ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ։ ԱՐՅԱՆ ՇՐՋԱՆԱՌՈՒԹՅՈՒՆ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР, КРОВООБРАЩЕНИЕ

XVIII, № 4, 1985 г.

УДК 611.1:539.3

М. М. ЛЕРНЕР

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В МЕХАНИКЕ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА

Целью настоящей работы является оценка эффектов нелинейности, определение границы применимости и погрешностей упрощенных моделей, в том числе известного в физиологии закона Лапласа.

Будем считать, что:

1) мышечная ткань однородна, изотропна, несжимаема [1];
2) связь «напряжение—деформация» ($\sigma \sim \delta$) нелинейная [3]—так называемая физическая нелинейность;
3) деформации, которые претерпевает левый желудочек (ЛЖ), конечны (до $\delta=0{,}4$)—так называемая геометрическая нелинейность;
4) ЛЖ представляется толстостенным полым шаром [1, 6];
5) для описания пространственного напряженно-деформированного состояния вводится функция энергии деформации.

$$W = C_1(\delta_r^2 + \delta_\theta^2 + \delta_\varphi^2) + C_2(\delta_r^2 + \delta_\theta^2 + \delta_\varphi^2),$$

где δ_i — главные относительные удлинения; r, θ, φ — сферические координаты.

Введение такой функции позволяет описать характерную для кривой деформирования мягких биологических тканей постоянную выпуклость вниз [2]. При этом решения имеют удобный для исследования алгебраический вид.

Замкнутую систему уравнений модели можно получить, используя соотношения из [5]. В систему входят четыре уравнения относительно радиального—σ_r, циркулярного—σ_θ напряжений, внутримиокардиального давления—p, смещения стенки—u. Так как два из них—дифференциальные уравнения первого порядка, то решения зависят от двух постоянных А и К, определяемых из граничных условий. Метод решения такой системы изложен в [4] для цилиндрической модели ЛЖ.

Отметим, что существенным для решения является свойство несжимаемости, которое позволяет определить смещение стенки:

$$u = -r + \sqrt[3]{r^3 + 3A}, \qquad (1)$$

где, например, при задании смещения внутренней стороны

$$A = u_a a^2 + u_a^2 a + u_a^3/3. \tag{2}$$

Представление для σ_r по формуле Тейлора дает:

$$\sigma_r = -4C_1 \frac{A}{r^3}\left(1 + \frac{A}{2r^3}\right) - 16\left(\frac{A}{r^3}\right)^3\left(1 - \frac{23}{16}\frac{A}{r^3}\right) + K\left(1 + \frac{2A}{r^3}\right). \tag{3}$$

Здесь $\frac{A}{r^3}$ имеют порядок деформаций. Такое разложение позволяет провести сравнение с решениями в упрощенной постановке.

Так, в физически нелинейной, но геометрически линейной постановке

$$\sigma_r = -4C_1\frac{A}{r^3} - 16C_2\left(\frac{A}{r^3}\right)^3 + K, \tag{4}$$

$$\sigma_\theta = 2C_1\frac{A}{r^3} + 56C_2\left(\frac{A}{r^3}\right)^3 + K, \tag{5}$$

$$p = 32C_2\left(\frac{A}{r^3}\right)^3 + K. \tag{6}$$

Из (6) видно, что изменение внутримиокардиального давления по толщине стенки есть проявление нелинейного эффекта. Кроме того, в нелинейной постановке существенны различия для радиального и циркулярного напряжений, что видно из сравнения (5) и (4).

Постоянная А может определяться аналогично (2):

$$A = u_a a^2$$

При задании внутриполостного давления и наружного

$$A = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + g^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + g^3}}, \tag{8}$$

где $$q = -\frac{P_a - P_b}{32C_2(a^{-9} - b^{-9})}, \qquad g = \frac{C_1\, a^{-3} - b^{-3}}{12C_2\, a^{-9} - b^{-9}}$$

Выражения (4), (5), (6) принимают, независимо от того, какое из значений — (7) или (8) — используется, следующий вид:

$$\sigma_r = -4C_1A\,(r^{-3} - a^{-3}) - 16C_2A^3(r^{-9} - a^{-9}) - P_a, \tag{9}$$

$$\sigma_\theta = 2C_1A\,(r^{-3} + 2a^{-3}) + 8C_2A^3(7r^{-9} + 2a^{-9}) - P_a, \tag{10}$$

$$p = 4C_1Aa^{-3} + 16C_2(2r^{-9} + a^{-9}) - P_a \tag{11}$$

Формулы (9)—(11) будут верны, если в них произвести одновременно замену a на b и P_a на P_b.

При чисто нелинейном описании ($C_1 = 0$)

$$\sigma_r = \frac{P_a - P_b}{a^{-9} - b^{-9}}(a^{-9} - r^{-9}) - P_a, \tag{12}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_a - P_b}{2} \frac{7r^{-9} - 2a^{-9}}{a^{-9} - b^{-9}} - P_a, \tag{13}$$

$$p = \frac{P_a - P_b}{a^{-9} - b^{-9}} (2r^{-9} + a^{-9}) - P_a. \tag{14}$$

Эти соотношения удобны тем, что не зависят от C_2 и могут быть использованы для оценки напряжений совместно с аналогичными выражениями при чисто линейном описании ($C_2=0$), совпадающими с решениями классической задачи Ламе:

$$\sigma_r = \frac{P_a - P_b}{a^{-3} - b^{-3}} (a^{-3} - r^{-3}) - P_a, \tag{15}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_a - P_b}{2} \frac{2a^{-3} + r^{-3}}{a^{-3} - b^{-3}} - P_a, \tag{16}$$

$$p = \frac{P_a - P_b}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^3} - P_a. \tag{17}$$

Циркулярное напряжение на внутренней стороне ($r=a$) по формуле (16) составляет 0,8 от радиального, рассчитываемого по (15). Аналогичное соотношение для (13) и (12) равно 3,5, т. е. напряжение на внутренней стороне в такой нелинейной модели превышает в 4,4 раза напряжение в линейной постановке.

Среднее циркулярное напряжение $\bar{\sigma}$, рассчитываемое по (13) или (16), определяется следующим выражением:

$$\bar{\sigma} = \frac{P_a a^2}{b^2 - a^2} = \sigma_L = \frac{1}{4} \frac{P_a}{1 + \frac{h}{2a}}, \tag{18}$$

где $$h = b - a, \qquad b_L = \frac{P_a a}{2h}. \tag{19}$$

Выражение (19) представляет собой известный закон Лапласа. Помимо циркулярного и радиального напряжений, внутримиокардиального давления, важнейшей характеристикой ЛЖ является соотношение «трансмуральное давление—объем». Оно легко получается при использовании (7) совместно со следующим представлением для u_a:

$$u_a = a(\sqrt[3]{W} - 1), \quad \text{где} \quad W = \frac{V}{V_0}, \quad V_0 = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

$$\frac{\Delta P}{1 - e^9} = 4C_1(1 + e^3 + e^6)(\sqrt[3]{W} - 1) + 16C_2(\sqrt[3]{W} - 1)^3, \tag{20}$$

где $e = \frac{a}{b}$. В обозначении $W_1 = W - 1 = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0}$ представление по формуле Тейлора для кубического корня дает следующее соотношение—«трансмуральное давление—относительный объем» ($\Delta p \sim W_1$):

$$\frac{\Delta P}{1-e^9} = \frac{4}{3} C_1 (1 + e^3 + e^6)^{-1} W_1 + \frac{16}{27} C_2 W_1^3. \tag{21}$$

Приближенное соотношение „$P_a - W_1$" ($e < 1$, $1 + e^3 + e^6 \approx 1$, $1 - e^9 \approx 1$), не зависящее от размеров желудочка, имеет вид:

$$\Delta P = \frac{4}{3} C_1 W_1 + \frac{16}{27} C_2 W_1^3. \tag{22}$$

Аналогичные выражения в чисто нелинейном случае ($C_1 = 0$) записываются следующим образом:

$$\Delta P = 4C_2 (1 - e^9) (\sqrt[3]{W} - 1)^3, \tag{23}$$

$$\Delta P = \frac{16}{27} C_2 (1 - e^9) W_1, \tag{24}$$

$$\Delta P = \frac{16}{27} C_2 W_1^3. \tag{25}$$

В чисто линейном случае:

$$\Delta P = 4C_1 (1 - e^3) (\sqrt[3]{W} - 1), \tag{26}$$

$$\Delta P = \frac{4}{3} C_1 (1 - e^3) W_1, \tag{27}$$

$$\Delta P = \frac{4}{3} C_1 W_1. \tag{28}$$

Из формул (20)—(28) следует, что истинная выпуклая вниз зависимость «давление—объем» описывается только нелинейной теорией. Линейная теория дает выпуклую вверх (26) почти линейную зависимость (27). Путем подбора постоянных C_1 и C_2 аппроксимируется экспериментальная кривая.

Так, при использовании (20) и данных [1]

$$C_1 = 2 \text{ г/см}^2; \qquad C_2 = 11{,}36 \text{ г/см}^2.$$

Постоянные C_1 и C_2 могут быть определены из экспериментов на изолированных полосках миокарда.

В геометрически линейной теории модуль Юнга E в силу предположения о несжимаемости пропорционален C_1: $E = 3C_1$, а C_1 представляет собой модуль сдвига. В линейном случае значение C_1 соответствует результатам, полученным [1, 2].

Следует отметить, что соотношение (3) допускает определение постоянных A и K из граничных условий, но их представление в случае задания P_a и P_b довольно громоздко. Поэтому для решений по формуле

(3) может быть применен метод последовательных приближений с начальным приближением по формуле (4) или даже (12). Возможность выбора (12) в качестве начального приближения обусловлена тем, что сердечная мышца обладает сильно нелинейными упругими свойствами. Из сравнения (3) и (4) следует также то, что «физически» нелинейное решение описывает в данной постановке те же эффекты, что и «геометрически» нелинейное решение, уступая последнему в точности.

Таблица I

Основные этапы упрощения

Название этапа	Воспроизводимые эффекты	Номера формул
Физически нелинейная, но геометрически линейная теория	I. Переменность по толщине стенки окружного и радиального напряжения	(4), (5), (12), (13)
	II. Нелинейная зависимость „давление—объем“	(20)—(25)
	III. Переменность внутримиокардиального давления по толщине стенки	(6), (11), (14)
	IV. Существенное превышение окружного над радиальным напряжением	(4) и (5), (9) и (12) и (13)
Физически и геометрически линейная теория	I. Переменность по толщине стенки окружного и радиального напряжения	(15), (16)
	II. Линейная зависимость „давление—объем“	(26)—(28)
Закон Лапласа	I. Среднее напряжение в стенке	(19)

Последовательность упрощения решений, эффекты, воспроизводимые на каждом этапе, видны из табл. 1.

Таблица позволяет выбрать нужную расчетную формулу в зависимости от интересующих соотношений.

Куйбышевский медицинский институт

Поступила 28/V 1984 г.

Մ. Մ. ԼԵՐՆԵՐ

ՍՐՏԻ ՁԱԽ ՓՈՐՈՔԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ամփոփում

Ցույց է տրված, որ միայն ոչ գծային դասավորությամբ է հնարավոր դառնում ներսրտամկանային ճնշման փոփոխականությունը պատի հաստության վրա, ցիրկուլյար լարվածության բարձրացումը ռադիալի նկատմամբ «ճնշում-ծավալ» կախվածության կորագծի ուռուցիկությունը դեպի ցած: Բերված բանաձևերը ունեն բավական հասարակ հանրահաշվական տեսք:

M. M. Lerner

Nonlinear Effects in the Mechanics of the Heart Left Ventricle

Summary

It is shown that in nonlinear propounding the variability of the intramyocardial pressure is observed and the significant increase of the circular exertion over the radial one is obvious. Rather simple algebraic formulas are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров С. А., Коваленко В. Н., Козлов В. А., Рудинская А. И.* Кровообращение, 1, 1982, 3—6. 2. *Изаков В. Я., Иткин Т. П., Мархасин В. С., Штейнгольд Е. Ш., Шумаков В. И., Ясников Т. П.* Биомеханика сердечной мышцы. М., Наука, 1981. 3. *Коваленко В. Н., Владимиров С. А., Рудинская А. И.* Кровообращение, 3, 1980, 12—16. 4. *Лернер М. М., Колокольчиков В. В.* Тезисы III Всесоюзной конференции по проблемам биомеханики.—Рига, 1983, 1, 39—40. 5. *Новожилов В. В.* Теория упругости.—Л., Судпромгиз, 1958, 6. *Парин В. В., Меерсон Ф. З.* Напряжение миокарда и функциональный резерв сердца. М., Медицина, 1962.

УДК 616—076.4:611.127:576.8.097.29

Э. А. БАРДАХЧЬЯН, Ю. Г. КИРИЧЕНКО

ПОВРЕЖДЕНИЕ МИОКАРДА В ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ ПЕРИОД ЭНДОТОКСИНОВОГО ШОКА (светооптическое и электронномикроскопическое исследование)

Необходимость изучения механизмов септического шока выдвигает на первый план разработку патогенеза его экспериментальной модели—эндотоксинового шока, причем особое внимание уделяется состоянию сердечно-сосудистой системы.

В настоящей работе, являющейся продолжением предыдущих исследований [1, 2, 7], проведено комплексное гистологическое, гистохимическое и электронномикроскопическое изучение миокарда кроликов и собак спустя 5 час (промежуточный период шока) после введения эндотоксина.

Материал и методы. Эндотоксиновый шок получали у 20 собак и 5 кроликов по ранее описанной методике [2]. В качестве контроля использовали животных (4 собаки и 2 кролика), которым вводили стерильный физиологический раствор. Артериальное давление регистрировали с помощью ультразвукового датчика давления прямым методом [6] и результаты обрабатывали методом вариационной статистики. С целью изучения сосудистой проницаемости за 20—30 мин до забоя всем животным вводили Fe LEK [10]. Взятие материала производили тотчас после инъекции летальной дозы нембутала.

Для гистологических и гистохимических исследований кусочки миокарда из обоих предсердий и желудочков фиксировались в 10% нейтральном формалине и жидкости Карнуа. Парафин-целлоидиновые срезы окрашивали гематоксилин-эозином. В свежезамороженных срезах определялась активность сукцинатдегидрогеназы (СДГ) по Шелтону и Шнейдеру, щелочной и кислой фосфатаз по Гомори, аденозинтрифосфатазы (АТФ-азы) по Падикула и Герман [4]. Материал для электронной микроскопии (из тех же кусочков, что и для световой микро-