

В. Б. ПАРАШИН, О. Н. РОДИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АОРТАЛЬНОГО КРОВОТОКА

Работа посвящена анализу влияния нелинейности сопротивления сердечного клапана на характер переходных процессов давления и кровотока в модели аорты, что необходимо для искусственных клапанов. Примеры характеристик «перепад давления—расход» для некоторых типов клапанов приведены на рис. 1 [1].

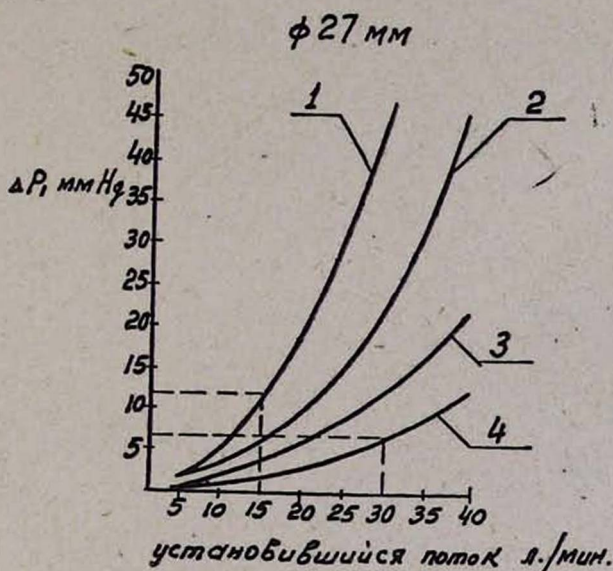


Рис. 1.

Рассмотрим отражение нелинейности на характере переходных процессов аортального кровотока в систолу. Электрическая модель сердца и аорты представлена на рис. 2. Желудочек сердца моделируется генератором импульса давления прямоугольной формы с амплитудой P_1 , аорта—емкостью C , диод D учитывает одностороннюю проводимость клапана. Перепад давления на нелинейном сопротивлении K связан с расходом Q зависимостью $P_1 - P = KQ^2$, которой могут быть аппроксимированы графики, приведенные на рис. 1. При этом значения коэффициентов K для кривых 1—4 равны соответственно:

$$K_1 = 1,52 \cdot 10^{-4}; K_2 = 0,88 \cdot 10^{-4}; K_3 = 0,48 \cdot 10^{-4}; K_4 = 0,24 \cdot 10^{-4} \frac{\text{мм рт. ст.}}{\text{млк}},$$

а погрешность аппроксимации (в пределах 5—30 л/мин), приведенная к максимальному для данной кривой перепаду давления, не превышает $\pm 5\%$.

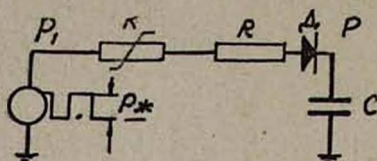


Рис. 2.

С другой стороны, расход через емкость $Q = cP'$. Отсюда получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c\sqrt{k}} \cdot \sqrt{p_1 - p},$$

которое легко интегрируется. Если принять, что начальное давление в аорте P_0 , то

$$Q = \frac{2c\sqrt{k} \sqrt{p_1 - P_0} - t}{2ck} \cdot \gamma(t);$$

$$p = p_1 - kQ^2$$

при

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

Решение уравнения с получением графиков $P(t)$ и $Q(t)$ осуществлялось на АВМ МН-18. Параметры модели:

$$R = 0,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{мм рт. ст.}}{\text{мл/с}},$$

$$C = 2,5 \frac{\text{мл}}{\text{мм рт. ст.}};$$

$$K = 1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{мм рт. ст.}}{\text{мл/с}};$$

$$P_0 = 80 \text{ мм рт. ст.}; \quad P_1 = 120 \text{ мм рт. ст.}$$

K —среднее значение для графиков, приведенных на рис. 1. Значения P_0 и P_1 соответствуют физиологической норме. Величина C характеризует эластичность аорты. Принятое числовое значение C несколько больше, чем обычно приводимое в литературе, равное (1,3—1,5)

$\frac{\text{мл}}{\text{мм рт. ст.}}$. Это связано с допущением отсутствия оттока из аорты в систолу.

В модель введено также небольшое омическое сопротивление R , соответствующее гидравлическому сопротивлению аорты. Записанные на модели графики приведены на рис. 3.

Можно сказать, что модель качественно правильно передает характер кривой аортального кровотока, которая в эксперименте скачкообразно возрастает, а затем линейно спадает либо до нуля, либо до ненулевого значения [2, 3].

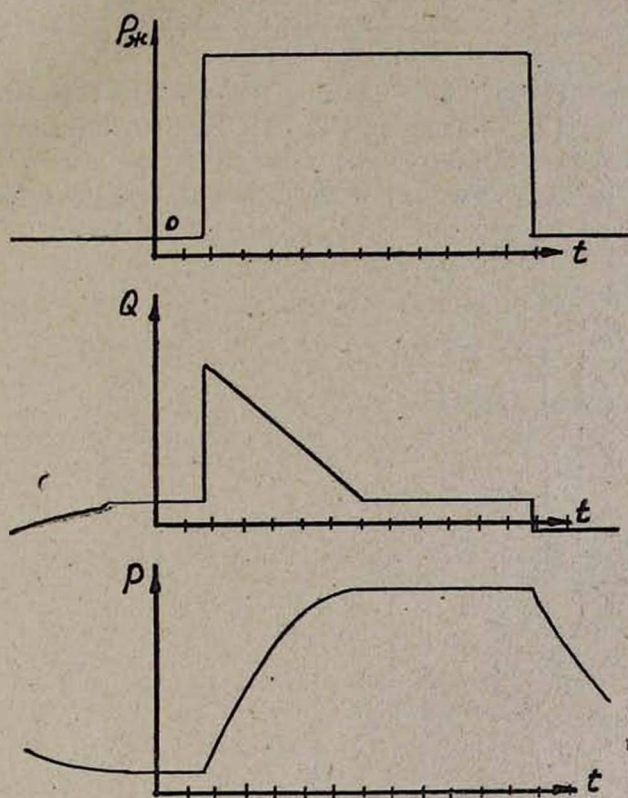


Рис. 3.

Исходя из приведенных ранее параметров модели, получим начальный расход около $600 \frac{\text{мл}}{\text{с}}$ или $36 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$, время завершения кровотока около 0,3 сек. и ударный объем 90 мл. Две последние величины очень близки к физиологическим, а начальный расход явно завышен по сравнению с полученным в опытах. Причиной расхождения является неучет инерционности массы крови.

Чтобы учесть ее, введем в модель последовательно между R и C индуктивность L . Тогда дифференциальное уравнение для P примет вид:

$$\sqrt{\frac{P_1 - LC \cdot p'' - P}{k}} = CP'$$

Возводя в квадрат и заменяя переменную $P_1 - P = x$, перепишем уравнение в виде: $LC \cdot x'' + kC^2 \cdot (x')^2 + x = 0$

Оно легко интегрируется [4] в виде функции, связывающей P' и P :

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = \frac{e^{\frac{2kC}{L}(P_0 - P)} \left(P_0 - P_1 - \frac{L}{2kC} \right) + \left(\frac{L}{2kC} - P + P_1 \right)}{kC^2}$$

Это уравнение можно исследовать численно, задавшись определенной величиной L . Точная оценка L для аорты затруднена и сводится к учету так называемой присоединенной массы, движущейся в каждый данный момент времени. L для больших сосудов имеет порядок

$$10^{-3} \frac{\text{мм рт. ст.}}{\text{мл}} \quad [5,6]$$

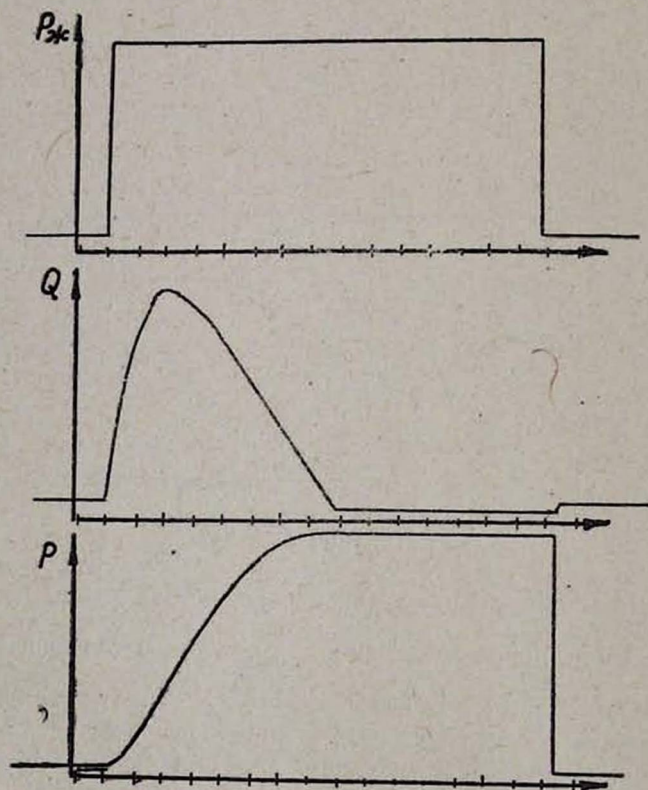


Рис. 4.

Принимая ее для расчетов (остальные параметры такие же, как в предыдущем случае), найдем, что максимальный расход будет при $P = 82$ мм рт. ст. (время, соответствующее этому давлению, ≈ 0) и ра-

вен примерно $30 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$, что близко к экспериментальным данным. При достижении максимума расход линейно уменьшается практически по такой же линейной функции, как в предыдущем случае.

Для получения графиков $P(t)$ и $Q(t)$ уравнение решалось также на АВМ. Графическое изображение решения приведено на рис. 4.

В заключение заметим, что полученный результат позволяет сделать вывод о характере течения крови через естественный аортальный клапан, которое трудно исследовать непосредственно. Поскольку характер кривой кровотока через естественный клапан [7] такой же, как и через искусственный (т. е. резкий скачок и линейный спад), можно заключить, что и течение через естественный аортальный клапан тоже турбулентное.

Институт трансплантации органов и тканей МЗ СССР

Поступило 20/X 1976 г.

Վ. Բ. ՊԱՐԱՇԻՆ, Օ. Ն. ՌՈԴԻՆ

ԱՌՐՏԱԼ ԱՐՅԱՆ ՀՈՍՔԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈՂԵԼԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

ԱՀՄ-ի օգնությամբ մաթեմատիկական մոդելի վրա առանձնապես է սրտային փականի դիմադրության ոչ գծայնության ազդեցությունը աորտայում արյան հոսքի և ճնշման կորերի պարամետրերի ու ձևի վրա:

V. B. PARASHIN, O. N. RODIN

MATHEMATICAL MODEL OF AORTAL BLOOD FLOW

S u m m a r y

The influence of unlinear resistance of cardiac value on the form and parameters of pressure curves and blood flow in aorta has been studied on mathematical model using the computer.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Андронов А. А. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
2. Beneken J. E. W., De Wit Physical bases of circulatory transport. London, 1967.
3. Pulsatile blood flow, N.-Y., 1964.
4. Rusmer R. Cardiovascular dynamics. N.-Y., 1961.
5. Trans. am. soc art. int organs (Tasalo), 16, 224—227, 1970.
6. Tasalo, 17, 482—489, 1971.
7. Tasalo, 15, 245—251, 1969.