

З. Г. ТЕР-МАТИРОСЯН, Р. Г. МАНВЕЛЯН

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГОРНЫХ МАССИВОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ МЕСТНОЙ НАГРУЗКИ И ОБЪЕМНЫХ СИЛ

При оценке кратковременной и длительной устойчивости массивов горных пород, которые служат основанием или средой для самых различных сооружений, первостепенное значение имеет напряженное состояние, которое формируется как под воздействием природных факторов (гравитационные и сейсмические силы), так и инженерной деятельности (возведение сооружений, выемка, пригрузка и пр.).

Имеется ряд работ [1,3], в которых дается решение вышеуказанной задачи при действии только гравитационных сил, представляющий определенный интерес для инженерного прогнозирования.

В настоящей статье дается общая постановка и решение краевой задачи плоской теории упругости для полубесконечных областей с криволинейной границей при одновременном воздействии поверхностных, гравитационных и сейсмических сил. Причем, сейсмическое воздействие на горный массив учитывается с помощью равномерно распределенного по всему массиву сейсмического ускорения, т. е. задача сводится к квазистатической.

Кроме того, предполагается, что поверхностные касательные напряжения возникают вследствие сейсмического воздействия. Причем интенсивность этих напряжений пропорциональна нормальным напряжениям на границе (весу сооружения). Вместе с тем приведенное ниже решение краевой задачи с учетом только поверхностных сил может представлять самостоятельный интерес для инженерной практики [4].

Использование принципа квазистатической задачи к учету сейсмических сил значительно упрощает задачу и дает результаты с достаточной для практических целей точностью при оценке местной и общей устойчивости горных массивов.

Массив горных пород будем рассматривать как сплошную, линейно-деформируемую, однородную, изотропную полубесконечную область S , приближающуюся на бесконечности к полуплоскости. Граница области L описывает профиль горного массива (рис. 1). В каждой точке области действуют массовые силы гравитации $\gamma = \rho \cdot g$ и сейсмические силы $k_c \cdot \gamma = \rho \cdot a$,

где: γ — объемный вес пород, составляющих массив;
 ρ — плотность пород;
 g — ускорение свободного падения тела;
 k_c — коэффициент сейсмичности;
 a — ускорение сейсмической волны.

Рассматривается плоская деформация. Допущение о плоской деформации предполагает протяженность массива горных пород и неизменность его профиля от сечения к сечению.

Предполагается также, что на границе действуют нормальные и касательные распределенные нагрузки N и T .

Форма границы рассматриваемой области произвольная, однако предполагается, что известно конформное отображение нижней полуплоскости на область, осуществляемое рациональной функцией. Для решения задачи в такой постановке был применен метод комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили. Известно, что компоненты напряжений связаны с искомыми комплексными потенциалами, $\Phi(z)$ и $\psi(z)$ выражениями [2]:

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (1)$$

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} = \frac{2}{\omega'(z)} \left[\overline{\omega(z)} \cdot \Phi'(z) + \omega'(z) \cdot \psi(z) \right], \quad (2)$$

где: $\omega(z)$ — рациональная функция, осуществляющая конформное отображение нижней полуплоскости $\zeta = \xi + i\eta$ на исследуемую область плоскости $z = x + iy$ (рис. 1);

σ_{ξ} , σ_{η} , $\tau_{\xi\eta}$ — компоненты напряжений в криволинейных координатах ξ , η . При этом имеют место соотношения:

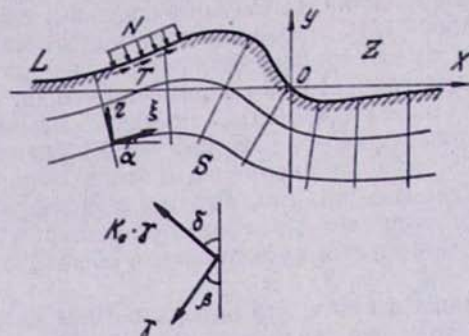


Рис. 1. Расчетная схема

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_y + \sigma_x,$$

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \cdot e^{2i\alpha}, \quad (3)$$

где α — угол между осью ξ и осью Ox ,

$$e^{2i\alpha} = \frac{\omega'(z)}{\omega'(t)}. \quad (4)$$

Складывая (1) и (2) и заменяя z на t — точки действительной оси на плоскости ζ , получаем выражения для граничных условий:

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{1}{\omega'(t)} \left[\overline{\omega(t)} \cdot \Phi'(t) + \omega'(t) \cdot \psi(t) \right] = N^0 + iT^0, \quad (5)$$

где N^0 и T^0 — являются граничными значениями нормальной и касательной компонент напряжений σ_{η} и $\tau_{\xi\eta}$. В случае наличия объемных сил N^0 и T^0 не совпадают с задаваемыми величинами внешней нагрузки N и T , действующими на границе. Для нахождения N^0 и T^0 частные решения, учитывающие массовые силы, представим следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma'_x = K \cdot \gamma(\cos\beta - K_c \cdot \cos\delta) \cdot y \\ \sigma'_y = \gamma(\cos\beta - K_c \cdot \cos\delta) \cdot y \\ \tau'_{xy} = \gamma(\sin\beta + K_c \cdot \sin\delta) \cdot y \end{cases} \quad (6)$$

Выражения (6) являются решениями для бесконечной наклонной полуплоскости в поле гравитационных и сейсмических сил. Такой выбор частных решений обосновывается тем, что по мере удаления от границы, влияние его криволинейности, а также внешних сил, которые считаются конечными, стремится к нулю. В выражении (6) $K = \mu/(1-\mu)$ является коэффициентом бокового давления, μ — коэффициент Пуассона.

Воспользовавшись известными выражениями для нормальных и касательных усилий [2]:

$$\begin{cases} N = \frac{\sigma_x^0 + \sigma_y^0}{2} - \frac{\sigma_x^0 - \sigma_y^0}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau_{xy}^0 \cdot \sin 2\alpha, \\ T = -\frac{\sigma_x^0 - \sigma_y^0}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy}^0 \cdot \cos 2\alpha, \end{cases} \quad (7)$$

где $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ — общие решения для напряжений, находим:

$$\begin{cases} N^0 = N - \frac{\sigma_x^r + \sigma_y^r}{2} + \frac{\sigma_x^r - \sigma_y^r}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy}^r \cdot \sin 2\alpha, \\ T^0 = T + \frac{\sigma_x^r - \sigma_y^r}{2} \cdot \sin 2\alpha - \tau_{xy}^r \cdot \cos 2\alpha. \end{cases} \quad (8)$$

Используя известные формулы Эйлера [2] и выражая граничные условия как функцию точек действительной оси $\eta = 0$ плоскости ζ , которые обозначим через t , с учетом (4), получим:

$$N^0 + iT^0 = N + iT - \frac{\sigma_x^r + \sigma_y^r}{2} + \left(\frac{\sigma_x^r - \sigma_y^r}{2} - \tau_{xy}^r \cdot i \right) \cdot \frac{\omega'(t)}{\omega'(t)}. \quad (9)$$

Выражением (9) представлены граничные условия для задачи о распределении дополнительных напряжений в невесомой полуплоскости с криволинейной границей.

Рассмотрим конкретный пример решения задачи. В качестве отображающей функции примем:

$$Z = \omega(\zeta) = c \left[\zeta - \frac{B\zeta - b}{\zeta + a - i} \right], \quad (10)$$

где B, b, a — постоянные величины;

$c > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Параметрические уравнения, описывающие границы исследуемых областей, получим при $\xi = t, \eta = 0$, путем разделения в формуле (10) вещественной и мнимой частей:

$$\begin{aligned} x &= c \left[t - \frac{(Bt - b)(t + a)}{(t + a)^2 + 1} \right], \\ y &= -c \cdot \frac{Bt - b}{(t + a)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Варьирование параметрами B, a, b позволяет исследовать напряженное состояние горных массивов с различными криволинейными границами: симметричные вырезы ($b < 0, B = a = 0$), симметричные выступы ($b > 0, B = a = 0$), несимметричные вырезы ($B < 0, a > 0, b = 0$), несимметричные выступы ($B > 0, a > 0, b = 0$), склоны ($B > 0, a = 0, b = 0$).

Учитывая, что $y = [\omega(t) - \overline{\omega(t)}]/2i$, и используя (6) и (10) из уравнения (9), получим выражение для внешних усилий:

$$N^0 + iT^0 = N + iT + \frac{c(Bt - b)}{2} \left\{ \frac{K_x + K_y}{(t + a + i)(t + a - i)} - \frac{(K_x - K_y - 2K_{xy} \cdot i)(t + a + i)[(t + a - i)^2 - Ba - b + Bi]}{(t + a - i)^2[(t + a - i)^2 - Ba - b - Bi]} \right\}, \quad (12)$$

где: $K_x = K \cdot \gamma \cdot (\cos \beta - K_c \cdot \cos \delta)$, $K_y = \gamma \cdot (\cos \beta - K_c \cdot \cos \delta)$,
 $K_{xy} = \gamma \cdot (\sin \beta + K_c \cdot \sin \delta) \cdot y.$ (13)

Учитывая (10), для граничного условия, сопряженного (5), будем иметь:

$$N^0 - iT^0 = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{(t + a - i)^2[t(t + a - i) - Bt + b]}{(t + a - i)[(t + a - i)^2 - Ba - b + Bi]} \cdot \Phi'(t) + \\ + \frac{(t + a - i)^2[(t + a + i)^2 - Ba - b - Bi]}{(t + a + i)^2[(t + a - i)^2 - Ba - b + Bi]} \cdot \overline{\psi(t)}. \quad (14)$$

Умножая выражение (14) на $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{(t + a - i)^2 - b - Ba + Bi}{(t + a - i)^2 \cdot (t - \zeta)}$, а выражение, сопряженное (14), на $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{(t + a + i)^2 - Ba - b - Bi}{(t + a + i)^2 \cdot (t - \zeta)}$, интегрируя далее от $-\infty$ до $+\infty$ и используя свойства интегралов типа Коши [2], получим:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{Ba + b - Bi - (\zeta + a - i)^2} [(\zeta + a - i)^2 \cdot J_1(\zeta) - (Ba + b - Bi) \cdot \overline{\Phi(-a - i)}], \quad (15)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{(\zeta + a - i)^2}{Ba + b - Bi - (\zeta + a - i)^2} \left\{ J_2(\zeta) + \Phi(\zeta) - \frac{Ba + b + Bi}{(\zeta + a + i)^2} [\Phi(\zeta) - \Phi(-a - i)] + \right. \\ \left. + \left[\zeta - \frac{B\zeta - b}{\zeta + a + i} \right] \cdot \Phi(\zeta) \right\}, \quad (16)$$

где

$$J_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(t + a - i)^2 - Ba - b + Bi]}{(t + a - i)^2 \cdot (t - \zeta)} (N^0 - iT^0) \cdot dt, \quad (17)$$

$$J_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(t + a + i)^2 - Ba - b - Bi]}{(t + a + i)^2 \cdot (t - \zeta)} (N^0 + iT^0) \cdot dt, \quad (18)$$

$$\Phi(-a-i) = \frac{1}{2(Ba+b+2)} \left\{ (Ba+b) [\overline{J_1(-a-i)} - J_1(-a-i)] - \right. \\ \left. - 4J_1(-a-i) - Bi[\overline{J_1(-a-i)} + J_1(-a-i)] \right\}. \quad (19)$$

Для вычисления выражений (17) и (18) введем для удобства новую комплексную переменную $\zeta_1 = \zeta - t_0$, где t_0 — параметр, характеризующий местоположение нагрузок N и T . Пусть граничным точкам участка нагружения в плоскости Z отвечают в плоскости ζ точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, тогда из (17) и (18) с учетом (12) находим:

$$J_1(\zeta) = J_1^{(1)}(\zeta) + J_1^{(2)}(\zeta), \\ J_2(\zeta) = J_2^{(1)}(\zeta) + J_2^{(2)}(\zeta), \quad (20)$$

где

$$J_1^{(1)}(\zeta) = -c \left\{ \frac{K_y(4B + ic_1) + K_{xy}(c_1 - 4Bi)}{8(\zeta + a - i)} + \right. \\ \left. + \frac{K_x + K_y}{4} \left[\frac{c_2}{2(\zeta + a - i)^2} - \frac{c_3 + c_4 \cdot i}{(\zeta + a - i)^3} \right] \right\}, \\ J_1^{(2)}(\zeta) = -\frac{T + iN}{2\pi} \left\{ \left[1 - \frac{Ba + b - Bi}{(\zeta + a - i)^2} \right] \cdot \ln \frac{\zeta - t_0 - 1}{\zeta - t_0 + 1} + \right. \\ \left. + \frac{Ba + b - Bi}{\zeta + a - i} \cdot (n_1 + in_2) + \frac{Ba + b - Bi}{(\zeta + a - i)^2} \ln \frac{t_0 + 1 + a - i}{t_0 - 1 + a - i} \right\}, \quad (21) \\ J_2^{(1)}(\zeta) = -c \left\{ \frac{k_y(4B + ic_1) - k_{xy}(c_1 - 4Bi)}{8(\zeta + a - i)} - \frac{(k_x - k_y - 2k_{xy} \cdot i) \cdot c_2}{9(\zeta + a - i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(k_x - k_y + 2k_{xy} \cdot i)(c_3 - c_4 \cdot i)}{4(\zeta + a - i)^3} \right\}, \\ J_2^{(2)}(\zeta) = \frac{T - iN}{2\pi} \left\{ \left[1 - \frac{Ba + b + Bi}{(\zeta + a + i)^2} \right] \cdot \ln \frac{\zeta - t_0 - l}{\zeta - t_0 + l} + \right. \\ \left. + \frac{Ba + b + Bi}{\zeta + a + i} (n_1 - in_2) + \frac{Ba + b + Bi}{(\zeta + a + i)^2} \ln \frac{t_0 + 1 + a + i}{t_0 - 1 + a - i} \right\}, \\ c_1 = c_2 + 4(Ba + b), \\ c_2 = (Ba + b)^2 + B^2, \\ c_3 = 2B \cdot (Ba + b), \\ c_4 = (Ba + b)^2 - B^2,$$

$$n_1 = 2l \frac{(t_0 + a)^2 - (l^2 + 1)}{[(t_0 + a)^2 - (l^2 + 1)]^2 + 4(t_0 + a)^2}, \\ n_2 = 4l \frac{t_0 + a}{[(t_0 + a)^2 - (l^2 + 1)]^2 + 4(t_0 + a)^2}.$$

Таким образом, задача решена. Заметим, что при $k_c = 0$, $N = T = 0$, т. е. при отсутствии сейсмического воздействия и внешних нагрузок, полученные соотношения совпадают с решениями, приводимыми в работе [1].

Полученные в замкнутом виде решения запрограммированы для

расчетов на ЭЦВМ. Программа составлена как для определения компонент напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , так и для определения главных напряжений σ_1 , σ_2 , $\tau_{\max}$. По полученным расчетным данным строились изолинии и эпюры напряжений.

Кроме того, были построены изолинии коэффициентов устойчивости, которые определили по формуле [3]:

$$\eta_y = \frac{\tau_a^{\text{пр}}}{\tau_a} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y - 2 \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi}{2 \cdot \tau_{\max} \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

где: $\tau_a^{\text{пр}}$ — предельное сопротивление сдвигу по наиболее опасным площадкам;

τ_a — действующее значение касательного напряжения на наиболее опасной площадке;

c — сцепление;

φ — угол внутреннего трения.

При $\eta > 1$ исследуемая точка находится в устойчивом состоянии, при $\eta = 1$ — в предельном, а при $\eta < 1$ — в неустойчивом состоянии.

В качестве примеров на рис. 2, 3 представлены изолинии максимальных касательных напряжений и коэффициентов устойчивости для случая

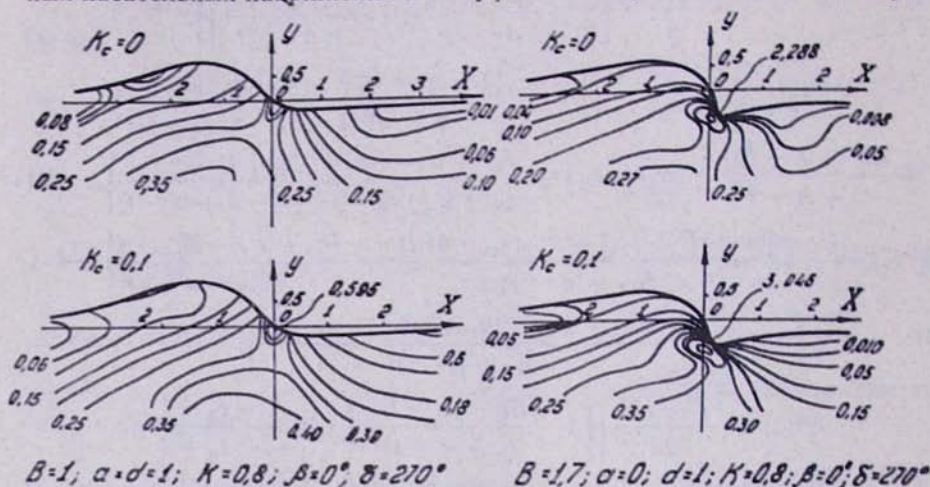


Рис. 2. Изолинии $\tau_{\max}$

отсутствия внешних нагрузок. Изолинии максимальных касательных напряжений построены по относительным безразмерным значениям. Для перехода от безразмерных значений напряжений к размерным, соответствующим условиям конкретной задачи, необходимо воспользоваться формулой:

$$\tau = \bar{\tau} \cdot \gamma \cdot h,$$

где $h = c \cdot B \cdot \sqrt{a^2 + 1}$ — высота выступа.

Изолинии коэффициентов устойчивости на рис. 3 построены при следующих данных: $\gamma = 2 \text{ т/м}^3$, $c = 10 \text{ т/м}^2$, $h = 100 \text{ м}$, $\varphi = 20^\circ$.

Анализ полученных распределений напряжений при отсутствии внешних усилий позволил сделать следующие выводы. Наличие криволинейности границы обуславливает значительное перераспределение напряжений по сравнению с полуплоскостью. В местах вогнутости гра-

ниги наблюдаются значительные концентрации напряжений, где, естественно, и располагаются наиболее неустойчивые зоны. Область влияния криволинейности границы значительно зависит от коэффициента бокового давления k : с увеличением k область влияния криволинейности на распределение напряжений увеличивается. Вместе с тем

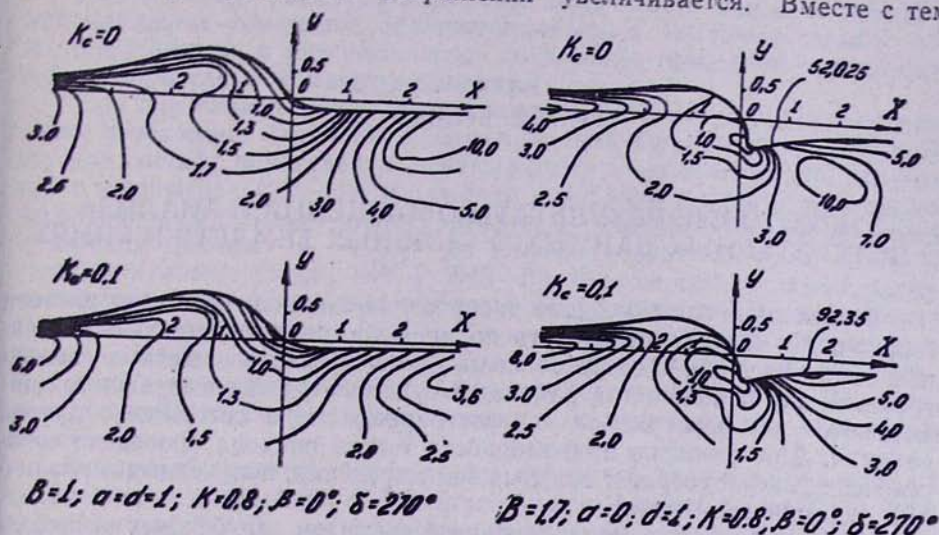


Рис. 3. Изолинии τ_{xy}

концентрация напряжений в значительной степени зависит от кривизны криволинейной границы. Направление сейсмической силы оказывает существенное влияние на напряженное состояние массивов в зависимости от того, чем вызвана криволинейность, — вырезом или выступом, а также от коэффициента k_c . В случае выступов напряженное состояние бортов, расположенных со стороны направления сейсмической силы, увеличивается, в то время как напряженное состояние бортов выступов, расположенных с противоположной стороны, ухудшается. В случае вырезов наблюдается обратная картина. Это объясняется тем, что противоположная от направления сейсмической силы сторона выступов служит как бы контрфорсом для всего горного массива и воспринимает на себя силу удара. Очевидно, что именно эта сторона является зоной концентрации напряжений. В случае же вырезов концентрация касательных напряжений занимает область со стороны направления сейсмической силы, так как в этой зоне уменьшаются сжимающие напряжения, а растягивающие увеличиваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахпателов Д. М. Напряженное состояние горных массивов с криволинейными границами в поле гравитации. Сб. «Современные методы изучения физико-механических свойств горных пород». Труды ВСЕГИНГЕО, вып. 48, М., 1972.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд. «Наука», 1966.
3. Тер-Мартirosян З. Г., Ахпателов Д. М. О напряженном состоянии бесконечного склона с криволинейной границей в поле гравитации и фильтрации. «Проблемы геомеханики», № 5, Ереван, 1972.
4. Цытович Н. А. Проблемы механики грунтов и скальных пород в геомеханике. Лекция на VIII Международном конгрессе по механике грунтов и фундаментостроения, М., 1973.