

Ш. Г. НАПЕТВАРИДЗЕ, А. С. ДАТУНАШВИЛИ

МЕТОДИКА НАТУРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ЗДАНИЙ
И СООРУЖЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОЩНОГО
МЕХАНИЧЕСКОГО ВИБРАТОРА

Перед натурными измерениями колебаний зданий и сооружений ставятся следующие основные задачи: проверить существующие аналитические приближенные методы определения частот (периодов) и нормальных форм собственных колебаний; определить логарифмический декремент собственных колебаний; установить степень нелинейности колебаний.

Сопоставление экспериментально полученных частот и нормальных форм собственных колебаний с их теоретическими значениями позволяет судить о правильности динамической расчетной схемы зданий и сооружений, принимаемой обычно более упрощенной по сравнению с реальной конструктивной схемой. Следовательно, натурные измерения позволяют обеспечить получение всех данных, необходимых для расчета зданий и сооружений с применением современной методики теории сейсмостойкости, основанной на спектральном подходе к сейсмическому воздействию на здания и сооружения.

В настоящее время получили распространение следующие методики измерения колебаний зданий и сооружений в натуре.

Так, наиболее удобной в смысле быстроты и экономичности является методика измерения колебаний зданий и сооружений, возникающих от микросейсм, ветра и прохождения транспорта.

Однако колебания от указанных причин являются слабыми, не регулярными, что затрудняет выделение частот и нормальных форм собственных колебаний высших тонов, не говоря уж о том, что по рассматриваемой методике почти невозможно получение достоверных данных о логарифмическом декременте и о нелинейности собственных колебаний зданий и сооружений. Использование сейсмовзрывного воздействия для натуральных измерений колебаний неудобно не только потому, что оно связано с большими затратами денежных средств, но и потому, что так же, как при применении вышеупомянутых методик, не обеспечивает получения полных данных.

Наиболее приемлемой является методика, по которой в качестве возбудителя колебаний используется достаточно мощный механический вибратор, позволяющий плавно менять число оборотов эксцентриков виб-

ратора и тем самым возбуждать резонансные колебания зданий или сооружений. Такие колебания, кроме того, что обычно являются интенсивными и тем самым хорошо регистрируются обычными вибродатчиками, позволяют получить все необходимые данные, а именно: частоты (периоды) и нормальные формы собственных колебаний, по крайней мере первых трех тонов, и логарифмический декремент собственных колебаний. По резонансным колебаниям можно судить и о степени нелинейности колебаний здания или сооружения (при достаточной мощности вибратора).

В последнее время стали применять методику, по которой колебания зданий и сооружений возбуждают толчком, т. е. деформируют сооружение путем оттяжки тросом, натягиваемым лебедкой, а затем внезапно отключают трос. При этом возникают собственные колебания сооружения, по которым обычно устанавливают период только основного тона собственных колебаний и соответствующий логарифмический декремент.

При такой методике, так же как при возбуждении собственных колебаний сооружения с помощью ударов, практически невозможно выделить нормальные формы собственных колебаний.

Учитывая изложенное, Институт строительной механики и сейсмостойкости АН ГССР при натурных измерениях колебаний зданий и сооружений в качестве возбудителя колебаний в основном пользуется механическим вибратором, используя в методических целях также и колебания при микросейсмах и ветрах.

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СМЕЩЕНИЯ СООРУЖЕНИЙ ОТ ДЕЙСТВИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ВИБРАТОРА

Так же как в современной методике расчета на сейсмостойкость зданий и сооружений, в качестве динамической расчетной схемы сооружения (рис. 1) примем консоль, несущую n

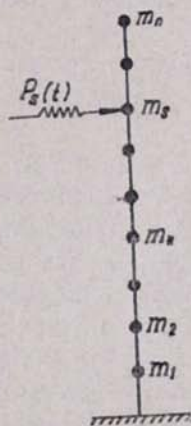


Рис. 1. Расчетная схема сооружения

сосредоточенных масс $m_1 \dots m_k \dots m_n \dots$ (упругая система с n числом степеней свободы). Данная схема является наиболее общей в смысле закономерности распределения по высоте сооружения как масс, так и жесткостей.

Обычно для решения задач о натурных измерениях колебаний сооружений достаточно иметь один вибратор, допустим, расположенный на уровне какой-либо массы m_k . Конечно, для получения наибольших амплитуд колебаний и, следовательно, для достижения наибольшей точности измерений, вибратор желательно расположить на верхнем конце сооружения. Однако иногда бывает более удобным расположить его на промежуточном уровне. Для общности сначала мы будем исходить из допущения, что вибраторы, развивающие пульсирующую силу $P_k(t)$, имеются на уровнях сосредоточения каждого груза m_k .

Как известно, задача отыскания частот ω_i и нормальных форм $X_i(x_k)$ собственных колебаний упругой системы прямым методом решается путем составления системы дифференциальных уравнений движения. Причем частота ω_i определяется из равенства нулю детерминанта указанной системы уравнений. После того как частота ω_i будет определена, ординаты нормальной формы $X_i(x_1) \dots X_i(x_k) \dots X_i(x_n)$ можно вычислить, решая систему упомянутых уравнений. Дальше мы будем считать, что эти величины нам уже известны.

Разлагая каждую пульсирующую силу от вибратора в ряд по нормальным функциям в виде

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) m_k \omega_i^2 X_i(x_k), \quad (1)$$

для нахождения коэффициента разложения $a_i(t)$ умножаем обе части (1) на $X_j(x_k)$ и, суммируя их от $k=1$ до $k=n$, получим, при учете условий ортогональности (взаимной независимости) нормальных форм колебаний:

$$a_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2} \frac{\sum_{k=1}^n P_k(t) X_i(x_k)}{\sum_{k=1}^n m_k X_i^2(x_k)}. \quad (2)$$

Из (1) видно, что компонента силы $P_k(t)$ в i -ой форме

$$P_{i,k}(t) = a_i(t) m_k \omega_i^2 X_i(x_k). \quad (3)$$

Для каждой массы в i -ой нормальной форме записывается следующее дифференциальное уравнение колебаний:

$$m_k \ddot{y}_i(x_k, t) + \epsilon_i \dot{y}_i(x_k, t) + m_k \omega_i^2 y_i(x_k, t) = P_{i,k}(t). \quad (4)$$

Здесь $y_i(x_k, t)$ есть смещение сооружения в i -ой нормальной форме;

ϵ_i — коэффициент рассеивания энергии, который для общности считается зависящим от номера нормальной формы колебаний.

Решение (4), как известно, имеет вид

$$y_i(x_k, t) = \frac{1}{m_k \omega_i} \int_0^t P_{i,k}(\xi) e^{-\frac{\delta_i}{T}(t-\xi)} \sin \omega_i(t-\xi) d\xi, \quad (5)$$

где δ_i — логарифмический декремент собственных колебаний в i -ой нормальной форме.

Следовательно, с учетом (1) и (2) будем иметь

$$y_i(x_k, t) = \frac{1}{\omega_i} \frac{X_i(x_k)}{\sum_{k=1}^n m_k X_i(x_k)} \times$$

$$\times \int_0^t \left[\sum_{k=1}^n P_k(\xi) X_k(x_k) \right] e^{-\frac{\delta}{T}(t-\xi)} \sin \omega_l(t-\xi) d\xi. \quad (6)$$

Теперь вернемся к поставленной перед нами задаче. Пусть источник возбуждения колебаний — динамическая сила действует на уровне x_s , тогда

$$\sum_{k=1}^n P_k(\xi) X_k(x_k) = P_s(\xi) X_l(x_s).$$

Далее примем, что

$$P_s(t) = P_s f(t), \quad (7)$$

где P_s — амплитуда пульсирующей силы, а функция $[f(t)] \leq 1$.

С учетом изложенного (6) можно написать так:

$$y_l(x_k, t) = \frac{P_s}{\omega_l^2} \frac{X_l(x_s)}{\sum_{k=1}^n m_k X_l^2(x_k)} X_l(x_k) \omega_l \int_0^t f(\xi) e^{-\frac{\delta}{T}(t-\xi)} \sin \omega_l(t-\xi) d\xi.$$

Но, как известно,

$$\omega_l \int_0^t f(\xi) e^{-\frac{\delta}{T}(t-\xi)} \sin \omega_l(t-\xi) d\xi = \beta_l(t),$$

где $\beta_l(t)$ — коэффициент динамичности, и поэтому будем иметь

$$y_l(x_k, t) = \frac{P_s}{\omega_l^2} \frac{X_l(x_s)}{\sum_{k=1}^n m_k X_l^2(m_k)} X_l(x_k) \beta_l(t). \quad (8)$$

В частном случае, когда имеем механический вибратор, при котором в равенстве (7)

$$\text{функция } f(t) = \sin pt, \quad (9)$$

где p — круговая частота пульсации [1], для коэффициента динамичности получим

$$\beta_j(t) = \frac{\sin(pt + \varphi_l)}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_l^2}\right)^2 + \frac{\delta_l^2}{\pi^2}}}, \quad (10)$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \varphi_j = -\frac{\delta_l}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega_l^2}}.$$

Так что (8) можно написать так:

$$y_i(x_k, t) = \frac{P_s}{\omega_i^2 m_s \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{m_s} X_i^2(x_k)} X_i(x_s) X_i(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_i^2} \times \\ \times \frac{\sin(pt + \varphi_i)}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_i^2}\right)^2 + \frac{\delta_i^2}{\pi^2}}}.$$

Далее, обозначая

$$\frac{P_s}{\omega_1^2 m_s \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{m_s} X_i^2(x_k)} = y_{cm}(x_s), \quad (11)$$

где $y_{cm}(x_s)$ — смещение в точке s от статического действия силы;
 ω_1 — частота свободных колебаний основного тона, получим

$$y_i(x_k, t) = y_{cm}(x_s) X_i(x_s) X_i(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_i^2} \frac{\sin(pt + \varphi_i)}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_i^2}\right)^2 + \frac{\delta_i^2}{\pi^2}}}. \quad (12)$$

Согласно (12) полное смещение в любой точке сооружения

$$y(x_k, t) = y_{cm}(x_s) \sum_{i=1}^n X_i(x_s) X_i(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_i^2} \frac{\sin(pt + \varphi_i)}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_i^2}\right)^2 + \frac{\delta_i^2}{\pi^2}}}. \quad (13)$$

Теперь допустим, что имеем явление резонанса в i -ой нормальной форме, которое наступает при $p = \omega_i$.

Тогда (13) примет вид:

$$y(x_k, t) = y_{cm}(x_s) \left[X_1(x_s) X_1(x_k) \frac{\sin(\omega_1 t + \varphi_1)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \frac{\delta_1^2}{\pi^2}}} + \dots \right. \\ \dots + X_{i-1}(x_s) X_{i-1}(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_{i-1}^2} \frac{\sin(\omega_1 t + \varphi_{i-1})}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_{i-1}^2}\right)^2 + \frac{\delta_{i-1}^2}{\pi^2}}} + \\ + X_i(x_s) X_i(x_k) \frac{\pi}{\delta_i} \frac{\omega_1}{\omega_i^2} \cos \omega_i t + \\ + X_{i+1}(x_s) X_{i+1}(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_{i+1}^2} \frac{\sin \omega_1 t + \varphi_{i+1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_{i+1}^2}\right)^2 + \frac{\delta_{i+1}^2}{\pi^2}}} + \dots \\ \left. \dots + X_n(x_s) X_n(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} \frac{\sin(\omega_1 t + \varphi_n)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{\delta_n^2}{\pi^2}}} \right]. \quad (14)$$

Нетрудно показать, что величиной каждого из слагающих в правой части этой суммы можно пренебречь, по сравнению со слагающим, соответствующим i -ой нормальной форме (резонансной форме).

Так учтем, что $\frac{\delta_{l-1}^2}{\pi^2}$ так же, как $\frac{\delta_{l+1}^2}{\pi^2}$, есть малая величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей. Учтем также, что единицей можно пренебречь по сравнению с $\frac{\omega_i^2}{\omega_{l-1}^2}$ и, наоборот, величиной $\frac{\omega_i^2}{\omega_{l+1}^2}$ можно пренебречь по сравнению с единицей. Тогда (14) примет вид с учетом (10):

$$y^*(x_k, t) = y_{cm} \left[X_1(x_s) X_1(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_l^2} \sin \omega_l t + \dots \right. \\ \left. \dots + X_{l-1}(x_s) X_{l-1}(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_l^2} \sin \omega_l t + X_l(x_s) X_l(x_k) \frac{\pi}{\delta_l} \frac{\omega_1^2}{\omega_l^2} \cos \omega_l t + \right. \\ \left. + X_{l+1}(x_s) X_{l+1}(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_{l+1}^2} \sin \omega_l t + \dots + X_n(x_s) X_n(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} \right].$$

Например, при $x_s = x_k = x_n = l$ $X_l^2(l) = 1$.

Далее $\frac{\omega_1^2}{\omega_j^2}$ — малая величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей, в то время как $\frac{\pi}{\delta_l}$ не сравненно больше единицы. Следовательно, можем принять

$$y_l^*(x_k, t) = y_{cm}(x_s) X_l(x_s) X_l(x_k) \frac{\pi}{\delta_l} \frac{\omega_1^2}{\omega_l^2} \cos \omega_l t, \quad (15)$$

что непосредственно получится из равенства (10) и (12), положив в нем $p = \omega_l$. Учтем, что $y_{cm}(x_s) = \frac{P_s}{C_s}$,

где C_s — коэффициент жесткости для сечения s .

С другой стороны, $P_s = bp^2$, где b — кинетический момент вибратора. Далее, внося в (15) условие резонанса $p = \omega_l$ и учитывая, что $b\omega_l^2 = P_{1,s}$ есть сила вибратора, когда сооружение попадает в резонанс по основной форме колебаний, а также, что

$$\frac{P_{1,s}}{C_s} = y_{1,cm}(x_s^1) \quad (16)$$

есть соответствующее смещение сооружения на уровне расположения вибратора, получим:

$$y_l^*(x_k, t) = y_{1,cm}(x_s) X_l(x_s) X_l(x_k) \frac{\pi}{\delta_l} \cos \omega_l t. \quad (17)$$

Эта формула будет служить основой для разработки предложенной методики натуральных измерений колебаний зданий и сооружений.

II. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ НАТУРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Определение момента возникновения нормальной формы колебаний

Как было показано выше, возникновению любой i -ой нормальной формы собственных колебаний соответствует полное развитие резонансных колебаний сооружения.

Признаком такого явления, как это видно из сопоставления (9) и (17), служит сдвиг фазы колебаний на $\frac{\pi}{2}$ (изменение $\sin pt$ на $\cos pt$ при $p = \omega_i$).

Следовательно, если ось вибратора будет снабжена контактным устройством, при помощи которого на ленте осциллографа будут фиксированы точками моменты времени достижения пульсирующей силой своих максимумов (амплитуд), то можно установить сдвиг фазы на $\frac{\pi}{2}$ между колебаниями вибратора и сооружения, что будет служить надежным признаком полного развития резонанса и, следовательно, появления искомой нормальной формы колебаний.

Определение нормальных форм собственных колебаний

Размещая сейсмографы на различных $x_1, x_2 \dots x_k \dots x_s \dots x_n$ уровнях сооружения (рис. 1), по мере плавного увеличения числа оборотов эксцентров (частоты пульсирующей силы p), можно построить кривые амплитуд колебаний на этих различных уровнях. Максимальным амплитудам смещения и сдвигу фазы колебаний на $\frac{\pi}{2}$ будет соответствовать появление нормальной формы колебаний.

Согласно (17) для верхнего конца сооружения, т. е. при $x_k = x_n = b$, амплитуда резонансного смещения

$$y^*(l) = y_{1,cm}(x_s) X_i(x_s) \frac{\pi}{\delta_i},$$

ибо для этого случая $X_i(x_n) = 1$ из условия нормирования.

Ординаты искомой нормальной формы

$$X_i(x_k) = \frac{y_i^*(x_k)}{y_i^*(l)}. \quad (18)$$

Определение логарифмического декремента собственных колебаний сооружения¹

Ниже в зависимости от условий производства натуральных измерений колебаний сооружения, будут предложены различные подходы к задаче определения логарифмического декремента собственных колебаний.

При этом, как ранее, для общности предполагается, что логарифмический декремент по величине различен для различных форм собственных колебаний. В смысле условий производства натуральных измерений можем иметь следующие случаи: вибратор способен дать только одну i -ую из имеющихся n количества резонансных частот, и мы вынуждены удовлетвориться определением логарифмического декремента, соответствующего этой i -ой форме колебаний; имеется возможность возбудить вибратором как первую форму, так и последующие формы колебаний и требуется определить логарифмические декременты собственных колебаний.

Рассмотрим случай наличия возможности возбуждения колебаний только i -ой нормальной формы.

Пусть в (13) вибратор достиг частоты p , при которой еще нет резонанса в i -ой форме, т. е. $\omega_{i-1} < p < \omega_i$. В таком случае (13) в развернутом виде можно представить так:

$$\begin{aligned}
 y(x_k, t) = \frac{b}{C_s} p^2 \left[X_1(x_s) X_1(x_k) \frac{\sin(pt + \varphi_1)}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \frac{\delta_1^2}{\pi^2}}} + \dots \right. \\
 \dots + X_{i-1}(x_s) X_{i-1}(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_{i-1}^2} \frac{\sin(pt + \varphi_{i-1})}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_{i-1}^2}\right)^2 + \frac{\delta_{i-1}^2}{\pi^2}}} + \\
 + X_i(x_s) X_i(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_i^2} \frac{\sin(pt + \varphi_i)}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_i^2}\right)^2 + \frac{\delta_i^2}{\pi^2}}} + \\
 + X_{i+1}(x_s) X_{i+1}(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_{i+1}^2} \frac{\sin(pt + \varphi_{i+1})}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_{i+1}^2}\right)^2 + \frac{\delta_{i+1}^2}{\pi^2}}} + \dots \\
 \left. \dots + X_n(x_s) X_n(x_k) \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} \frac{\sin(pt + \varphi_n)}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{\delta_n^2}{\pi^2}}} \right]. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Используя те же допущения, что и при получении формулы (15), будем иметь с учетом (10)

¹ Выводы этого раздела основаны на предположении о существовании внутреннего трения такой природы, при которой допускается полная ортогонализация колебаний по основным формам. (Прим. редакции).

$$y(x_k, t) \cong \frac{b}{C_s} p^2 \left[X_1(x_s) X_1(x_k) \omega_1^2 \sin pt + \dots \right. \\
\left. \dots + X_2(x_s) X_2(x_k) \omega_1^2 \sin pt + \dots + X_{l-1}(x_s) X_{l-1}(x_k) \omega_1^2 \sin pt + \right. \\
\left. + X_l(x_s) X_l(x_k) \frac{p^2}{\omega_l^2} \sin pt + X_{l+1}(x_s) X_{l+1}(x_k) \frac{p^2}{\omega_{l+1}^2} \sin pt + \dots \right. \\
\left. \dots + X_n(x_s) X_n(x_k) \frac{p^2}{\omega_n^2} \sin pt \right]. \quad (20)$$

Так как по условию $\omega_{l-1} < p < \omega_l$, то членами, соответствующими формам колебаний от $i+1$ до n включительно, можно пренебречь по сравнению с членом, имеющим номер i , и будем иметь

$$y(x_k, t) \cong \frac{b\omega_1^2}{C_s} \left[\sum_{j=1}^{l-1} X_j(x_s) X_j(x_k) + \frac{p^2}{\omega_l^2} X_l(x_s) X_l(x_k) \right] \sin pt.$$

Если учесть, что $b\omega_1^2 = P_{1,s}$, в предыдущем выражении $\frac{P_{1,s}}{C_s} = y_{1,cm}(x_s)$ есть перемещение при достижении вибратором частоты $p = \omega_1$. Так, что

$$y(x_k, t) \cong y_{1,cm}(x_s) \left[\sum_{j=1}^{l-1} X_j(x_s) X_j(x_k) + \frac{p^2}{\omega_l^2} X_l(x_s) X_l(x_k) \right] \sin pt. \quad (21)$$

Теперь, сопоставляя амплитудные значения по (21) и (17), получим:

$$\frac{y(x_k)}{y^*(x_k)} = \frac{\delta_l}{\pi} \frac{\sum_{j=1}^{l-1} X_j(x_s) X_j(x_k) + \frac{p^2}{\omega_l^2} X_l(x_s) X_l(x_k)}{X_l(x_s) X_l(x_k)},$$

откуда искомым логарифмический декремент собственных колебаний

$$\delta_l = \pi \frac{y(x_k)}{y^*(x_k)} \frac{X_l(x_s) X_l(x_k)}{\sum_{j=1}^{l-1} X_j(x_s) X_j(x_k) + \frac{p^2}{\omega_l^2} X_l(x_s) X_l(x_k)}. \quad (22)$$

В частных случаях, когда $i = 1$,

$$\delta_1 = \pi \frac{y(x_k)}{y_1^*(x_k)} \frac{\omega_1^2}{p^2}, \quad (23)$$

при $i = 2$

$$\delta_2 = \pi \frac{y(x_k)}{y_2^*(x_k)} \cdot \frac{X_2(x_s) X_2(x_k)}{X_1(x_s) X_1(x_k) + \frac{p^2}{\omega_2^2} X_2(x_s) X_2(x_k)},$$

или

$$\delta_2 = \pi \frac{y(x_k)}{y_2^*(x_k)} \cdot \frac{1}{\frac{X_1(x_s) X_1(x_k)}{X_2(x_s) X_2(x_k)} + \frac{p^2}{\omega_2^2}}, \quad (24)$$

при $i = 3$

$$\delta_3 = \pi \frac{y(x_k)}{y_3^*(x_k)} \cdot \frac{X_2(x_s) X_3(x_k)}{X_1(x_s) X_1(x_k) + X_2(x_s) X_2(x_k) + \frac{p^2}{\omega_3^2} X_3(x_s) X_3(x_k)},$$

или

$$\delta_3 = \pi \frac{y(x_k)}{y_3^*(x_k)} \cdot \frac{1}{\frac{X_1(x_s) X_1(x_k)}{X_3(x_s) X_3(x_k)} + \frac{X_2(x_s) X_2(x_k)}{X_3(x_s) X_3(x_k)} + \frac{p^2}{\omega_3^2}}. \quad (25)$$

При $x_s = x_n = l$

$x_k = x_n = l$ (вibrator стоит на верхнем конце сооружения) (23) примет вид

$$\delta_1 = \pi \frac{y(l)}{y_1^*(l)} \frac{\omega_1^2}{p^2}, \quad (23')$$

а (24) и (25) заметно упростятся и будем иметь

$$\delta_2 = \pi \frac{y(l)}{y_2^*(l)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\omega_2^2}}, \quad (24')$$

$$\delta_3 = \pi \frac{y(l)}{y_3^*(l)} \cdot \frac{1}{2 + \frac{p^2}{\omega_3^2}}. \quad (25')$$

Отсюда видно, что наиболее удобно vibrator располагать на верхнем уровне сооружения.

Полученные выше формулы (23), (24) и (25) и более простые (23'), (24') и (25') имеют ту особенность, что при их помощи можно определить логарифмический декремент в любой i -ой форме, независимо от того, можем ли мы получить значение логарифмического декремента в другой форме колебаний. Как отмечалось, такой случай на практике может возникнуть при ограничении частотных возможностей vibratorа.

Теперь рассмотрим случай, когда имеется возможность возбуждать колебания сооружения как в первой, так и в других собственных формах.

При развитии вибратором колебаний с самой низкой частотой, т. е. при $p = p_0$, при которой $0 < p_0 < \omega_1$, получим, согласно (21),

$$y(x_k, t) \approx y_{1cm}(x_s) X_1(x_s) X_1(x_k) \frac{p_0^2}{\omega_1^2} \sin p_0 t. \quad (26)$$

Теперь из сопоставления амплитудных значений (26) и (17) будем иметь

$$\frac{y(x_k)}{y_l^*(x_k)} = \frac{\delta_l}{\pi} \frac{X_1(x_s) X_1(x_k)}{X_l(x_s) X_l(x_k)} \frac{p_0^2}{\omega_1^2},$$

отсюда

$$\delta_l = \pi \frac{y(x_k)}{y^*(x_k)} \frac{X_l(x_s) X_l(x_k)}{X_1(x_s) X_1(x_k)} \frac{\omega_1^2}{p_0^2}. \quad (27)$$

При $x_s = x_k = x_n = l$ (верхний уровень сооружения и вибратор расположен на этом уровне)

$$\delta_l = \pi \frac{y(l)}{y^*(l)} \frac{\omega_1^2}{p_0^2}. \quad (27')$$

Согласно (27), можно записать:

$$\delta_l = \delta_l \frac{y_l^*(x_k)}{y_j^*(x_k)} \frac{X_j(x_s) X_j(x_k)}{X_l(x_s) X_l(x_k)} \quad (28)$$

и при $x_s = x_k = x_n = l$

$$\delta_j = \delta_l \frac{y_l^*(l)}{y_j^*(l)}. \quad (28')$$

Следовательно, декремент одной собственной формы выражается через декремент другой i -ой формы.

Интересно заметить, что из (28) следует, что гипотеза о постоянстве логарифмического декремента для всех собственных форм предполагает

$$y_i^*(l) = y_j^*(l) = \text{const}, \quad (29)$$

т. е. равенство смещений в верхнем уровне сооружения для всех нормальных форм колебаний. Так что представляет особый интерес возможность экспериментальной проверки указанной гипотезы.

Установление степени нелинейности колебаний сооружения

Несмотря на то, что обычные механические вибраторы даже при резонансных колебаниях не развивают существенного напряжения в материале сооружения, все же имеется возможность установить хотя бы слабые признаки нелинейности колебаний.

В этих целях обратимся к формуле (17) и вспомним, что для получения ее было положено $y_{1,ст}(x_s) = \frac{b \omega_1^2}{C_s}$,

где b — кинематический момент дебалансов;

C_s — коэффициент восстановления реакции в точке сооружения;

ω_1 — собственная частота основного тона.

Теперь, меняя значения b соответствующей перестановкой дебалансов в вибраторе в различные положения N будем иметь, согласно (17) амплитуду смещения i -ой собственной форме:

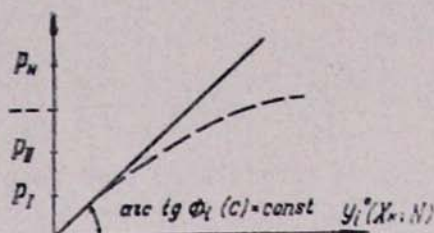


Рис. 2. Кривая „сила — перемещения“ при колебании сооружения

$$y_i^*(x_k, N) = \frac{b_N}{C_s} \omega_1^2 X_i(x_s) X_i(x_k) \frac{\pi}{\delta_i}. \quad (30)$$

Пусть $b_N = \omega_1^2 = P_N$

есть сила вибратора при достижении им частоты $\omega_1 = P$ при данной N ступени установки дебаланса. Обозначая

$$\Phi_i(C) = \frac{C_s}{X_i(x_s) X_i(x_k) \frac{\pi}{\delta_i}},$$

которая со своей стороны есть функция жесткости сооружения, получим

$$P_N = \Phi_i(C) y_i^*. \quad (31)$$

При упруго-линейных колебаниях график зависимости по (30) был бы прямолинейным (сплошная линия на рис. 2), т. е. имели бы

$$\Phi_i(C) = \text{Const.}$$

Но при упруго-нелинейной деформации, имеем

$$\Phi_i(C) = \frac{P_N}{y_i^*(x_k, N)} \neq \text{Const} \quad (32)$$

и график по (32) будет криволинейным (пунктир на рис. 2). Эту кривую можно аппроксимировать, например, следующей общепринятой зависимостью:

$$\Phi_i(C) = C_0 - a_i y_i^2(x_k, N)$$