

Ю. П. ЭПШТЕИН

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЕЙСМИЧЕСКОГО УДАРА

При определении остаточных деформаций балок, круглых пластин, оболочек под действием импульсивных нагрузок широкое распространение получила схема жестко-пластического тела. Одной из первых, в этом направлении, явилась работа Ли и Саймондса, в которой дан метод анализа пластических деформаций для случая действия сосредоточенного импульса в среднем сечении жесткопластической безопорной балки [2].

Решения, получаемые на основе жестко-пластического анализа, относительно просты и во многих случаях удовлетворительно согласуются с экспериментами.

Как известно, грунт при землетрясении совершает очень сложное движение, при котором наблюдаются резкие изменения скорости и ускорения, вызывающие в сооружениях сейсмические удары и толчки [1].

В настоящей работе делается попытка использовать жесткопластическую схему для получения метода приближенной оценки остаточных деформаций консольного стержня под действием сейсмических ударов различной силы. Аналогичное нагружение встречается и при определении сейсмической опасности подземных взрывов. Предлагаемый анализ, возможно, применим для конструкций из мягких сталей и сплавов, когда пластические деформации значительно больше упругих.

1. Постановка задачи. Рассмотрим жестко-пластический консольный стержень постоянного сечения под действием кратковременной инерционной нагрузки, возникающей в связи с ускоренным движением основания стержня во время землетрясения или во время действия подземного взрыва. Стержень имеет постоянный предельный момент M_* , массу единицы длины m и высоту H (рис. 1). Соотношение между изгибающим моментом и кривизной показано на рис. 2. Кратковременное ускорение $\ddot{y}_0(t)$, вызывающее сейсмический удар в сооружении, изображено на рис. 3. Введем для удобства безразмерный параметр кратковременного ускорения $\mu_0 = \ddot{y}_0 m H^2 / M_*$.

Рассмотрим возможные схемы движения стержня под действием сейсмических ударов различной силы.

2. Движение стержня под действием слабого сейсмического удара ($\mu_0 \leq 2$). Стержень движется поступательно с ускорением, равным ускорению грунта $\ddot{y}_0$ (рис. 1). Под действием инерционных сил в стержне возникают поперечная сила и изгибающий момент, который определяется выражением:

$$M(\xi, t) / M_* = -\frac{1}{2} \mu_0 (1 - \xi)^2, \quad (1 \ 2).$$

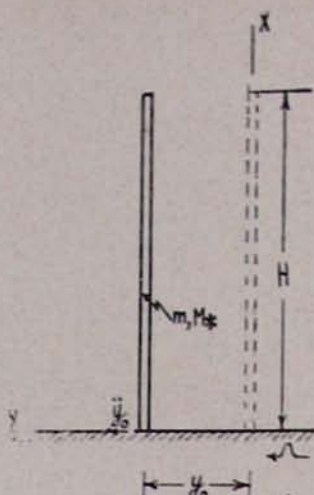


Рис. 1. Движение стержня под действием слабого сейсмического удара ($\mu_0^m < 2$)

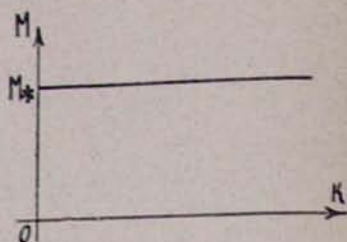


Рис. 2. Жестко-пластическая схема работы стержня

где $\xi = x/H$ — безразмерная координата.

Максимальное значение изгибающий момент имеет в опорном закреплении, равное $M(0, t)/M_* = -\frac{1}{2}\mu_0$. Стержень не деформируется до тех пор, пока максимальный изгибающий момент не достигнет предельного значения M_* . Это произойдет при $\mu_0 = 2$, когда в основании стержня образуется пластический шарнир. Итак, при слабом сейсмическом ударе ($\mu_0^m < 2$) стержень остается жестким.

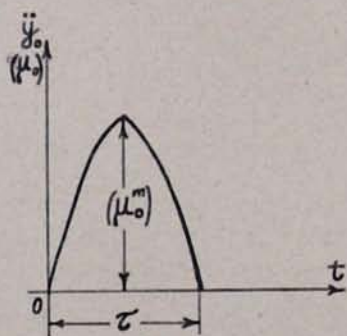


Рис. 3. Кратковременное ускорение $\ddot{y}_0(t)$

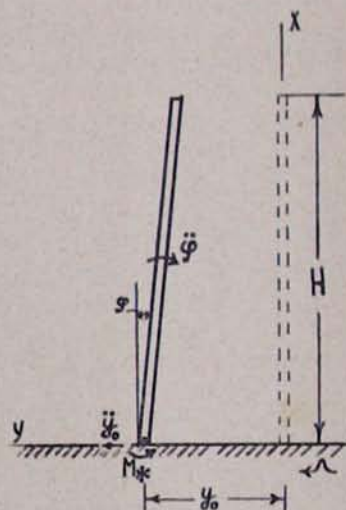


Рис. 4. Движение стержня под действием сейсмического удара средней силы ($2 < \mu_0^m < 39,8$)

3. Движение стержня под действием сейсмического удара средней силы ($2 < \mu_0^m \leq 39,8$). При $\mu_0 > 2$ стержень, оставаясь жестким, ускоренно поворачивается относительно пластического шарнира в подвижном основании стержня (рис. 4). Обозначая угловое ускорение через $\ddot{\varphi}$, запишем уравнение вращения.

$$\frac{mH^3}{M_*} \ddot{\varphi} = \frac{3}{2} \mu_0 - 3. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) сохраняет смысл до тех пор, пока изгибающий момент в жестком стержне нигде не достигнет M_* , т. е. пока не образуется новый пластический шарнир. В образовании этого шарнира существенную роль играют дополнительные силы инерции, возникающие при ускоренном вращении стержня.

Изгибающий момент в сечении на расстоянии ξ от основания стержня определяется выражением:

$$M(\xi, t)/M_* = -\frac{1}{2} \mu_0 (1 - \xi)^2 + \frac{1}{4} (\mu_0 - 2) (\xi^3 - 3\xi + 2). \quad (3.2)$$

Координата сечения с максимальным изгибающим моментом определяется из условия $\partial M / \partial \xi = 0$:

$$\xi = \frac{\mu_0 + 6}{3(\mu_0 - 2)}. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получаем выражение для максимального изгибающего момента:

$$M_m/M_* = \frac{\mu_0^3 - 18\mu_0^2 + 108\mu_0 - 216}{27(\mu_0 - 2)^2}. \quad (3.4)$$

Для определения параметра кратковременного ускорения μ_0 , при котором максимальный изгибающий момент M_m достигает предельного значения M_* , имеем следующее кубическое уравнение:

$$\mu_0^3 - 45\mu_0^2 + 216\mu_0 - 324 = 0. \quad (3.5)$$

Единственный действительный корень этого уравнения равен $\mu_0 = 39,8$, а из уравнения (3.3) определяем, что поперечное сечение, в котором впервые появляется предельный момент M_* , находится на расстоянии $\xi = 0,404$ от основания стержня.

При действии сейсмического удара средней силы ($2 < \mu_0^m \leq 39,8$) остаточный поворот стержня определится интегрированием уравнения (3.1). Удобно это уравнение переписать в безразмерной форме. Для этого введем безразмерный параметр времени

$$\tau_1 = t/T. \quad (3.6)$$

Здесь T —время, связанное с продолжительностью действия кратковременного ускорения τ . С учетом (3.6) уравнение (3.1) переписывается в безразмерном виде

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2} \mu_0 - 3. \quad (3.7)$$

Зависимость между размерными и безразмерными угловыми параметрами выразится как

$$\dot{\varphi} = \frac{M_* T}{m H^3} \dot{\Theta}, \quad (3.8)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_* T^2}{m H^3} \ddot{\Theta}. \quad (3.9)$$

К моменту прекращения действия кратковременного ускорения $\gamma = \gamma_1$ стержень будет иметь угловую скорость и угол поворота, равные

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{3}{2} I \gamma_1 - 3(\gamma_1 - \gamma_0), \quad (3.10)$$

$$\Theta_1 = \frac{3}{2} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} I d\gamma - \frac{3}{2} (\gamma_1^2 - \gamma_0^2) + 3\gamma_0 (\gamma_1 - \gamma_0), \quad (3.11)$$

где

$$I = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \mu_0 d\gamma. \quad (3.12)$$

Здесь γ_0 — момент образования пластического шарнира в основании стержня.

После прекращения действия кратковременного ускорения стержень продолжает движение, совершая равнопеременное замедленное вращение: $\ddot{\Theta} = -3$. Деформация продолжается до тех пор, пока относительная угловая скорость в пластическом шарнире не уменьшится до нуля. Это произойдет в момент времени, определяемый по формуле

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \frac{1}{3} \dot{\Theta}_1. \quad (3.13)$$

К моменту остановки γ_1 стержень будет повернут на угол Θ_1 , равный

$$\Theta_1 = \Theta_0 + \frac{1}{6} \dot{\Theta}_1^2. \quad (3.14)$$

Результаты числовых расчетов показывают, что дополнительный остаточный поворот стержня после прекращения действия кратковременного ускорения $\Theta_1 - \Theta_0$ составляет больше половины общего поворота Θ_1 .

4. Движение стержня под действием сильного сейсмического удара ($\mu_0 > 39,8$). В этом случае при $2 < \mu_0 < 39,8$ пластическое деформирование определяется уравнением (3.1). При $\mu_0 = 39,8$ в стержне на расстоянии $\xi = 0,404$ от основания образуется новый пластический шарнир. По мере дальнейшего увеличения ускорения грунта образовавшийся шарнир движется вдоль стержня вниз, плавно искривляет пройденный участок, как бы оставляя после себя „хвост“ остаточных деформаций. Запишем уравнения движения двух жестких участков стержня, соединенных нестационарным пластическим шарниром. Схема движения этих участков показана на рис. 5.

$$\frac{m x_h^3}{3} \ddot{\varphi}_1 = y_0 \frac{m x_h^2}{2} - 2M_*, \quad (4.1)$$

$$m(H - x_h) \left[\ddot{y}_2 + \frac{1}{2} (H - x_h) \ddot{\varphi}_2 \right] = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{m(H - x_h)^3}{12} \ddot{\varphi}_2 = M_*, \quad (4.3)$$

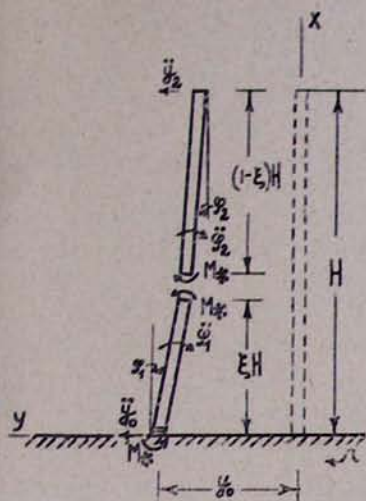


Рис. 5. Движение стержня под действием сильного сейсмического удара ($\mu_0 > 39,8$)

где x_h — расстояние нестационарного шарнира от основания стержня;

$\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_2$ — угловые ускорения жестких участков;

$\ddot{y}_2$ — поперечное ускорение верхнего конца стержня.

В работе [1] показано, что поперечное ускорение при переходе через сечение подвижного шарнира претерпевает разрыв, величина которого зависит от скорости движения шарнира $\dot{x}_h$ и от относительной угловой скорости в этом шарнире $\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$. На основе этого свойства составим дополнительное уравнение

$$(\ddot{y}_0 - \ddot{\varphi}_1 x_h) - [\ddot{y}_2 + \ddot{\varphi}_2 (H - x_h)] = \dot{x}_h (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2). \quad (4.4)$$

Вводя безразмерную координату шарнира $\xi = x_h/H$ и учитывая (3.6), перепишем основные уравнения в безразмерном виде

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{3}{2} \frac{\mu_0}{\xi} - \frac{6}{\xi^3}, \quad (4.5)$$

$$\dot{\Theta}_2 = \frac{12}{(1 - \xi)^3}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\mu_0}{2} - \frac{6}{\xi^2} + \frac{6}{(1 - \xi)^2} = -\xi (\dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_2). \quad (4.7)$$

Дифференцируя уравнение (4.7) и используя (4.5) и (4.6), получаем уравнение для координаты подвижного шарнира ξ

$$\ddot{\xi} \left[\frac{\mu_0}{2} - \frac{6}{\xi^2} + \frac{6}{(1 - \xi)^2} \right] - \xi \left[\frac{6\dot{\xi}}{\xi^3} + \frac{3}{2} \frac{\mu_0 \dot{\xi}}{\xi} + \frac{\dot{\mu}_0}{2} \right] = 0. \quad (4.8)$$

При достаточно больших ускорениях грунта и определенных условиях нестационарный пластический шарнир может превратиться в конечную пластическую зону. Чтобы это не произошло в сечении подвижного шарнира, должно выполняться условие максимума

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \Big|_{x=x_h} = m \ddot{\varphi}_1 x_h - m \ddot{y}_0 < 0. \quad (4.9)$$

Полагая в уравнении (4.1) $m \ddot{\varphi}_1 x_h = m \ddot{y}_0$, найдем наибольший параметр кратковременного ускорения $\mu_0 = 12/\xi^2$, ниже которого движение реализуется с нестационарным пластическим шарниром. В настоящей работе рассматриваются случаи нагружения, удовлетворяющие неравенству (4.9).

Итак, при действии сильного сейсмического удара ($\mu_0^m > 39,8$), когда $\mu_0 > 39,8$ пластические деформации описываются динамическими уравнениями двух жестких участков стержня (4. 5) и (4. 6), соединенных нестационарным пластическим шарниром и условием кинематической совместности в этом шарнире (4. 7).

Решение уравнений (4. 5)—(4. 7) усложняется присутствием в правой части уравнения (4. 7) выражения $\dot{\xi}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$ и, в связи с этим, нельзя получить прямым интегрированием значения скоростей и смещений. В общем случае, решение уравнений (4. 5)—(4. 7) можно найти методом последовательных приближений. В качестве начального приближения принимается равенство нулю выражения $\dot{\xi}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$ в уравнении (4. 7). Решая затем уравнения (4.5)—(4.7), получаем первое приближение функции $\dot{\xi}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$, которое подставляем в (4. 7). Снова решая уравнения, получаем второе приближение искомой функции и т. д. Процесс этот повторяется до тех пор, пока при дальнейшей итерации в функции $\dot{\xi}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$ не наблюдалось бы заметного изменения.

В частном случае действия прямоугольного кратковременного ускорения ($\mu_0 = \text{const} = \mu_0^m$) уравнения (4. 5)—(4. 7) могут быть проинтегрированы в аналитической форме. Стационарное положение шарнира ξ_1 связано с ускорением грунта соотношением

$$\frac{\mu_0^m}{2} - \frac{6}{\xi_1^2} + \frac{6}{(1 - \xi_1)^2} = 0. \quad (4. 10)$$

Для угловых скоростей и углов поворота получаем следующие выражения:

$$\dot{\theta}_1 = \left(\frac{3}{2} \frac{\mu_0^m}{\xi_1} - \frac{6}{\xi_1^3} \right) \tau; \quad (4. 11)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{12\tau}{(1 - \xi_1)^3}; \quad (4. 12)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{\mu_0^m}{\xi_1} - \frac{6}{\xi_1^3} \right) \tau^2; \quad (4. 13)$$

$$\theta_2 = \frac{6\tau^2}{(1 - \xi_1)^3}. \quad (4. 14)$$

Уравнения (4.5)—(4.7) применимы до тех пор, пока относительная угловая скорость в нестационарном пластическом шарнире не уменьшится до нуля. Время, когда происходит исчезновение шарнира, зависит от максимального значения ускорения грунта и от продолжительности действия кратковременного ускорения. Если нестационарный шарнир исчезает еще до прекращения действия кратковременного ускорения, то в дальнейшем пластическое деформирование стержня будет снова описываться уравнением (3.1).

При достаточно сильном сейсмическом ударе нестационарный пластический шарнир может существовать и после прекращения действия удара, т. е. при $\mu_0 = 0$. Движение пластического шарнира, в этом случае, описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{\xi} \left[\frac{1}{(1-\xi)^2} - \frac{1}{\xi^2} \right] - \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^3} = 0, \quad (4.15)$$

которое подстановкой $q(\xi) = \dot{\xi}$ приводится к следующему линейному уравнению:

$$q' - \left[\frac{1}{2} + \frac{1 - \frac{3}{2}\xi}{\xi(2\xi - 1)} \right] q = 0. \quad (4.16)$$

Интегрируя (4.16), получаем выражение для скорости движения шарнира

$$\dot{\xi} = A_{\tau} \frac{\sqrt{1 - 2\xi}}{\xi} e^{\xi/2}, \quad (4.17)$$

где

$$A_{\tau} = \frac{\dot{\xi}_{\tau} \xi_{\tau}}{\sqrt{1 - 2\xi_{\tau}}} e^{-\xi_{\tau}/2}. \quad (4.18)$$

Здесь ξ_{τ} и $\dot{\xi}_{\tau}$ — координата шарнира и его скорость в момент прекращения действия кратковременного ускорения. Раскладывая в степенной ряд иррациональную функцию и интегрируя (4.17), получаем закон движения шарнира:

$$e^{\xi/2} \left(1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{17}{144}\xi^2 + \frac{5}{288}\xi^3 + \dots \right) \Big|_{\xi_{\tau}}^{\xi} = -\frac{A_{\tau}}{72} (\eta - \eta_{\tau}). \quad (4.19)$$

Согласно закону (4.19), пластический шарнир движется до момента своего исчезновения η_s . Положение шарнира в этот момент определяется из (4.7) при $\mu_0 = 0$ и $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$: $\xi_s = 0,5$, т. е. пластический шарнир исчезает, достигнув середины высоты стержня. После исчезновения нестационарного шарнира, дальнейшее движение стержня до момента его остановки η_{II} будет совершаться по закону: $\dot{\theta} = -3$.

5. Пример. Определить остаточный поворот консольного стержня при действии сейсмического удара средней силы $\mu_0 = 30 \sin \pi \eta / 2$. Принимая $T = 1/2\tau$, получаем $\eta_{\tau} = 2,0$. Пластический шарнир в основании стержня образуется в момент $\eta_{II} = 0,042$. По формулам (3.10)–(3.14) вычисляем: $\dot{\theta}_{\tau} = 51,42$, $\theta_{\tau} = 106,45$, $\eta_{II} = 19,1$ и $\theta_{II} = 547$. Используя зависимость (39), получаем остаточный поворот стержня $\varphi = 547 M_* T^2 / m H^3$.

В случае действия сильного сейсмического удара $\mu_0 = 50 \sin \pi \eta / 2$ имеем: $T = 1/2\tau$, $\eta_{\tau} = 2,0$, $\eta_{II} = 0,025$. Момент образования нестационарного пластического шарнира равен $\eta_{III} = 0,587$. Численно интегрируя уравнения (4.5)–(4.7), определяем момент исчезновения нестационарного шарнира $\eta_s = 1,85$. К этому времени нижний и верхний участки стержня будут повернуты на углы $\theta_1 = 89,0$ и $\theta_2 = 74,3$. Используя формулы (3.10)–(3.12) (подставляя вместо η_{II} значение $\eta_s = 1,85$), определяем угловые параметры к моменту прекращения действия кратковременного ускорения: $\theta_1 = 89,17$, $\theta_2 = 74,47$ и $\dot{\theta} = 89,3$. Как видно, за счет действия нестационарного шарнира верхний жесткий участок стержня повернется относительно нижнего участка на величину безразмерного угла $(\theta_1 - \theta_2) = 14,7$. Момент полной остановки стержня, определяемый по формуле (3.13), равен $\eta_{II} = 31,8$.

К этому времени нижний жесткий участок стержня будет повернут на угол $\varphi_1 = 1418,8 M_* T^2 / mH^3$, определяемый по формуле (3. 14) с использованием зависимости (3. 9).

ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко Госстроя СССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А. Г. Метод инженерного анализа сейсмических сил. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1959.
2. Lee E. H., Symonds P. S. Large plastic deformations of beams under transverse impact, J. Appl. Mech., v. 19, №3, 1952, pp. 308—315.