1 и F_2 — площади поперечных сечений участков структуры длиной h_1 и h_2 соответственно.

Из указанных условий получим

$$\left.\begin{aligned} &A+B=C+D \\ &G_1F_1\chi_1(A-B)\; G_2F_2\chi_2(C-D)\end{aligned}\right\}. \qquad (10,\text{а})$$

При $z=h_2$ из (4) и (9) имеем:

$$\begin{aligned} &u_1(h_2t)=u_2(h_2t) \\ &G_1F_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)_{z=h_2}=G_2F_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)_{z=h_2}\end{aligned} \text{ или } \begin{cases} e^{\bar{\gamma}d}(Ae^{-\chi_1h_1}+Be^{+\chi_1h_1})=Ce^{\chi_2h_2}+De^{-\chi_2h_2}; \\ G_1F_1\chi_1e^{\bar{\gamma}d}(Ae^{-\chi_1h_1}-Be^{\chi_1h_1})=G_2F_2\chi_2(Ce^{\chi_2h_2}- \\ -De^{-\chi_2h_2}); \end{cases} \qquad (10,\text{б})$$

(10,а) и (10,б) представляют линейную однородную систему уравнений относительно постоянных A, B, C и D; условием совместности этих уравнений служит равенство нулю определителя Δ системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & -a_1 & a_2 & -a_2 \\ ye^{-\alpha_1} & ye^{\alpha_1} & e^{\alpha_2} & e^{-\alpha_2} \\ ye^{-\alpha_1}a_1 & -ye^{\alpha_1}a_1 & e^{\alpha_2}a_2 & -e^{\alpha_2}a_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (11)$$

здесь приняты следующие обозначения:

$$G_1F_1\chi_1=a_1;\ G_2F_2\chi_2=a_2;\ \chi_1h_1=\alpha_1,\ \chi_2h_2=\alpha_2;\quad e^{\bar{\gamma}d}=y. \qquad (12)$$

После раскрытия определителя (11) и соответствующих преобразований получим квадратное уравнение относительно y

$$y^2-2y\left[ch\alpha_1ch\alpha_2+\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)sh\alpha_1sh\alpha_2\right]+1=0. \qquad (13)$$

Прежде всего обратим внимание на то, что входящие в уравнение (13) величины (12) a_1, a_2, α_1 и α_2 должны иметь мнимые значения, так как волновые решения (1) и (2) требуют, чтобы в (3) и (4) χ_1 и χ_2 были мнимыми.

Обозначим [см. (12)]

$$\left.\begin{aligned} &\chi_1=i\mu_1; && \chi_2=i\mu_2 \\ &\alpha_1=i\mu_1h_1; && \alpha_2=i\mu_2h_2 \\ &a_1=i\mu_1G_1F_1; && a_2=i\mu_2G_2F_2 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$y^2-2y\left[\cos\mu_1h_1\cos\mu_2h_2-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1G_1F_1}{\mu_2G_2F_2}+\frac{\mu_2G_2F_2}{\mu_1G_1F_1}\right)\sin\mu_1h_1\sin\mu_2h_2\right]+1=0. \qquad (15)$$

Так как μ_1 и μ_2 по смыслу решений (3) и (4) и обозначений (14) являются волновыми числами, то они могут быть представлены в виде

$$\mu_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\omega}{c_1}; \quad \mu_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\omega}{c_2}, \tag{16}$$

где λ_1 — длина волны, соответствующая участку структуры длиной h_1 и частоте ω;

λ_2 — длина волны, соответствующая участку структуры длиной h_2 и той же частоте ω;

c_1 и c_2 — фазовые скорости распространения сдвиговых волн на участках структуры длиной h_1 и h_2 соответственно [5].

На основании (5) и (16) величины $\mu_1 G_1 F_1$ и $\mu_2 G_2 F_2$, входящие в уравнение (15), приобретут вид:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 G_1 F_1 = \rho_1 c_1 F_1 \omega \\ \mu_2 G_2 F_2 = \rho_2 c_2 F_2 \omega \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Введем обозначение

$$\frac{\rho_2 c_2 F_2}{\rho_1 c_1 F_1} = p \tag{18}$$

и поставим в (15)

$$y^2 - 2y\left[\cos\mu_1 h_1 \cos\mu_2 h_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + p\right)\sin\mu_1 h_1 \sin\mu_2 h_2\right] + 1 = 0. \tag{15,a}$$

Напомним, что мы приняли $y = e^{\bar{\mu} d}$ (12), следовательно, по (15) и (15,а) должны быть два решения

$$y_1 = e^{\bar{\mu} d} \text{ и } y_2 e^{-\bar{\mu} d}, \tag{19}$$

на основании которых можно написать

$$y_1 y_2 = 1$$

$$y_1 + y_2 = e^{\bar{\mu} d} + e^{-\bar{\mu} d} = 2ch\bar{\mu} d = 2\left[\cos\mu_1 h_1 \cos\mu_2 h_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + p\right)\sin\mu_1 h_1 \sin\mu_2 h_2\right]. \tag{20}$$

Так как общее решение (7) мы ищем как незатухающее волновое решение, то необходимо принять $\bar{\mu} = i\mu$, тогда уравнение (20), представляющее дисперсионное уравнение, получит окончательный вид [1, 2]:

$$\cos\mu d = \cos\mu_1 h_2 \cos\mu_2 h_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + p\right)\sin\mu_1 h_1 \sin\mu_2 h_2. \tag{21}$$

Легко показать, что в случае сплошной однородной структуры, в которой $G_1 = G_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $F_1 = F_2$, $c_1 = c_2$, т. е. когда $\mu_1 = \mu_2$, $p = 1$, дисперсионное уравнение (21) приобретает вид $\cos\mu d = \cos\mu_1(h_1 + h_2) = \cos\mu_1 d$, из которого получается $\mu = \mu_1$; это соответствует решению уравнений (1) и (2) на всех интервалах для неизменной структуры, торая, как и всякая постоянная величина, представляет периоди-ческую систему с произвольным периодом.

Теперь рассмотрим видоизменение уравнения (21) для другого айнего случая, а именно, для случая дискретной периодической груктуры.

Покажем, что дисперсионное уравнение, соответствующее ему, лучается из (21) путем предельного перехода [4].

Принимаем

$$\rho_1\to 0,\quad G_2\to\infty, \tag{22}$$

есть полагаем, что масса участка периодической структуры длиной стремится к нулю $\rho_1F_1h_1\to 0$, а участок структуры длиной h_2 ремится к абсолютно твердому телу. При этом необходимо соблю-ать условие

$$m=\rho_1F_1h_1+\rho_2F_2h_2=\text{const}, \tag{23}$$

которого видно, что при $\rho_1\to 0$ величина $\rho_2h_2F_2$ должна стремиться той же константе.

Из требования (22) следует:

$$\left.\begin{aligned} &c_1=\sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}\to\infty;\quad c_2=\sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}\to\infty;\quad \rho_1c_1F_1=\sqrt{\rho_1G_1}F_1\to 0\\ &\rho_2c_2F_2=\sqrt{\rho_2G_2}F_2\to\infty;\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+p\right)\to\frac{1}{2}\frac{\rho_2c_2F_2}{\rho_1c_1F_1}\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Напишем (21) в таком виде

$$-\cos\mu d=2\sin^2\frac{\mu d}{2}=1-\cos\mu_1h_1\cos\mu_2h_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+p\right)\sin\mu_1h_1\sin\mu_2h_2. \tag{21,а}$$

з (21,а) при требованиях (24) получим

$$1-\cos\mu_1h_1\cos\mu_2h_2=1-\cos\frac{\omega}{c_1}h_1\cos\frac{\omega}{c_2}h_2\to 0 \text{ при } c_1\to\infty,\ c_2\to\infty$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+p\right)\sin\mu_1h_1\sin\mu_2h_2\approx\frac{1}{2}\frac{\rho_2c_2F_2}{\rho_1c_1F_1}\mu_1\mu_2h_1h_2=\frac{1}{2}\frac{\rho_2c_2F_2}{\rho_1c_1F_1}\frac{\omega^2}{c_1c_2}h_1h_2=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\rho_2F_2h_2}{G_1F_1/h_1}\omega^2,$$

обозначим: $\rho_2F_2h_2=m$ — масса всего звена периодической структуры, распределенная на участке длиной h_2, $\frac{G_1F_1}{h_1}=k$ — коэффициент го-ризонтальной жесткости звена периодической структуры длиной h_1. еперь (21, а) можно записать в виде

$$2\sin^2\frac{\mu d}{2}=\frac{1}{2}\frac{m}{k}\omega^2. \tag{25}$$

Принимая в (25) $h_2\ll h_1$; $d=h_1+h_2\approx h_1$; $\mu=\frac{2\pi}{\lambda}$, получим форму-, выражающую зависимость частоты ω от длины волны в периоди-ческой структуре с дискретным распределением масс [5].

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\pi h_1}{\lambda}. \qquad (26)$$

Формула (26) для периодической структуры с дискретными массами ограничивает высшую частоту бегущих в них свободно, без затухания волн, величиной $2\sqrt{\frac{k}{m}}$, то есть такая структура является фильтром низких частот [2].

Если частота распространяющихся волн больше предельной величины $2\sqrt{\frac{k}{m}}$, то в формуле (26) волновое число $\frac{1}{\lambda}$ должно быть представлено в виде комплексной величины $\frac{1}{\lambda} = \alpha - i\beta$. Подставляя в (26), получим:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\pi h_1(\alpha - i\beta) = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,[\sin\pi h_1\alpha\,\mathrm{ch}\,\pi h_1\beta - i\cos\pi h_1\alpha\,\mathrm{sh}\,\pi h_1\beta].$$

Но так как ω—вещественная величина, то должно быть $\cos\pi h_1 d = 0$, откуда $\alpha = \pm\frac{1}{2h_1}$. Действительная часть волнового числа при всякой частоте больше предельной должна остаться постоянной, соответствующей минимальной длине волны, равной двойному периоду структуры $2h_1$, что соответствует природе структуры, в которую более короткие волны вписаться не могут (при длине волны $2h_1$ каждая последующая дискретная масса находится в противоположной фазе). Так как волны более высокой частоты не могут иметь длину менее $2h_1$, то их движение будет стесненным—они будут с расстоянием затухать из-за отражений. Их затухание зависит от $i\beta$ комплексного волнового числа. Вместо (26) теперь будет

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{ch}\,\pi h_1\beta. \qquad (26,a)$$

Из формулы (26,а) видно, что чем больше частота волн ω, тем больше так называемая постоянная затухания β. Волновое решение в этом случае может быть представлено в таком виде [5]:

$$u_z = Be^{i(\omega t - \mu z h_1)},$$

в которое нужно подставить

$$\mu = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi(\alpha - i\beta),$$

$$u_z = Be^{i[\omega t - 2\pi(\alpha - i\beta)h_1 z]} = Be^{-2\pi\beta z h_1}e^{i(\omega t - 2\pi\alpha h_1 z)};\; z = 1,\, 2, \ldots, n;\; \left(\alpha = \frac{1}{2h_1}\right).$$

Очевидно,

$$u_{z+1} = -e^{-2\pi\beta h_1}u_z,$$

откуда видно, что высокочастотная волна в дискретной структуре убывает по экспоненциальному закону и тем интенсивнее, чем выше частота волны ω и, следовательно, чем больше постоянная затухания β. При этом амплитуда при передаче перемещений к следующей массе убывая в $e^{2\beta h_1}$ раз, меняет знак. Убывание амплитуд коротких волн объясняется, как мы отметили выше, отражением их, благодаря чему происходит концентрация усилий в конструкциях, связывающих дискретные массы.

Фазовая скорость распространения волн в такой структуре с дискретными массами равна [2,5].

$$C_ф = h_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\sin \frac{\mu h_1}{2}}{\frac{\mu h_1}{2}}. \tag{27}$$

Наибольшая скорость по (27) $C_ф^{max}$ соответствует длинным волнам $\lambda \gg h_1$, то есть когда $\mu = \frac{2\pi}{\lambda} \to 0$,

$$C_{ф\max} = h_1 \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{27,а}$$

Наименьшая скорость $C_{ф\min}$ по (27) соответствует высшей предельной частоте по (26), $\omega_{max} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$, при которой волны, длины которых в этом случае равны $2h_1$, являются предельно короткими для этой структуры в том смысле, что они, вписываясь в структуру, еще могут распространяться без убывания амплитуд (или без структурного затухания) [5]. Подставляя в (27) $\mu h_1 = \pi$ $(\lambda = 2h_1)$, найдем

$$C_{ф\min} \frac{2}{\pi} h_1 \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{27,б}$$

Следовательно, формула (27) характеризует нормальную дисперсию периодической структуры с дискретными массами, так как большая величина скорости $C_ф$ соответствует более длинным волнам.

Обратимся снова к формуле (21) и преобразуем ее применительно к длинным волнам $\lambda \gg h_1 + h_2 = d$. В таком случае синусы можно заменить их аргументами, а в разложениях косинусов в ряды ограничиться квадратичными членами и вместо (21) получить

$$\mu^2 d^2 = \mu_1^2 h_1^2 + \mu_2^2 h_2^2 + \left(\frac{1}{p} + p\right) \mu_1 \mu_2 h_1 h_2, \tag{28}$$

Принимая во внимание (16) и (18) и полагая $\mu = \frac{\omega}{c}$, перепишем (28)

$$\frac{d^2}{c^2} = \frac{h_1^2}{c_1^2} + \frac{h_2^2}{c_2^2} + \left(\frac{\rho_1 c_1 F_1}{\rho_2 c_2 F_2} + \frac{\rho_2 c_2 F_2}{\rho_1 c_1 F_1}\right) \frac{h_1 h_2}{c_1 c_2}. \tag{28,а}$$

Из (28,а) следует

$$\frac{d^2}{c^2} = \left(\frac{\rho_1 h_1^2 F_1}{\rho_1 c_1^2 F_1} + \frac{\rho_2 F_2 h_1 h_2}{\rho_1 c_1^2 F_1}\right) + \left(\frac{\rho_2 h_2^2 F_2}{\rho_2 c_2^2 F_2} + \frac{\rho_1 F_1 h_1 h_2}{\rho_2 c_2^2 F_2}\right) = \tag{28,б}$$

$$= \frac{h_1}{\rho_1 c_1^2 F_1}(\rho_1 h_1 F_1 + \rho_2 h_2 F_2) + \frac{h_2}{\rho_2 c_2^2 F_2}(\rho_2 h_2 F_2 + \rho_1 h_1 F_1) =$$

$$= (\rho_1 h_1 F_1 + \rho_2 h_2 F_2)\left(\frac{h_1}{\rho_1 c_1^2 F_1} + \frac{h_2}{\rho_2 c_2^2 F_2}\right). \tag{28,б}$$

Принимая $c_1^2 = \frac{G_1}{\rho_1}$; $c_2^2 = \frac{G_2}{\rho_2}$ и вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} k_1 = \frac{G_1 F_1}{h_1};\ k_2 = \frac{G_2 F_2}{h_2} \\ \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 F_2 = m \end{aligned}\right\} \tag{28,в}$$

найдем скорость распространения длинных волн C из (28, б) и назовем ее $C_{дл.}$ [3, 4, 1].

$$C_{дл.}^2 = \frac{(h_1 + h_2)^2}{(\rho_1 h_1 F_1 + \rho_2 h_2 F_2)\left(\frac{h_1}{G_1 F_1} + \frac{h_2}{G_2 F_2}\right)}, \tag{29}$$

или

$$C_{дл.}^2 = (h_1 + h_2)^2 \frac{1}{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}. \tag{29,а}$$

Сравнивая (29,а) с (27,а), можно видеть, что $C_{\phi max} > C_{дл.}$, т. е. что скорость распространения длинных волн в периодической структуре с дискретным распределением масс больше, чем в периодической структуре с непрерывно распределенной массой. Это следует из того, что формула (27,а) получается из (29,а), если в последней положить $k_2 = \frac{G_2 F_2}{h_2} \to \infty$ и учесть (22) и (23), приняв $h_2 \ll h_1$. Если в (29) положить $h_2 = 0$, то получим $C_{дл}^2 = h_1^2 \frac{G_1 F_1}{h_1} \cdot \frac{1}{\rho_1 h_1 F_1} = \frac{G_1}{\rho_1}$ — квадрат скорости распространения длинных волн сдвига в сплошной однородной структуре (стержне), которая, однако, оказывается меньше, чем в структуре с твердыми включениями длиной $h_2 (G_2 \to \infty,\ h_2 \neq 0)$. Например, при $h_1 = h_2$, $F_1 = F_2$, $\rho_1 = \rho_2$; $G \to \infty$ из (29) следует $C_{дл.}^2 = 2\frac{G_1}{\rho_1}$, вместе $C_{дл.}^2 = \frac{G_1}{\rho_1}$ при $G_1 = G_2$, $h_1 = h_2$, $F_1 = F_2$, $\rho_1 = \rho_2$. В этом последнем случае высота h_1 может быть равной h_2.

Обратим внимание также на скорость распространения длинных волн в сплошной периодической структуре из однородного материала, $G_1 = G_2$, $\rho_1 = \rho_2$, как следует из (29), вообще может изменяться только в зависимости от соотношения площадей поперечных сечений F_1 и F_2, а именно:

$$C_{дл.}^2 = \frac{(h_1 + h_2)^2}{\frac{\rho_1}{G_1}(F_1 h_1 + F_2 h_2)\left(\frac{h_1}{F_1} + \frac{h_2}{F_2}\right)} = c_1^2 \cdot \frac{(h_1 + h_2)^2 F_1 F_2}{(F_1 h_1 + F_2 h_2)(F_1 h_2 + F_2 h_1)}. \tag{29,б}$$

Если в (29, б) принять $F_1=F_2$, то $C^2_{\text{дл.}}=c_1^2$, как и следовало ожидать.

В частном случае, как мы видели раньше, при $h_2\to 0$, $C^2_{\text{дл.}}=c_1^2$. В другом частном случае $h_1=h_2$ из (29, б) получим

$$C^2_{\text{дл.}}=c_1^2\frac{4F_1F_2}{(F_1+F_2)^2}\leqslant c_1^2. \tag{29,в}$$

Таким образом, показана очевидная зависимость скорости распространения длинных волн от геометрии сплошной структуры. Как видно из (29,в), «геометрическая неоднородность» сплошной структуры служит тормозящим фактором для распространения длинных волн сдвига, уменьшая их скорость.

Для оценки особенностей распространения коротких волн $\lambda\leqslant 2(h_1+h_2)=2d$, в сплошной периодической структуре приведем уравнение (21) к другому виду, учитывая (18) и принимая $\mu_1=\dfrac{\omega}{c_1}$, $\mu_2=\dfrac{\omega}{c_2}$;

$$\cos\mu d=\cos\omega\left(\frac{h_1}{c_1}+\frac{h_2}{c_2}\right)-\frac{(\rho_2c_2F_2-\rho_1c_1F_1)^2}{2\rho_1\rho_2c_1c_2F_1F_2}\sin\omega\frac{h_1}{c_1}\sin\omega\frac{h_2}{c_2}. \tag{30}$$

Правая часть (30), зависящая от физических и геометрических характеристик структуры (конструкций) и частоты, может иметь положительные и отрицательные величины, а абсолютные значения могут быть больше и меньше единицы. Поэтому имеет смысл рассмотреть три случая:

а) $\cos\mu d\geqslant 1$, $\mu=2\pi i\beta$; $\cos\mu d=ch2\pi\beta d$;

б) $\cos\mu d\leqslant -1$, $\mu=2\pi i\beta+\pi$; $\cos\mu d=-ch2\pi\beta d$;

в) $-1\leqslant\cos\mu d\leqslant 1$, μ-действительно, $\bar{\mu}=\pm i\mu$.

В случаях а) и б) решение (7) представляет экспоненциально затухающие волны. Решение (7) остается волновым, так как $\varepsilon_1(z)$ — периодическая функция с периодом структуры $d=h_1+h_2$. В случае в) волны распространяются без затухания.

Если в (3_0) примем $\rho_1c_1F_1=\rho_2c_2E_2$ или $\dfrac{\rho_1c_1}{\rho_2c_2}=\dfrac{F_2}{F_1}$ (волновые сопротивления обратно пропорциональны площадям поперечных сечений), то получим $\cos\mu d=\cos\dfrac{\omega}{c}d=\cos\omega\left(\dfrac{h_1}{c_1}+\dfrac{h_2}{c_2}\right)$ или $\dfrac{d}{c}=\dfrac{h_1}{c_1}+\dfrac{h_2}{c_2}$ откуда получим скорость $C=\dfrac{d}{\dfrac{h_1}{c_1}+\dfrac{h_2}{c_2}}=C_{\text{ср}}$, которая в этом случае равна средней скорости, получаемой по формуле „геометрической сейсмики". Можно видеть, что в этом случае скорость длинных волн C по формуле (29) также равна $C_{\text{дл.}}=\dfrac{d}{\dfrac{h_1}{c_1}+\dfrac{h_2}{c_3}}=C_{\text{ср}}$. Во всех остальных случаях $\rho_1c_1F_1\neq\rho_2c_2F_2$ можно показать, что $C_{ср}>C_{дл}$. Для этого поступим подобно тому, как это сделано в [4], а именно, покажем

$$\left(\frac{C_{ср.}}{C_{дл.}}\right)^2-1=\frac{(\rho_1F_1h_1+\rho_2F_2h_2)\left(\frac{h_1}{c_1F_1}+\frac{h_2}{c_2F_2}\right)}{\left(\frac{h_1}{c_1}+\frac{h_2}{c_2}\right)}-1=$$

$$=\frac{h_1h_1\frac{\rho_2F_2}{\rho_1F_1}}{\left(\frac{h_1}{c_1}+\frac{h_2}{c_2}\right)^2}\left(\frac{1}{c_1}-\frac{\rho_1F_1}{\rho_2F_2}\frac{1}{c_2}\right)^2>0.$$

Выводы

1. Сравнивая скорости распространения низкочастотных волн, $\lambda\geqslant(2h_1+h_2)=2d$, в дискретной и сплошной периодических структурах можно видеть, как мы уже и отметили, что в сплошной структуре, соответствующей натурной конструкции, скорость распространения длинных волн меньше, чем получается из расчета по дискретной схеме.

2. В отношении высокочастотных волн $\omega\geqslant2\sqrt{\frac{k}{m}}$ в дискретной и сплошной периодических структурах можно сказать, что их распространение в обеих структурах сопровождается отражениями, причем в дискретной периодической структуре длины волн ограничиваются двойным периодом структуры; такие структуры обладают дисперсионными и фильтрационными свойствами.

3. Определение скоростей распространения высокочастотных волн по формуле «геометрической сейсмики» допустимо только в таком частном случае, когда волновые сопротивления и площади поперечных сечений звена сплошной структуры находятся в определенном отношении: волновые сопротивления обратно пропорциональны площадям поперечных сечений, т. е. когда отсутствуют отражения, так как $\rho_1c_1F_1=\rho_2c_2F_2$.

4. Мы здесь обращаем внимание на скорости распространения волн в конструкциях потому, что они являются теми физическими величинами, которыми определяются как волновые сопротивления конструкций, так и их периоды собственных колебаний. Так, например, скорость распространения волн в каркасных рамных конструкциях, равная 100—200 *м/сек*, определяет, во-первых, их низкие собственные частоты, во-вторых, позволяет при расчете собственных колебаний зданий из таких конструкций не учитывать податливость грунтов (такого типа, как лёссовые). В конструкциях монолитных и крупнопанельных зданий скорость распространения упругих волн значительно превосходит скорости волн в каркасных (рамных) конструкциях и равна 600—900 *м/сек* (по экспериментам), благодаря чему периоды собственных колебаний таких конструкций оказываются очень короткими и периоды зданий (сооружений) из этих конструкций определяются главным образом податливостью основания.

5. Если принять самый короткий период в спектре сейсмических волн 0,05 *сек*, то в конструкциях крупнопанельных зданий минимальная длина волн будет порядка 35 *м*, т. е. может рассматриваться как длинная в конструкции. В каркасных же конструкциях минимальная

длина волны может быть порядка 5 *м*, которая может рассматриваться как короткая.

6. Формула (29) для скоростей распространения длинных волн в здании существенно отличается от формулы для скоростей распространения длинных волн в плоскопараллельных бесконечных слоях [1, 4], так как в последней не учитываются площади поперечных сечений.

7. Если существует равенство $\rho_1 c_1 F_1 = \rho_2 c_2 F_2$, то это значит, что коэффициент отражения в звене непрерывной периодической структуры равен нулю, $\frac{\rho_1 c_1 F_1 - \rho_2 c_2 F_2}{\rho_1 c_1 F_1 + \rho_2 c_2 F_2} = O$, а это равносильно отсутствию дисперсии и препятствий для прохождения волн любой длины. Системам же с дискретным распределением масс дисперсия и отражения волн свойственны всегда.

8. Аналогичное исследование может быть проведено и для вращательных колебаний, так как исходные уравнения (1) и (2) будут иметь такой же вид. Не представляет принципиальных трудностей рассмотрение соответствий взаимосвязанных поступательных и вращательных колебаний в дискретных и сплошных системах [6]. Очевидно, в случаях взаимосвязанных колебаний число характерных скоростей распространения волн в конструкциях будет соответствовать числу степеней свободы звена периодической структуры.

Ордена Ленина Институт
физики Земли АН СССР,
Таджикский институт сейсмостойкого строительства и
сейсмологии

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховский Л. М. Волны в слоистых средах. Изд. АН СССР, М., 1957.
2. Бриллюэм Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., изд. ИЛ, 1959.
3. Медведева Е. С. О скорости распространения упругих волн в зданиях. Инженерная сейсмология № 3—4, изд. «Дониш», Душанбе, 1966.
4. Ризниченко Ю. В. О распространении сейсмических волн в дискретных и гетерогенных средах. Изд. АН СССР, серия географ. и геофиз., т. XIII, № 2, 1949.
5. Тищенко В. Г., Абдурашидов К. С., Шаалимов А. А. О динамических характеристиках многоэтажных зданий при симметричных колебаниях. Инженерное описание сейсмических колебаний. Сб. «Вопросы инженерной сейсмологии», вып. 16, изд. «Наука», 1974.
6. Тищенко В. Г., Шаалимов А. А. Взаимосвязь поступательных и вращательных колебаний высоких зданий, имеющих периодическую структуру. Сб. «Вопросы инженерной сейсмологии», вып. 16, изд. «Наука», 1974.
7. Floquet G. Ann E'cde Norm, 12, 47, 1883.