

Г. З. МИКАЕЛЯН

К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА, ПРОТЕКАЮЩЕГО В АОРТАЛЬНОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ КРОВООБРАЩЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА

Математическое моделирование сердечно-сосудистой системы или ее частей сводится к отысканию и исследованию зависимости между кровяным давлением и кровотоком в организме в целом или в ограниченном участке гемодинамической цепи [3—5, 12, 14, 16, 18 и др.]. В большинстве исследований принимается теория «эластичного резервуара» [4, 5, 11, 16, 21, 23, 25, 26, 33 и др.]. Другое направление математического описания гемодинамических процессов учитывает непрерывное изменение по направлению движения крови геометрических и физических характеристик кровеносных сосудов и более точно описывает пульсирующие изменения давления и кровотока [3, 20, 24, 30, 34, 35 и др.]. В последние годы в некоторых исследованиях обоих направлений учитывается регуляция в сердечно-сосудистой системе [8, 9, 12, 15, 16, 22 и др.].

Анализ предложенных моделей системы кровообращения [18] показывает, что успехи, достигнутые на этом пути, далеко не отвечают имеющимся возможностям. В связи с этим весьма важно более глубокое понимание процессов, протекающих в кровеносном русле человеческого организма, и создание точной математической теории кровообращения. От решения этих вопросов зависят в известной мере успехи диагностики заболеваний и хирургии сердечно-сосудистой системы.

В настоящей работе рассматривается процесс, протекающий в аорте человека под воздействием работы сердца, аортальной оболочки и смежных ветвей артериального дерева.

Предполагается, что в сердечно-сосудистой системе реализуется такой режим циркуляции крови, при котором поставленная цель достигается при наименьших затратах энергии [9, 17].

Учитывается, что стенка кровеносного сосуда содержит в себе источник энергии в виде сокращающихся мышц. Принимается, что в течение определенного промежутка времени диастолической фазы происходит активное сокращение артериального дерева [10].

Аорта считается линейно-упругим резервуаром, находящимся под действием равномерно распределенных давлений [10, 25]. Используется также обычное предположение о несжимаемости крови.

1. Пусть в аорте протекает некоторый процесс изотермического изменения фазового состояния крови. В каждый момент времени t состо-

яние крови, находящейся в аорте, можно характеризовать объемом V и давлением в аорте P .

В силу принятых предложений для описания рассматриваемого процесса будем пользоваться следующими уравнениями и соотношениями.

Закон изменения объема крови в аорте

$$V = V_0 + C (P - \psi(t)). \quad (1.1)$$

Скорость изменения объема крови в аорте

$$\frac{dv}{dt} = Q(t) - F(t) - Y(P - P_a(t)). \quad (1.2)$$

Условные периодичности изменения объема крови в аорте

$$\int_0^T [Q(t) - F(t) - Y(P - P_a(t))] dt = 0, \\ Y = \frac{\pi\gamma}{8\eta} \sum_{j=1}^m \frac{r_j^4}{J_j}, \quad P_a(t) = \sum_{j=1}^m \frac{r_j^4}{J_j} P_{aj}(t): \sum_{j=1}^m \frac{r_j^4}{J_j}, \quad (1.3)$$

где V — объем крови, находящейся в аорте при нулевой разности давлений, C — коэффициент эластичности аорты, $\psi(t)$ — функция, характеризующая закон активного сокращения оболочки аорты, $Q(t)$ — объемная скорость потока крови, вытекающей из сердца, $F(t)$ — объемная скорость обратного тока крови, связанного с закрыванием аортального клапана и оттоком крови в коронарные артерии, Y — общая гидравлическая проводимость начальных участков артерий, ответвляющихся от аорты, γ — безразмерный коэффициент, который зависит от характера движения крови (например, при ламинарном оттоке крови из аорты $\gamma=1$), η — вязкость крови, m — число сосудов, ответвляющихся от аорты, r_j и J_j — радиус и длина начального участка j -й артерии соответственно, $P_a(t)$ — обобщенное значение артериального давления для начальных участков артерий, ответвляющихся от аорты, $P_{aj}(t)$ — артериальное давление, измеренное в определенном сечении начального отрезка j -й артерии, T — продолжительность одного сердечного цикла.

Дифференцируя (1.2) по времени, с учетом (1.1) получаем

$$\frac{C}{Y} \frac{dx}{dt} + x = u(t), \quad (1.4)$$

где введены следующие обозначения:

$$x = \frac{dP}{dt}, \quad u(t) = u^1(t) + u^2(t) + u^3(t),$$

$$u^1(t) = \frac{1}{Y} \left(\frac{dQ(t)}{dt} - \frac{dF(t)}{dt} \right).$$

$$u^2(t) = \frac{C}{Y} \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}, \quad u^3(t) = \frac{dP_a(t)}{dt}. \quad (1.5)$$

Здесь x —параметр фазового состояния процесса, $u(t)$ —управление, $u^1(t)$, $u^2(t)$ и $u^3(t)$ —управляющие функции сердца, аорты и кровеносных сосудов соответственно.

Решение дифференциального уравнения (1.4) должно удовлетворять граничному условию

$$x = x_0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (1.6)$$

2. Будем считать, что управление $u(t)$ непрерывно для всех рассматриваемых t , за исключением лишь конечного числа моментов времени, расположенных на интервале $0 < t < T$, где функция $u(t)$ может терпеть разрывы первого рода [1].

Принимая кусочно-линейное приближение [6], функцию $u(t)$ можно представить в виде

$$u(t) = \sum_{i=0}^n u_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

где

$$u_i(t) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i)$$

$$\text{при} \quad t_i \leq t \leq t_{i+1},$$

$$u_i(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_i, \quad t_{i+1} \leq t \leq T;$$

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}, \quad t_0 = 0, \quad (2.2)$$

$$t_{n+1} = T, \quad u_i = u_i(t_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (1.4), с учетом (2.1), (2.2) и (1.6), находим

$$x(t) = \sum_{i=0}^n x_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

$$x_i(t) = u_i(t) - b_i \alpha^{-1} + (x_i - u_i + b_i \alpha^{-1}) \cdot$$

$$\cdot e^{-\alpha(t-t_i)} \quad \text{при} \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad (2.4)$$

$$x_i(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_i, \quad t_{i+1} \leq t \leq T,$$

$$\text{где} \quad \alpha = \frac{Y}{C}, \quad b_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{t_{i+1} - t_i},$$

$$x_i = x_i(t_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.5)$$

На основании первых соотношений (1.5), (2.5) и (1.1), (1.2) для изменения давления и объема крови в аорте получаем

$$P(t) = P_a(t) + \frac{1}{Y} (Q(t) - F(t)) - \frac{1}{\alpha} \left(x(t) + \frac{d\psi(t)}{dt} \right), \quad (2.6)$$

$$V(t) = V_0 + C(P(t) - \psi(t)). \quad (2.7)$$

3. Решение рассматриваемой задачи в основном зависит от функций $P_a(t)$, $Q(t)$, $F(t)$ и $\psi(t)$, разумный выбор которых может быть произведен на основе строгого учета результатов физиологических экспериментов, а также теоретических представлений о характере изучаемой зависимости.

В рассматриваемой задаче эмпирические функции должны быть выбраны таким образом, чтобы уравнение (1.4) имело периодическое решение с периодом T . Для этого необходимо выполнить условие

$$\int_0^T u(t) dt = 0. \quad (3.1)$$

Анализ результатов измерений на человеке [2, 27, 29, 30, 31, 33]* показывает, что функции $P_a(t)$, $Q(t)$, $F(t)$ и $\psi(t)$, с учетом условия периодичности процесса (3.1), могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} P_a &= -\frac{P_0 - P_1}{\tau_1} t + P_0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq \tau_1, \\ P_a &= -\frac{P_3 - P_1}{(\tau_3 - \tau_1)^2} (\tau_3 - t)^2 + P_3 \quad \text{при } \tau_1 \leq t \leq \tau_3, \\ P_a &= -\frac{P_3 - P_5}{(\tau_5 - \tau_3)^2} (t - \tau_3)^2 + P_3 \quad \text{при } \tau_3 \leq t \leq \tau_5, \\ P_a &= \frac{P_3 - P_5}{\tau_9 - \tau_5} (t - \tau_5) + P_5 \quad \text{при } \tau_5 \leq t \leq \tau_9, \\ P_a &= -\frac{P_9 - P_0}{T - \tau_9} (t - \tau_9) + P_9 \quad \text{при } \tau_9 \leq t \leq T, \\ Q &= -\frac{q_2}{(\tau_2 - \tau_1)^2} (\tau_2 - t)^2 + q_2 \quad \text{при } \tau_1 \leq t \leq \tau_2, \\ Q &= -\frac{q_3}{\tau_3 - \tau_2} (t - \tau_2) + q_3 \quad \text{при } \tau_2 \leq t \leq \tau_3, \\ F &= \frac{2q_3}{\tau_3 - \tau_2} (t - \tau_3) \quad \text{при } \tau_3 \leq t \leq \tau_4, \\ F &= 2q_3 \frac{(\tau_4 - \tau_3)(\tau_5 - t)}{(\tau_3 - \tau_2)(\tau_5 - \tau_4)} \quad \text{при } \tau_4 \leq t \leq \tau_5, \\ \psi &= \frac{2\psi_7}{(\tau_7 - \tau_5)^2} (t - \tau_5)^2 \quad \text{при } \tau_5 \leq t \leq \frac{\tau_5 + \tau_7}{2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

* Кроме результатов указанных исследований использована также обширная дополнительная информация, предоставленная нам сотрудниками Института кардиологии МЗ Арм. ССР.

Таблица 1

t сек.	P _a мрс (мм. рт. ст.)	Q см ³ /сек	F см ³ /сек	ψ мрс	ψ' мрс·сек	X мрс/сек	P мрс	ΔV см ³
τ ₀ =0,00	77,000	0	0	0	0	-30,000	79,580	4,522
τ ₁ =0,30000	68,000	0	0	0	0	-30,000	70,580	0,025
τ ₁ [*] =0,30086	68,216	14,484	0	0	0	0	70,535	0
τ ₂ =0,35000	79,181	40',000	0	0	0	629,097	93,879	11,672
τ ₂ [*] =0,47743	95,960	220,172	0	0	0	0	133,829	31,647
τ ₃ =0,54000	98,000	0	0	0	0	-305,331	124,258	26,861
τ ₄ =0,55600	97,539	0	67,368	0	0	-381,500	118,761	24,113
τ ₅ =0,64000	80,000	0	0	0	0	-202,933	97,452	13,458
τ ₅ [*] =0,64201	80,000	0	0	0,20	200	0	97,200	13,232
τ ₆ =0,65000	80,000	0	0	5,00	1000	763,404	100,347	12,406
τ ₆ [*] =0,65751	80,000	0	0	9,45	270	0	103,220	11,617
τ ₇ =0,66000	80,000	9	0	10,00	0	-264,438	102,742	11,103
τ ₈ =9,70000	80,000	0	0	5,00	-250	-366,040	89,979	7,222
τ ₉ =0,74000	80,000	0	0	0	0	-30,000	82,580	6,022
τ ₁₀ =0,84000	77,000	0	0	0	0	-30,000	79,580	4,522

Таблица 2

t сек	P _a мрс (мм. рт. ст.)	Q см ³ /сек	F см ³ /сек	X мрс/сек	P мрс	ΔV см ³
τ ₀ =0,00	77,000	0	0	-30,000	78,603	4,506
τ ₁ =0,30000	68,000	0	0	-30,000	70,608	0,506
τ ₁ [*] =0,30082	68,204	12,980	0	0	69,595	0
τ ₂ =0,35000	79,181	400,000	0	562,050	91,935	11,170
τ ₂ [*] =0,46743	95,224	248,316	0	0	121,843	26,124
τ ₃ =0,54000	98,000	0	0	-262,949	112,094	21,249
τ ₄ =0,55600	07,539	0	67,368	-319,363	107,435	18,920
τ ₅ =0,64000	80,000	0	0	-193,883	90,392	10,398
τ ₆ =0,65000	80,000	0	0	-160,923	88,945	9,675
τ ₇ =0,66000	80,000	0	0	-133,566	87,159	8,782
τ ₈ =0,70000	80,000	0	0	-63,300	83,393	6,899
τ ₉ =0,74000	80,000	0	0	-30,000	81,608	5,506
τ ₁₀ =0,84000	77,000	0	0	-30,000	78,608	4,506

$$\psi = - \frac{2\psi_7}{(\tau_7 - \tau_5)^2} (\tau_7 - t)^2 \quad \text{при } \frac{\tau_5 + \tau_7}{2} \leq t \leq \tau_7,$$

$$\psi = - \frac{2\psi_7}{(\tau_9 - \tau_7)^2} (t - \tau_7)^2 \quad \text{при } \tau_7 \leq t \leq \frac{\tau_7 + \tau_9}{2},$$

$$\psi = \frac{2\psi_7}{(\tau_9 - \tau_7)^2} (\tau_9 - t)^2 \quad \text{при } \frac{\tau_7 + \tau_9}{2} \leq t \leq \tau_9,$$

где

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_9 < T.$$

Заметим, что в остальных точках отрезка [0, T] каждая из функций Q(t), F(t), ψ(t) тождественно равна нулю.

4. Рассмотрим численный пример.

Пусть заданы управление и начальное состояние крови в аорте. Требуется определить законы изменения давления и объема крови в аорте во времени.

Имея в виду результаты работ [27—33], положим

τ ₁ = 0,30 сек	τ ₇ = 0,66 сек	p ₃ = 98 мрс
τ ₂ = 0,35 сек	τ ₈ = 0,70 сек	p ₅ = 80 мрс
τ ₃ = 0,54 сек	τ ₉ = 0,74 сек	p ₉ = 80 мрс
τ ₄ = 0,556 сек	T = 0,84 сек	q ₂ = 400 см ³ /сек
τ ₅ = 0,64 сек	p ₀ = 77 мм рт. ст.	C = 0,5 см ³ /мрс
τ ₆ = 0,65 сек	p ₁ = 68 мрс	ψ ₇ = 10 мрс

$$x = x_0 = -30 \text{ мрс/сек при } t = 0.$$

Результаты вычислений, выполненных на ЭЦВМ, приведены в табл. 1. На рис. 1 для наглядности представлены зависимости $P(t)$ и $\Delta V(t)$.

Сравнивая полученный результат для давления в аорте с аналогичными результатами измерений на человеке [27, 29—31], замечаем довольно значительное сходство.

Решение задачи без учета предположения об активном сокращении артериального древа приводит к результатам (табл. 2), которые правильно описывают лишь общий характер изменения аортального давления.

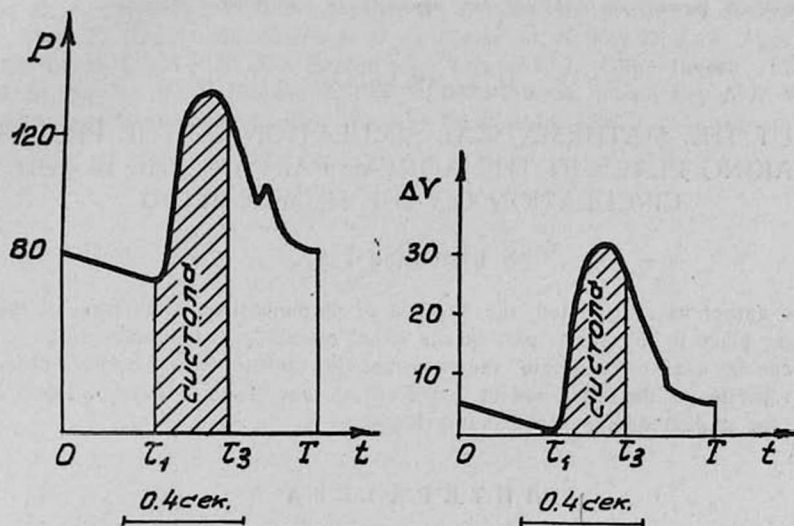


Рис. 1, 2.

Таким образом, в настоящей работе закон изменения кровяного давления в аорте связывается с возмущающим воздействием артериального древа.

В заключение заметим, что настоящая работа может быть использована для оценки сократительной функции миокарда, упругих свойств аорты и при разработке автоматического управления кровообращением больного во время оперативных вмешательств [7, 13, 19].

Հ. Զ. ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ

ՄԱՐԴՈՒ ԱՐՅԱՆ ՇՐՋԱՆԱՌՈՒԹՅԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ԱՌՏԱՅԻ ՀԱՏՎԱԾՈՒՄ
ՏՆԵՂԻ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐՈՑԵՍԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ն փ ու մ

Հեղինակը առաջարկում է մարդու արտաշի հատվածի արյան շրջանառության սխեմայում տեղի ունեցող պրոցեսների մաթեմատիկական նկարագրման մեթոդ: Այն կարող է օգտագործվել սրտամկանի կծկողական ընդունակության գնահատականի, արտաշի առաձգական հատկությունների և ծանր վիրահատությունների ժամանակ հիվանդի արյան շրջանառության ավտոմատ կառավարումը իրագործող սխեմաների նախագծման համար:

H. Z. MIKAELIAN

ABOUT THE MATHEMATICAL SIMULATION OF THE PROCESS
TAKING PLACE IN THE AORTAL PART OF THE BLOOD
CIRCULATION OF THE HUMAN-BEING

S u m m a r y

The author has suggested the method of mathematical simulation of the process taking place in the aortal part of the blood circulation of human-being.

It can be used to estimate the contractile abilities of the myocardium, the elastic properties of the aorta and to work out an automatic control of blood circulation of the patient during surgical interference.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, Наука, М., 1969.
2. Волюнский Ю. Д., Мацневский Д. Д., Кейлин Б. Б. Сб. «Физиология сердечного выброса», Наукова думка, Киев, 1970, 194—198.
3. Вестергоф Н., Босман Ф., Де Врис К. Дж., Ноордерграаф А. Сб. Гидродинамика кровообращения, Мир, М., 1971, 181—213.
4. Гайтон А. Физиология кровообращения, Минутный объем сердца и его регуляция, Медицина, М., 1969.
5. Гродинз Ф. Теория регулирования и биологические системы, Мир, М., 1966.
6. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа, Наука, М., 1967.
7. Докучин А. В. Гемодинамические основы синхронизированного вспомогательного кровообращения, Медицина, М., 1972.
8. Даргау Л. А., Новосельцев В. Н., Шенгольд Е. Ш. IV Всесоюзное совещание по автоматическому управлению, Тезисы докладов, книга первая, Тбилиси, 1968.
9. Золотарев А. И. Электроника и химия в кардиологии. Изд. Воронежского ун-та, Воронеж, 1964, в. 1.
10. Микаелян Г. З. Тезисы докладов XXI Научно-технической конференции Ереванского политехнического ин-та, Ереван, 1974.
11. Новосельцев В. Н., Сахаров М. П. Доклады 5-й межвузовской конференции по физическому и математическому моделированию, Секция: Общие вопросы метода моделирования, М., 1968.
12. Пикеринг У. Д., Никифоров П. Н., Мерриман Дж. Э. Сб. Гидродинамика кровообращения, Мир, М., 1971, 214—227.
13. Рашевски Н. Некоторые медицинские аспекты математической биологии, Медицина, М., 1966.
14. Регирер С. А. Сб. Гидродинамика кровообращения, Мир, М., 1971, 243—258.
15. Уорнер Х. Р. В кн.: Вычислительные устройства в биологии и медицине, М., 1967.
16. Хаютин В. М., Едемский М. Л. Сб. Физиология сердечного выброса, Наукова думка, Киев, 1970, 43—64.
17. Хаютин В. М. Сб. Физиология сердечного выброса, Наукова думка, Киев, 1970, 5—19.
18. Шумаков В. И., Новосельцев В. Н., Сахаров М. П., Штенгольд Е. Ш. Моделирование физиологических систем организма, Медицина, М., 1971.
19. Шумаков В. И., Сахаров М. П., Новосельцев В. Н., Штенгольд Е. Ш. Моделирование физиологических систем организма, Медицина, М., 1971.

- ров М. П., Толпекин В. Е. Биофизика, 1969, 6. 20. Attinger E. O., Anne A., Mikami T., Sugawara H. Information Exchange Group, 1966, 3, Scientific Memo, 41. 21. Beneken J. E. W. В кн.: Pulsatile blood flow. McGraw Hill. New York, 1964. 22. Beneken J. E. W., De Wit Physical bases of circulatory transport. Saunders Comp. Phlad., London, 1967. 24. Defares J. G., Osborn J. J., Hara U. U. Acta Physiol. et Pharmacol. Neerland., 1963, 12, 3. 24. De Pater K., Van den Berg Jw. Med. Electron. Biol. Engin., 1964, 2, 161—166. 25. Frank O. Z. f. Biol., 1899, 37, 483—526. 26. Goldwin R. M., Watt T. B. IEEE Trans. on Bio-Med. Eng. BME—14, 1967, 1, 11—17. 27. Hamilton W. F., Dow P. Amer. J. Physiol., 1939, 125, 1, 48—59. 28. Harkness M. R. L., Harkness R. D., McDonald D. A. Proc. R. Soc., 1957, 146, 541—551. 29. Luchsin-ger P. C., Snell R. E., Patel D. J., Fry D. L. Circulat. Res., 1964, 15, 6, 503—510. 30. Mc-Donald D. A. Blood flow in arteries. Baltimore, Williams and Wilkins, 1960. 31. Patel D. J., Greenfield J. C. Jr., Austen W. G., Morrow A. G., Fry D. L. J Appl. Physiol., 1965, 20, 3, 459—463. 32. Patel D. I., Flavio M. F., Fry D. L. J. Appl. Physiol., 1963, 18, № 1, 134—130. 33. Roston S., Leight L. J. Clin. Invest., 1959, 38, 777—783. 34. Taulor M. G. Biophys J. 1966, 6, 697—716. 35. Womersley J. R. Wright Air Development Center, Techn. Rep. WADC—TR 56—614, 1957.