

В. Н. КОВАЛЕНКО, С. А. ВЛАДИМИРОВ, А. И. РУДИНСКАЯ

НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ ОБРАЗЦА СЕРДЕЧНОЙ СТЕНКИ ПРИ СЖАТИИ

Упругие свойства миокарда изучены в основном при растяжении изолированных участков сердечной мышцы [1—3, 5—8].

Целью настоящей работы является установление закона связи между напряжениями и деформациями для образца сердечной стенки при сжатии.

Изучение упругих свойств миокарда проведено на сердцах 30 собак. Для эксперимента вырезался кусочек сердечной стенки размерами 1×1×1 см тотчас после смерти животного. Многочисленные эксперименты нагружения кусочков различных участков сердечной стенки показали, что сердечная стенка является однородной и изотропной системой. Это дало основание изучать упругие свойства на одном образце сердечной стенки, который вырезался из средней трети передне-боковой стенки левого желудочка. Основным результатом, установленным экспериментально, является тот факт, что процесс деформации обратим, но связь между напряжениями и деформациями существенно нелинейна.

В процессе изучения механических характеристик миокарда проведены эксперименты 2 типов: создавалось одноосное напряженное состояние и двухосное напряженное состояние. В первом варианте опытов образец сердечной стенки нагружался последовательно силой P_1 ($P_1 = 1; 3; 5; 10; 20; 50$ гр) в направлении 1—1 (рис. 1). Во втором варианте — все то же, и в направлении 2—2 исключалось перемещение (рис. 2). На каждом этапе нагружения производилось измерение перемещений Δl_1 в направлении действия силы. Так как в процессе эксперимента перемещения достигают больших значений, то деформация ε_1 вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_1 = \Delta l_1 + \frac{(\Delta l_1)^2}{2}, \quad (1)$$

которая следует из формул 5. 10 [4] и справедлива для любых деформаций. В начале нагружения при малых деформациях можно принять, что $\varepsilon_1 \approx \Delta l_1$.

Для каждого значения P_1 определялось напряжение по формуле:

$$\sigma = \frac{P_1}{F_{23}}, \quad (2)$$

где F_{23} —площадь поперечного сечения деформированного образца в плоскости, перпендикулярной действию силы P_1 .

Для нахождения F_{23} использовалось условие сохранения объема ткани сердечной мышцы при деформации:

$$(1 + \Delta l_1)(1 + \Delta l_2)(1 + \Delta l_3) = 1 \quad (3)$$

Из (3) следует, что:

$$F = \frac{1}{1 + \Delta l_1} \quad (4)$$

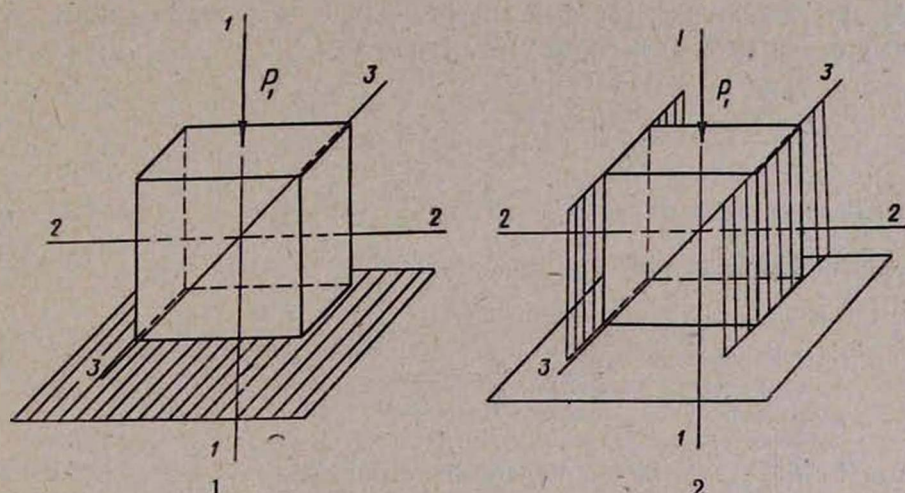


Рис. 1. Одноосное напряженное состояние. 1-1—направление действия силы по длине сердечной стенки, 2-2—направление действия силы по окружности сердечной стенки, 3-3—направление действия силы по толщине сердечной стенки.

Рис. 2. Двухосное напряженное состояние. 1-1—направление действия силы по длине сердечной стенки, 2-2—направление действия силы по окружности сердечной стенки, 3-3—направление действия силы по толщине сердечной стенки.

Статистически обработанные результаты экспериментов и вычисления, проведенные по формулам (1) и (2), представлены в табл. 1 и на рис. 3. Кривые (1) и (2) на рис. 3 показывают, что связь между напряжениями и деформациями существенно нелинейна. Известно, что эта связь может быть установлена через потенциальную энергию деформации U .

Потенциальная энергия изотропного тела зависит лишь от инварианта тензора деформации, которые в главных осях имеют следующий вид:

$$J_1 = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i; \quad J_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \epsilon_i^2; \quad J_3 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \quad (5)$$

Таблица 1

Одноосное напряженное состояние (обозначения в тексте)

№	$P_1(\text{r})$	$\Delta \bar{l}_1(\text{cm})$	$\bar{\varepsilon}_1$	$\bar{\sigma}_1(\text{r/cm}^2)$
1	-1	-0,05	-0,05	-0,95
2	-2	-0,10	-0,10	-1,82
3	-3	-0,15	-0,14	-2,54
4	-5	-0,26	-0,23	-3,70
5	-10	-0,39	-0,25	-7,00
6	-20	-0,32	-0,27	-13,60
7	-50	-0,35	-0,29	-32,50

В нашей задаче будем считать U функцией только одной переменной J_2 . Для достаточно хорошей аппроксимации экспериментальных кривых $\sigma_1 - \varepsilon_1$ (рис. 3) воспользуемся формулой:

$$\sigma_k - p = \frac{dU}{dJ_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon_k} = \frac{dU}{dJ_2} \cdot \varepsilon_k, \quad (6)$$

которая следует из формулы 2.13 [4].^{*} Здесь $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, а $\frac{dU}{dJ_2}$ хорошо аппроксимируется выражением

$$\frac{dU}{dJ_2} = \frac{\frac{2}{3} E_0}{1 - \left(\frac{J_2}{J_2^*}\right)^2}, \quad (7)$$

где E_0 и J_2^* — константы, подлежащие определению из эксперимента. Теперь закон связи (6) с учетом (7) принимает форму

$$\sigma_k - p = \frac{\frac{2}{3} E_0}{1 - \left(\frac{J_2}{J_2^*}\right)^2} \cdot \varepsilon_k, \quad (8)$$

которая при $J_2 \ll J_2^*$ переходит в линейный закон Гука для несжимаемого материала.

Таблица 2

Двухосное напряженное состояние (обозначения в тексте)

№	$P_1(\text{r})$	$\Delta \bar{l}_1(\text{cm})$	$\bar{\varepsilon}_1$	$\bar{\sigma}_1(\text{r/cm}^2)$
1	-1	-0,03	-0,03	-0,97
2	-2	-0,06	-0,06	-1,92
3	-3	-0,11	-0,10	-2,68
4	-5	-0,16	-0,14	-4,20
5	-10	-0,20	-0,18	-8,00
6	-20	-0,24	-0,21	-15,15
7	-50	-0,27	-0,24	-36,59

$$\sigma_k - p = \frac{2}{3} E_0 \varepsilon_k, \quad (9)$$

где E_0 — модуль Юнга.

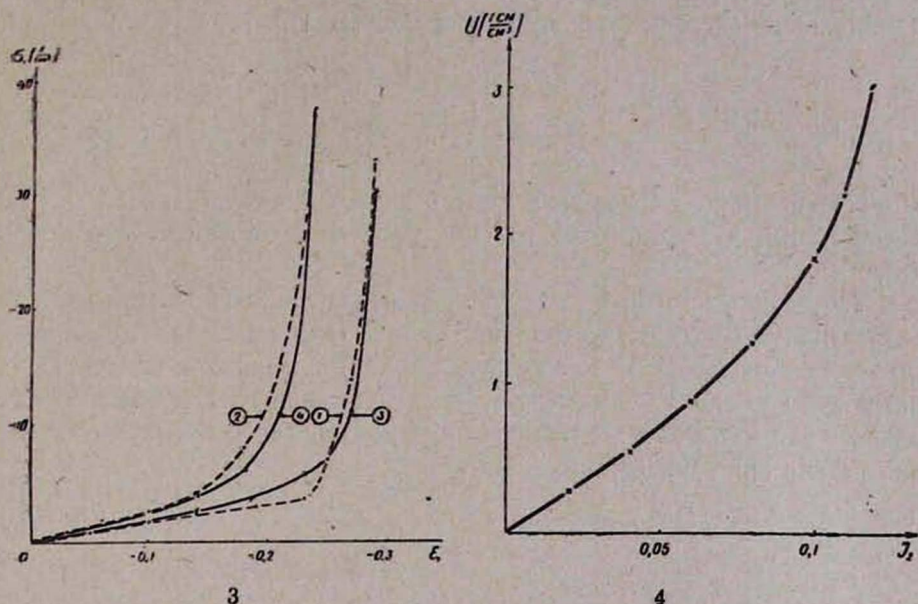


Рис. 3. Связь между напряжениями и деформациями в одноосном и двухосном напряженном состоянии. 1—экспериментальная кривая (одноосное напряженное состояние), 2—экспериментальная кривая (двухосное напряженное состояние), 3—теоретическая кривая (одноосное напряженное состояние), 4—теоретическая кривая (двухосное напряженное состояние).

Рис. 4. Зависимость удельной потенциальной энергии миокарда от второго инварианта тензора деформации.

При J_2 , стремящемся к J_2^* , σ_k стремится к бесконечности, что совпадает с характером поведения экспериментальных кривых 1 и 2 (рис. 3). E_0 определено по начальным точкам нагружения, где справедлив линейный закон Гука. При этом для одноосного напряженного состояния $E_0 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$, для двухосного $E_0 = \frac{3}{4} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$. Расчеты показали,

что $\bar{E}_0 = 20,3$ гр/см²: доверительный интервал (17,8; 22,8) при уровне надежности 0,95. Среднее значение $\bar{J}_2^*$ находим по последним точкам нагружения, используя для одноосного напряженного состояния формулу $\sigma_1 = \frac{E_0 \varepsilon_1}{1 - \left(\frac{J_2}{J_2^*}\right)^2}$, для двухосного—формулу $\sigma_1 = \frac{4}{3} \frac{E_0 \varepsilon_1}{1 - \left(\frac{J_2}{J_2^*}\right)^2}$,

вытекающие из (8). При вычислении $\bar{J}_2$ по (5) использовалось условие сохранения объема в виде $(1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3) = 1$. Расчет показал, что $\bar{J}_2 = 0,127$ с доверительным интервалом (0,120; 0,134)

при уровне надежности 0,95. По формуле (8) с использованием констант $\bar{E}_0$ и $\bar{J}_2^*$ построены кривые, связывающие напряжение и деформацию в одноосном и двухосном напряженном состоянии (рис. 3).

Из полученных результатов следует выражение для удельной потенциальной энергии деформации миокарда U .

$$U = \int_0^{J_2} dU = \frac{2}{3} E_0 \int_0^{J_2} \frac{dJ_2}{1 - \left(\frac{J_2}{J_2^*}\right)^2} = \frac{E_0 J_2^*}{3} \ln \left(\frac{J_2^* + J_2}{J_2^* - J_2} \right) \quad (10)$$

По (10) построен график зависимости удельной потенциальной энергии деформации в зависимости от инварианта J_2 тензора деформации (рис. 4).

Таким образом, показано, что сердечная стенка может рассматриваться как однородное изотропное упругое тело, описываемое нелинейным законом связи (8) между деформациями и напряжениями. Предлагаемые способы расчета могут быть использованы для оценки радиальных напряжений в миокарде и оценки упругой деформации сердечной стенки при сокращении.

Днепропетровский медицинский институт

Поступила 5/V 1979 г.

Վ. Ն. Կովալենկո, Ս. Ա. Վլադիմիրով, Ա. Ի. Ռոուդինսկայա

ՄՐՏԻ ՊԱՏԻ ՕՐԻՆԱԿԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՍԵՂՄՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա. մ. փ. n. փ. n. i. մ

Հաստատված է, որ սրտի պատի հյուսվածքը կարող է դիտվել որպես միասին իզոտրոպ մարմին, որը նկարագրվում է ղեֆորմացիայի և լարվածության կապի միջև եղած օրենքով. Նշանակված է բանաձև սրտի պատի առաձգականության ղեֆորմացիայի էներգիան հաշվելու համար:

V. N. Kovalenko, S. A. Vladimirov, A. I. Roudinskaya

Unilinear Elasticity of the model of the Cardiac wall in Compression

S u m m a r y

It is established that the tissue of the cardiac wall may be regarded as a homogeneous isotropic body. The formula of calculation of the energy of elastic deformation of the cardiac wall is received.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Капелько В. И. Кардиология, 1971, 11, 89—96.
2. Капелько В. И. Тр. ин-та норм. и патол. физиол. АМН СССР, 1971, 14, 131—132.
3. Капелько В. И. Автореф. дисс. докт., М., 1978.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. I—II, М., «Наука», 1973.
5. Beese P. Arch. Mal. Coer., 1939, 62, 3, 352—384.
6. Hill A. V. Proc. roy. Soc., 1949, 13, 6, 399—420.
7. Mirsky J., Parmley W. W. Circulat. Res., 1973, 33, 2, 233—243.
8. Penefsky Z. J., Hoffman B. E. Am. J. Physiol., 1963, 204, 3, 433—438.