

Н. Х. АРУТЮНЯН,

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В настоящей работе рассматривается задача о кручении прямолинейных стержней из однородного анизотропного материала, поперечное сечение которых представляет эллиптический кольцевой сектор.

Анизотропия рассматривается частного вида, характеризующаяся следующим: в каждой точке материала имеются три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии.

Стержни, составленные из таких профилей (эллиптическое полукольцо, эллиптический трубчатый профиль с радиальной трещиной, „эллиптический свод“ и т. д.), часто встречаются в элементах инженерных конструкций и авиаконструкций.

Исследования, проведенные ЦНИПС-ом⁽¹⁾, а также опыты Мёрша⁽²⁾ и Ниге Льяза⁽³⁾ показали значительное влияние жесткости стержня при чистом кручении на величину нормальных напряжений при стесненном кручении и изгибе, поэтому вопрос определения величины жесткости представляет не только теоретический интерес, но имеет и большое практическое значение.

При решении этих задач использован частный вид ($n=1$) специальной системы криволинейных неортогональных координат, предложенной нами в ранее опубликованной работе⁽⁴⁾.

Эту систему координат в последующем будем называть „обобщенными полярными координатами“. Пользуясь ею, можно решение поставленных задач свести к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Здесь приводятся те основные результаты вышеуказанной работы, которые понадобятся в дальнейшем.

Укажем, что предпосылка о тонкостенности профиля, принятая в предыдущей работе⁽⁴⁾, здесь отпадает и рассматриваются стержни с произвольной толщиной стенок.

Как частные случаи, из приведенного решения получаются некоторые результаты Сен-Венана и Динника о кручении стержней с поперечным сечением в виде кругового и кольцевого сектора.

§ 1. Обобщенные полярные координаты

Введем криволинейные координаты ρ и φ , связанные с декартовыми координатами x , y следующим соотношением:

$$x = a\rho^{\frac{1}{2}} \cos\varphi, \quad (1.1)$$

$$y = b\rho^{\frac{1}{2}} \sin\varphi,$$

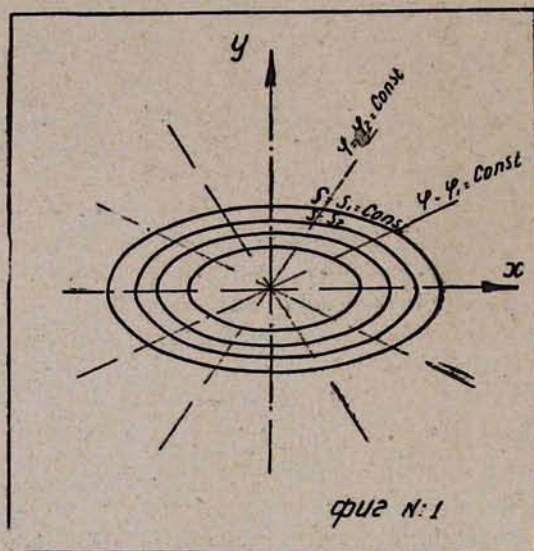
где $a > b > 0$.

Соотношение (1.1) можно написать в форме:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \rho, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg}\varphi.$$

Легко видеть, что выбранная система криволинейных координат не ортогональна.



Кривые $\rho = \rho_1 = \text{const.}$ образуют семейство эллипсов с полуосями $a\sqrt{\rho_1}$ и $b\sqrt{\rho_1}$.

Кривые $\varphi = \varphi_1 = \text{const.}$ образуют семейство прямых, проходящих через начало координат (фиг. № 1).

Между полярным углом $\psi = \arctg \frac{y}{x}$ и переменной φ существует соотношение:

$$\psi = \arctg \frac{b}{a} \operatorname{tg}\varphi, \quad (1.3)$$

причем: $\varphi = \psi$ при $\varphi = \frac{\nu\pi}{2} (\nu=0, 1, 2, 3, \dots)$, $\psi = (-1)^\nu \arctg \frac{b}{a}$, при $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\nu\pi}{2} (\nu=0, 1, 2, 3, 4, \dots)$, кроме того, в интервале

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

имеет место неравенство $0 < \psi < \varphi$. Эти соотношения понадобятся в дальнейшем.

При $a=b$ система (1.1) переходит в обычную систему полярных координат.

§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия и их решение.

Рассмотрим упругое равновесие стержня из однородного анизотропного материала с теми упругими свойствами, какие предполагались выше.

Поместим начало координат в центре кольцевого сечения и направим оси ox и oy по главным осям эллипсов, а ось z параллельно образующим.

Если в каждой точке бруса имеются три плоскости упругой симметрии, из которых одна нормальна к оси стержня z , а другая нормальна к оси ox и oy , то определение функции напряжения $u(x, y)$, как известно, сводится к интегрированию уравнения Пуассона.

$$L(u) = a_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{при граничных условиях на контуре } \Gamma \quad u=0, \quad (2.2)$$

где $u(x, y)$ — функция напряжения при кручении,

a_{44}, a_{45} — упругие постоянные,

$$a_{44} = \frac{1}{G_{xz}}, \quad a_{45} = \frac{1}{G_{yz}}. \quad (2.3)$$

Здесь:

G_{xz} — модуль сдвига для плоскостей, параллельных xoz ;

G_{yz} — модуль сдвига для плоскостей, параллельных yoz .

Данная задача эквивалентна задаче о минимуме интеграла $Y(u)$, который в принятой системе криволинейных координат примет следующий вид:

$$Y(u) = \int_{\Omega} \left[a_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + a_{45} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \right. \\ \left. - 4u \right] \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} d\rho d\varphi, \quad (2.4)$$

где $u(\rho, \varphi)$ — функция напряжения при кручении,

Ω — область, ограниченная контуром Γ .

$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}$ — якобиан преобразования (1.1), равный $\frac{ab}{2}$.

Пусть поперечное сечение скрученного стержня ограничено двумя дугами эллипсов и двумя прямыми $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$, тогда условия на контуре (2.2) можно написать в виде:

$$\begin{aligned} u(\rho_1, \varphi) &= u(\rho_2, \varphi) = u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0, \\ u(\rho_1, \varphi) &= u(\rho_2, \varphi) = u(\rho, -\alpha) = u(\rho, \alpha) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Наибольший практический интерес представляют частные случаи, когда 1) $\alpha=2\pi$, 2) $\alpha=2\pi$ и $\rho_1=0$, 3) $\alpha=\pi$ и 4) $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\rho_1=\frac{\pi}{2}$,

так как им соответствуют стержни с поперечным сечением в виде эллиптического кольца и сплошного эллипса с радиальной трещиной, а также сечения в виде эллиптического полукольца и „эллиптического свода“.

Для стержней, поперечное сечение которых является кольцевой или круговой сектор с произвольным центральным углом $\varphi=\alpha$, методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям можно получить точное решение в конечном виде.

Следуя идее вариационного метода решения задач математической физики, предложенного проф. Канторовичем⁽⁵⁾, зададим функцию кручения $u(\rho, \varphi)$ в виде суммы

$$u_n(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{k=n} f_k(\rho) \omega_k(\varphi), \quad (2.6)$$

где $\omega_k(\varphi)$ — система линейно независимых функций, относительно полная в интервале $[0, \alpha]$ в смысле равномерной сходимости и выбрана так, чтобы каждый член суммы (2.6) удовлетворял граничным условиям (2.5).

Условия полноты системы $\omega_k(\varphi)$ позволяют утверждать, что последовательность функций (2.6) будет минимальной, т. е. $Y(u_n) \rightarrow Y(u)$, а в данном случае из факта минимальности вытекает равномерная сходимость последовательности $u_n(\rho, \varphi)$ к точному решению задачи⁽⁶⁾ $u(\rho, \varphi)$.

В остальном $\omega_k(\varphi)$ — произвольны. Они могут быть выбраны в форме полиномов тригонометрических, гиперболических или других функций. Однако, от удачного выбора $\omega_k(\varphi)$ зависит быстрота сходимости последовательных приближений $u_n(\rho, \varphi)$. $f_k(\rho)$ — некоторая неизвестная функция, подлежащая определению из дифференциального уравнения (2.1).

Подставляя значения: $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial u_n}{\partial \rho}, \frac{\partial u_n}{\partial \varphi}$ из (1.1) и (2.6) в (2.4), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
N(u_3) = & \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\alpha} \left\{ 2\rho \left[a_{44}\beta \cos^2 \varphi + a_{45} \frac{1}{\beta} \sin^2 \varphi \right] \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f'_k(\rho) f'_i(\rho) \omega_k(\varphi) \omega_i(\varphi) + \right. \\
& + 2 \left[a_{45} \frac{1}{\beta} \sin \varphi \cos \varphi - a_{44}\beta \sin \varphi \cos \varphi \right] \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f'_k(\rho) f'_i(\rho) \omega_k(\varphi) \omega'_i(\varphi) + \\
& + \frac{1}{2\rho} \left[a_{44}\beta \sin^2 \varphi + a_{45} \frac{1}{\beta} \cos^2 \varphi \right] \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f_k(\rho) f_i(\rho) \omega'_k(\varphi) \omega'_i(\varphi) - \\
& \left. - 2ab \sum_{k=1}^{k=n} f_k(\rho) \omega_k(\varphi) \right\} d\rho d\varphi. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
A_{ik} = A_{ki} = & 2 \int_0^{\alpha} \omega_k(\varphi) \omega_i(\varphi) \left[a_{44}\beta \cos^2 \varphi + a_{45} \frac{1}{\beta} \sin^2 \varphi \right] d\varphi, \\
B_{ik} = B_{ki} = & \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \omega'_k(\varphi) \omega'_i(\varphi) \left[a_{44}\beta \sin^2 \varphi + a_{45} \frac{1}{\beta} \cos^2 \varphi \right] d\varphi, \quad (2.8) \\
C_{ik} = & \int_0^{\alpha} \omega_k(\varphi) \omega'_i(\varphi) \left[a_{45} \frac{1}{\beta} \sin \varphi \cos \varphi - a_{44}\beta \sin \varphi \cos \varphi \right] d\varphi, \\
D_k = & \int_0^{\alpha} \omega_k(\varphi) d\varphi.
\end{aligned}$$

Уравнения Эйлера⁽⁴⁾ рассматриваемой вариационной задачи о минимуме интеграла представляют систему линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{k=m} A_{ik} \rho^2 f''_k(\rho) + (A_{ik} + \Gamma_{ik}) \rho f'_k(\rho) - B_{ik} f_k(\rho) = -D_i ab \rho, \quad (i=1, 2, 3, \dots, m) \quad (2.9)$$

$$\text{где} \quad \Gamma_{ik} = C_{ik} - C_{ki} = -\Gamma_{ki}$$

или

$$\sum_{k=1}^{k=m} A_{ik} f''_k(t) + \Gamma_{ik} f'_k(t) - B_{ik} f_k = -D_i ab e^t, \quad i=1, 2, 3, \dots, m \quad (2.10)$$

где $t = \ln \rho$.

Общий интеграл этой системы, как известно, есть

$$f_k(t) = f^0_k(t) + f^s_k(t), \quad (2.11)$$

где $f^0_k(t)$ — общее решение соответствующей однородной системы уравнения (2.10).

$i^2_k(t)$ — некоторое частное решение системы (2.10).

Характеристическое уравнение, соответствующее системе уравнений (2.10), имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11}\lambda^2 - B_{11}, & A_{12}\lambda^2 + \Gamma_{12}\lambda - B_{12}, & \dots, & A_{1m}\lambda^2 + \Gamma_{1m}\lambda - B_{1m} \\ A_{21}\lambda^2 + \Gamma_{21}\lambda - B_{21}, & A_{22}\lambda^2 - B_{22}, & \dots, & A_{2m}\lambda^2 + \Gamma_{2m}\lambda - B_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}\lambda^2 + \Gamma_{m1}\lambda - B_{m1}, & A_{m2}\lambda^2 + \Gamma_{m2}\lambda - B_{m2}, & \dots, & A_{mm}\lambda^2 - B_{mm} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

уравнение (2.12) будет иметь $2m$ корней, следовательно, общий интеграл уравнения (2.10) будет содержать $2m$ произвольных постоянных, значения которых определены из условия (2.5) на контуре.

§ 3. Кручение стержня, поперечное сечение которого есть эллиптический кольцевой сектор.

Рассмотрим задачу о кручении стержня, поперечное сечение которого представляет эллиптический кольцевой сектор с произвольным центральным углом.

В этом случае за функцию $\omega_k(\varphi)$ принимаем

$$\omega_k(\varphi) = \sin \frac{\pi k}{\alpha} \varphi. \quad (3.1)$$

Выбранная система $\omega_k(\varphi)$ относительно полная⁽⁵⁾ в интервале $[0, \alpha]$ в смысле равномерной сходимости и удовлетворяет условиям (2.5) на контуре.

Согласно (2.8) находим:

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \frac{\alpha}{2} \left[\mu_1 E_{ik} + (-1)^{k+1} \frac{\mu_2}{2} \bar{E}_{ik}^{(1)} \right], \\ B_{ik} &= \frac{ik\pi^2}{8\alpha} \left[\mu_1 E_{ik} + (-1)^{k+1} \frac{\mu_2}{2} \bar{E}_{ik}^{(2)} \right], \\ C_{ik} &= (-1)^{k+1+1} \frac{i\pi}{8} \mu_2 \bar{E}_{ik}^{(3)}, \\ D_i &= \frac{2\alpha}{i\pi} E_i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\mu_1 = a_{44}\beta + a_{45} \frac{1}{\beta}; \quad \mu_2 = a_{44}\beta - a_{45} \frac{1}{\beta}. \quad (3.3)$$

$$E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=i, \\ 0 & \text{при } k \neq i. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_{ik}^{(s)} &= 4z \sin 2z \left[\frac{(-1)^s}{\pi^2(k-i)^2 - 4z^2} - \frac{1}{\pi^2(k+i)^2 - 4z^2} \right], \\ E_{ik}^{(s)} &= -2z \sin 2z \left[\frac{\pi(k+i)}{\pi^2(k+i)^2 - 4z^2} + \frac{\pi(k-i)}{\pi^2(k-i)^2 - 4z^2} \right], \\ E_i &= \begin{cases} 1 & \text{при } i - \text{нечетном,} \\ 0 & \text{при } i - \text{четном.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Покажем, что вариационным методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям в принятой системе криволинейных координат, кратким и естественным путем можно получить для некоторых конкретных задач точное решение.

1°. Пусть поперечное сечение изотропного стержня представляет кольцевой или круговой сектор с центральным углом $\varphi = \alpha$, тогда в силу (3.2) и (3.4) будем иметь:

$$A_{kk} = \frac{\alpha}{G}; \quad B_{kk} = \frac{k^2 \pi^2}{4\alpha G}; \quad D_k = \frac{2z}{k\pi} E_k; \quad \Gamma_{kk} = 0. \quad (3.5)$$

Корни характеристического уравнения (2.10) будут

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{2z}; \quad \lambda'_k = -\frac{k\pi}{2z};$$

общий интеграл уравнения (2.10) будет

$$f_k(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } k - \text{четном.} \\ E'_k \rho + \frac{F'_k}{\rho} - \frac{Ga^2}{k\pi} \rho \ln \rho & \text{при } k = \frac{2z}{\pi}; \\ E^*_k \rho^{\frac{k\pi}{2z}} + F^*_k \rho^{-\frac{k\pi}{2z}} - \frac{8z^2 Ga^2}{\pi k (4z^2 - \pi^2 k^2)} & \text{при } k \neq \frac{2z}{\pi}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Полагая в этом случае $\rho_2 = 1$ для значений E_k и F_k , согласно условиям (2.5) получим:

$$\begin{aligned} E'_k = -F'_k &= \frac{Ga^2 \rho_1^{\frac{k\pi}{2z}} \ln \rho_1}{k\pi(\rho_1^{\frac{k\pi}{2z}} - 1)}, \\ E^*_k &= \frac{8z^2 Ga^2}{k\pi(4z^2 - k^2 \pi^2)} \cdot \frac{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{2z} + 1}}{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{2z}}}; \\ F^*_k &= \frac{8z^2 Ga^2}{k\pi(4z^2 - k^2 \pi^2)} \cdot \frac{\left(1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{2z} - 1}\right) \rho_1^{\frac{k\pi}{2z} + 1}}{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{2z}}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Функция напряжения $u(\rho, \varphi)$ согласно (2.6) и (3.7) будет

$$u(\rho, \varphi) = \frac{8\alpha^2 G a^2}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{\alpha} \varphi}{k(4\alpha^2 - k^2\pi^2)} \left[\frac{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha} + 1}}{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{\alpha}}} \rho^{\frac{k\pi}{2\alpha}} + \right. \\ \left. + \frac{\left(1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha} - 1}\right) \rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha} + 1}}{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{\alpha}}} \rho^{\frac{k\pi}{2\alpha} - \rho} \right]. \quad (3.9)$$

Жесткость C при кручении определится формулой

$$C = \frac{64\alpha^3 G a^4}{\alpha^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2(4\pi^2\alpha^2 - k^2)} \left[\frac{2\alpha \left(1 - \rho_1^{\frac{\pi}{2\alpha} + 1}\right)^2}{(\pi k + 2\alpha) \left(1 - \rho_1^{\frac{\pi}{\alpha}}\right)} - \right. \\ \left. - \frac{2\alpha \left(1 - \rho_1^{\frac{\pi}{2\alpha} - 1}\right)^2}{(2\alpha - \pi k) \left(1 - \rho_1^{\frac{\pi}{\alpha}}\right)} \rho_1^2 - 1 - \frac{\rho_1^2}{2} \right]. \quad (3.10)$$

Полагая в (3.10) $\rho_1 = 0$, получим значение жесткости C для кругового сектора в форме

$$C = \frac{8\alpha^3 G a^4}{\pi^4} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)^2(2k+p)^2}, \quad (3.11)$$

где $p = 1 + \frac{2\alpha}{\pi}$.

Просуммировав ряд (3.11), получим следующую расчетную формулу для жесткости C в конечном виде:

$$C = \left[\frac{\alpha}{4} - 0,62506 + \frac{\alpha}{2\pi^2} \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \right) - \frac{1}{\pi} \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \right) \right] G a^4 = k_0(\alpha) G a^4 \quad (3.12)$$

где $\psi(x)$ — первая логарифмическая производная функции гамма, $\psi'(x)$ — вторая логарифмическая производная функции гамма.

В таблице № 1 приведены некоторые значения, вычисленные по формуле (3.12), а также результаты Сен-Венана⁽⁷⁾ и Динника⁽⁸⁾, полученные не столь прямыми методами, а в виде двойных рядов от бесселевых функций первого рода и интеграла от них.

Таблица 1

α	$K_0(\alpha)$		
	Сен-Венан	Динник	Формула (3.12)
$\frac{\pi}{12}$	—	0,0011	0,0018
$\frac{\pi}{6}$	—	0,0068	0,0086
$\frac{\pi}{4}$	0,018	0,017	0,019
$\frac{\pi}{3}$	0,0349	0,035	0,035
$\frac{\pi}{2}$	0,0825	0,080	0,0824
$\frac{2}{3}\pi$	0,148	0,144	0,145
π	0,296	0,297	0,297
$\frac{3\pi}{2}$	0,528	0,560	0,564
2π	0,878	0,878	0,878

Следует отметить, что формула Динника дает преуменьшенное значение для $K_0(\alpha)$, особенно при небольших значениях угла сектора α . Это объясняется тем, что двойной ряд, выражающий значение $K_0(\alpha)$, при малых углах α сходится медленно.

Напряжения τ_{xx} и τ_{yz} на контуре определяются следующими формулами:

$$(\tau_{xx})_{\rho=1} = 8\alpha\theta Gb \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{\alpha} \varphi \cos \varphi}{4\alpha^2 - k^2\pi^2} \frac{\rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha}} - 2\rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha}+1} + \rho_1^{\frac{k\pi}{\alpha}}}{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha}}};$$

$$(\tau_{yz})_{\rho=1} = -8\alpha\theta Ga \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{\alpha} \varphi \sin \varphi}{4\alpha^2 - k^2\pi^2} \frac{\rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha}} - 2\rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha}+1} + \rho_1^{\frac{k\pi}{\alpha}}}{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{\alpha}}};$$

$$(\tau_{xx})_{\rho=\rho_1} = 8\alpha\theta Gb \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{\alpha} \varphi \cos \varphi}{4\alpha^2 - k^2\pi^2} \times \\ \times \frac{\rho_1^{\frac{1}{2}(\frac{k\pi}{\alpha}+1)} - \rho_1^{\frac{1}{2}(\frac{2k\pi}{\alpha}+1)} + 2\rho_1^{\frac{1}{2}(\frac{k\pi}{\alpha}-1)} - \rho_1^{\frac{1}{2}}}{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha}}};$$

$$(\tau_{yz})_{\rho=\rho_1} = -8\alpha\theta Ga \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k\pi}{\alpha} \varphi \sin \varphi}{4\alpha^2 - k^2\pi^2} \times \\ \times \frac{\rho_1^{\frac{1}{2}(\frac{k\pi}{\alpha}+1)} - \rho_1^{\frac{1}{2}(\frac{2k\pi}{\alpha}+1)} + 2\rho_1^{\frac{1}{2}(\frac{k\pi}{\alpha}-1)} - 2\rho_1^{\frac{1}{2}}}{1 - \rho_1^{\frac{k\pi}{2\alpha}}}$$

Рассмотрим вопрос об оценке максимальной погрешности при n -ом приближении, а также порядка относительно $\frac{1}{n}$, с которым эта погрешность стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Будем различать два возможных случая в зависимости от значения ρ_1 : а) $\rho_1=0$, б) $0 < \rho_1 < 1$.

Обозначим значение жесткости C в n -ом приближении через C_n ($n=1, 2, 3, \dots$).

Тогда в силу (3.10) и (3.11) получим

$$E_n(\alpha) = C - C_n = \frac{8\alpha^3 Ga^4}{\pi^4} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 [2(k-1)+p]^2}, \quad (3.13)$$

где $E_n(\alpha)$ — величина погрешности для значения жесткости C_n .

Из равенства (3.13) и (3.12) получим, что погрешность $E_n(\alpha)$ для C имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, а для τ_{xz} и τ_{yz} $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

В силу равенства (3.13) и (3.11) будем иметь

$$E_n(\alpha) < \frac{8\alpha^3 Ga^4}{\pi^4} \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^2 [2(x-1)+p]^2} \quad (3.14)$$

или

$$E_n(\alpha) < \frac{Ga^4}{2\pi} \left[\frac{\alpha(\alpha+2n\pi)}{\pi n(\alpha+n\pi)} + \ln \left(\frac{\pi n}{\alpha+n\pi} \right)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Оценка (3.15) для первых трех приближений при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ дает следующие результаты:

$$\text{для } n=1 \quad E_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4,1\%, \text{ для } n=2 \quad E_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,71\% \text{ и для } n=3 \\ E_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,23\%.$$

Как видно, приведенная оценка достаточно эффективна.

Впрочем, действительная погрешность получается еще меньше; для сравнения их в таблице № 2 приведен ряд значений $E_n(\alpha)$ и $K_n(\alpha)$.

Таблица 2

n	1	2	3	4
$E_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$	3,0% ₀	0,61% ₀	0,18% ₀	0,1% ₀
$K_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$	0,0797	0,0818	0,0822	0,0824

Таким образом, на основе применения вариационного уравнения (2.10) можно получить следующие расчетные формулы, дающие нижнюю и верхнюю оценку для значения жесткости C .

$$C = \frac{8\alpha^3 Ga^4}{\pi^2(\pi + 2\alpha)^2} \quad (3.16)$$

с погрешностью не более 4%₀;

$$C = \int \left[\frac{8\alpha^3}{\pi^2(\pi + 2\alpha)^2} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\alpha(\alpha + 2\pi)}{\pi(\alpha + \pi)} + 2 \ln \frac{\pi}{\alpha + \pi} \right] \right] Ga^4 \quad (3.17)$$

с погрешностью меньше 1,2%₀.

В случае $0 < \rho_1 < 1$, т. е. когда поперечным сечением скрученного стержня является кольцевой сектор, для $E_n(\alpha)$, согласно (3.10) получим:

$$E_n(\alpha) < \frac{\delta(4 - 6\delta + 4\delta^2 - \delta^3)}{2\pi} \left[\frac{\alpha(\alpha + 2\pi)}{\pi n(\alpha + \pi)} + 2 \ln \frac{\pi}{\alpha + \pi} \right],$$

где δ_1 — толщина стенок сечения, $\delta = (1 - \sqrt{\rho_1}) = \frac{\delta_1}{a}$ — характеристика тонкостенности данного профиля.

Обычно в инженерных конструкциях стержни называются тонкостенными, если $0 < \delta < 0,2$. Для таких стержней для определения жесткости C и крутящего момента M_t вариационными методами, результаты первого приближения оказываются менее точными, чем для толстостенных, и становится необходимым построение второго приближения, которое непосредственно получается из соотношений (2.12), (2.10) и (3.4).

Поэтому в дальнейших примерах при рассмотрении задач о кручении эллиптических профилей для простоты будем ограничиваться только первым приближением, как вполне приемлемым для технических расчетов при толщине стенок профиля $0,2 < \delta_1 < 1$.

2°. Пусть поперечное сечение стержня представляет эллиптический кольцевой сектор с центральным углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ограничиваясь первым приближением, т. е. полагая в выражениях (3.1) и (3.4) $k=1$, получим

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2ab}{\pi \rho_1} \left[\frac{\rho_1^2 \ln \rho_1}{\rho_1^2 - 1} \cdot \frac{\rho^2 - 1}{\rho} - \rho \ln \rho \right] \sin 2\varphi. \quad (3.19)$$

Жесткость C_1 при кручении, напряжения τ_{xz} и τ_{yz} на контуре определяются по формулам:

$$C_1 = \frac{a^2 b^2}{2\pi\mu_1} \left[\frac{\rho_1^2 \ln \rho_1^2}{\rho_1^2 - 1} (1 - \rho_1^2 + \ln \rho_1^2) + 1 + \rho_1^2 (\ln \rho_1^2 - 1) \right], \quad (3.20)$$

$$(\tau_{xz})_{\rho=1} = \frac{4b}{\pi\mu_1} \left(\frac{2\rho_1^2 \ln \rho_1^2 - \rho_1^2 + 1}{\rho_1^2 - 1} \right) \sin 2\varphi \cos \varphi,$$

$$(\tau_{yz})_{\rho=1} = \frac{4a}{\pi\mu_1} \left(\frac{2\rho_1^2 \ln \rho_1^2 - \rho_1^2 + 1}{\rho_1^2 - 1} \right) \sin 2\varphi \sin \varphi,$$

$$(\tau_{xz})_{\rho=\rho_1} = \frac{4b}{\pi\mu_1} \left(\frac{\ln \rho_1^2 - \rho_1^2 + 1}{\rho_1^2 - 1} \right) \rho_1^{1/2} \sin 2\varphi \cos \varphi, \quad (3.21)$$

$$(\tau_{yz})_{\rho=\rho_1} = \frac{4a}{\pi\mu_1} \left(\frac{\ln \rho_1^2 - \rho_1^2 + 1}{\rho_1^2 - 1} \right) \rho_1^{1/2} \sin 2\varphi \sin \varphi.$$

Полагая в (3.20) $\rho_1=0$, получим значение жесткости C_1 для эллиптического сектора

$$C_1 = \frac{\beta a^2 b^2 G_{yz} G_{yx}}{2\pi(\beta^2 G_{yz} + G_{xx})}, \quad (3.22)$$

для изотропного стержня будем иметь

$$C_1 = \frac{Ga^2 b^2 \beta}{2\pi(\beta^2 + 1)}. \quad (3.23)$$

3°. Пусть поперечное сечение скручиваемого стержня является "эллиптический сводчатый профиль" с центральным углом $\alpha=\pi$, тогда в силу (3.1), (3.4) и (2.10) будем иметь

$$u(\rho, \varphi) = \frac{16ab \sin \varphi \rho^{1/2}}{3\pi\mu_1} \left[\frac{1 - \rho_1^{3/2}}{1 - \rho_1} + \frac{\rho_1(\rho_1^{1/2} - 1)}{\rho(1 - \rho_1)} - \rho \right]. \quad (3.24)$$

Жесткость C_1 при кручении будет

$$C_1 = \frac{32a^2 b^2}{3\pi\mu_1} \left[\frac{2(1 - \rho_1^{3/2})^2}{3(1 - \rho_1)} - \frac{2\rho_1^2(1 - \rho_1^{1/2})}{1 - \rho_1} - \frac{1 - \rho_1^2}{2} \right]. \quad (3.25)$$

Полагая в (3.25) $\rho_1=0$, получим значение жесткости C для полуэллипса:

$$C_1 = \frac{16a^2 b^2 G_{yz} G_{yx}}{9\pi(\beta^2 G_{yz} + G_{xx})}, \quad (3.26)$$

для изотропного стержня получим

$$C_1 = \frac{16a^2 b^2 G\beta}{9\pi(\beta^2 + 1)}. \quad (3.27)$$

4°. Рассмотрим задачу о кручении стержня, имеющего эллиптический трубчатый профиль с радиальной трещиной вдоль оси ox .

Полагая в соотношениях (3.1) и (3.4) $\alpha=2\pi$ и решая систему уравнений (2.10), получим:

$$\mu_1(\rho_1) = \frac{64ab \sin^2 \frac{\pi}{2}}{15\pi\mu_1} \left(\frac{(1-\rho_1^{3/4})}{1-\rho_1} \rho_1^{1/4} - \frac{(1-\rho_1^{3/4})\rho_1^{7/4}}{1-\rho_1} - \rho \right). \quad (3.28)$$

Значение жесткости C_1 для эллиптического трубчатого профиля с радиальной трещиной определится формулой

$$C_1 = \frac{256a^2b^2}{15\pi\mu_1} \left[\frac{4}{5} \frac{(1-\rho_1^{3/4})^2}{(1-\rho_1^{1/2})} - \frac{4}{3} \frac{(1-\rho_1^{-1/4})^2\rho_1^2}{(1-\rho_1^{1/2})} - \frac{1-\rho_1^2}{2} \right], \quad (3.29)$$

для изотропного стержня получим

$$C_1 = \frac{256a^3b^3G}{15\pi(a^2+b^2)} \left[\frac{4}{5} \frac{(1-\rho_1^{3/4})^2}{(1-\rho_1^{1/2})} - \frac{4}{3} \frac{(\rho_1-\rho_1^{1/4})^2}{1-\rho_1^{1/2}} - \frac{1-\rho_1^2}{2} \right] = k_1(\rho_1) \frac{a^3b^3G}{a^2+b^2}. \quad (3.30)$$

Полагая в соотношениях (3.29) и (3.30) $\rho_1=0$, получим соответствующее значение жесткости C_1 для случаев анизотропного и изотропного стержней, поперечное сечение которых представляет сплошной эллипс с радиальной трещиной вдоль полуоси a

$$C_1 = \frac{128 G_{xz} G_{yz} a^3 b^3}{25\pi(b^2 G_{yz} + a^2 G_{xz})}, \quad (3.31)$$

$$C_1 = \frac{128 G a^3 b^3}{25\pi(a^2 + b^2)}, \quad (3.32)$$

т. е. наличие радиальной трещины в сплошном эллиптическом стержне уменьшает его жесткость в 1.90 раз.

В таблице 3 приведены некоторые значения коэффициента $K_1(\rho_1)$, вычисленные по формуле (3.30) для эллиптического трубчатого профиля с радиальной трещиной, и соответствующие значения $K_2(\rho_1)$ для этого же стержня без трещины, вычисленные по известной формуле

$$C_0 = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1-\rho_1^2) = k_2(\rho_1) \frac{G a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (3.33)$$

Таблица 3

$\frac{\delta_1}{a}$	1	0,8	0,7	0,5	0,4	0,3	0,2
$k_1(\rho_1)$	1,679	1,095	0,764	0,325	0,196	0,088	0,026
$k_2(\rho_1)$	3,142	3,135	3,115	2,945	2,765	2,386	1,834

Из таблицы 3 видно, что при толщине стенок

$$a_1 \geq \delta_1 \geq 0,2a \quad 71,5 \geq \frac{C_0}{C_1} \geq 1,87.$$

Полученные результаты показывают, какое значительное влияние оказывает появление трещины на жесткость трубчатых профилей, особенно на тонкостенных.

5°. Рассмотрим задачу о кручении части эллиптического кольца с произвольным центральным углом $\varphi = \pm \alpha$, симметрично расположенной относительно оси ox . При $\varphi = \pm \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ будем иметь случай эллиптического полукольца.

Так как в этом случае функция кручения $u_1(\rho, \varphi)$ должна быть четная в интервале $[\alpha, -\alpha]$, то за систему функций $\omega_k(\varphi)$, удовлетворяющую условиям (2.5), примем:

$$\omega_k(\varphi) = \cos \frac{k\pi}{2\alpha} \varphi.$$

Для простоты ограничиваясь первым приближением, т. е. положив в выражениях (2.8) и (2.10) $k=i=1$, получим:

$$u_1(\rho, \varphi) = \frac{16\alpha^2 ab}{\pi \mu_1 (16\alpha^2 - \pi^2)} \left[\frac{\left(1 - \rho_1^{\frac{\pi}{4\alpha} + 1}\right) \rho^{\frac{\pi}{4\alpha}}}{1 - \rho_1^{\frac{\pi}{2\alpha}}} + \frac{\left(1 - \rho_1^{\frac{\pi}{4\alpha} - 1}\right) \rho_1^{\frac{\pi}{4\alpha} + 1} \rho^{-\frac{\pi}{4\alpha}}}{1 - \rho_1^{\frac{\pi}{2\alpha}}} - \rho \right] \times \cos \frac{\pi \varphi}{2\alpha} \quad (3.35)$$

и

$$C_1 = \frac{256\alpha^2 a^2 b^2}{\pi^2 \mu_1 (16\alpha^2 - \pi^2)} \left[\frac{4\alpha}{4\alpha + \pi} \frac{\left(1 - \rho_1^{\frac{\pi}{4\alpha} + 1}\right)^2}{1 - \rho_1^{\frac{\pi}{2\alpha}}} - \frac{4\alpha}{(4\alpha - \pi)} \frac{\left(1 - \rho_1^{\frac{\pi}{4\alpha} - 1}\right)^2}{\left(1 - \rho_1^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right)} \rho_1^2 - \frac{1 - \rho_1^2}{2} \right], \quad (3.36)$$

если $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$.

При $\alpha = \frac{\pi}{4}$ вместо соотношений (3.35) и (3.36) будем иметь (3.19) и (3.20).

Полагая в (3.35) и (3.36) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, получим соответствующие значения функций напряжения $u_1(\rho_1, \varphi)$ и жесткости C для эллиптического полукольца

$$u_1(\rho_1, \varphi) = \frac{16ab}{3\pi \mu_1} \left[\frac{1 - \rho_1^{3/2}}{1 - \rho_1} \rho^{1/2} + \frac{(1 - \rho_1^{-1/2})}{1 - \rho_1} \rho_1^{3/2} \rho^{-1/2} - \rho \right] \cos \varphi, \quad (3.37)$$

$$C_1 = \frac{32a^2 b^2}{3\pi \mu_1} \left[\frac{2(1 - \rho_1^{3/2})^2}{3(1 - \rho_1)} - \frac{2(1 - \rho_1^{-1/2})^2 \rho_1^2}{1 - \rho_1} - \frac{1 - \rho_1^2}{2} \right]. \quad (3.38)$$

1946 Май.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Бычков и А. К. Мрошинский—Кручение металлических балок. 1944 г. Москва. Стройиздат.
 2. Trayer G. W. & March H. W. The torsion of members having section common in aircraft construction, technical report of the Advisory Committee for Aeronautics. № 334 1930.
 3. Inge Lyse & Bruce G. Johnston. Structural Beams in Torsion. Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Vol. 61 April, 1935 p. p. 469—508.
 4. Н. Х. Арутюнян—Приближение решения задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. „Прикладная математика и механика“, том. VI. 1942 г.
 5. Канторович Л. В. и Крылов А. Н.—Приближенные методы высшего анализа. 1941 г. Москва, ОНТИ.
 6. Треффц—Математическая теория упругости. 1934. Москва, ОНТИ.
 7. Тимошенко—Теория упругости. 1934 г. Москва, ОНТИ.
 8. Динник А. Н.—Кручение. 1938 г. Москва, ОНТИ.
-

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԸՆԻՋՈՏՐՈՊ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐԾԵՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԺՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ տրվում է էլիպսական օղակային ընդլայնական կտրվածք ունեցող անիզոտրոպ ձողերի ոլորման մի շարք խնդիրների լուծումը:

Այդպիսի ձողեր հաճախ հանդիպում են ինժեներական կոնստրուկցիաներում:

Հատուկ, ոչ օրտոգոնալ կոորդինատային սիստեմի և առաձգականության տեսության վարիացիոն մեթոդի կիրառման միջոցով, այդ խնդիրների լուծումը բերված է, սովորական, գծային հաստատուն գործակիցներ ունեցող, գիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը:

Միաժամանակ ստացված են այդ եղանակով մի քանի խնդիրների ճշգրիտ լուծումները:

Ստացված բոլոր արդյունքները և հաշվային բանաձևերը բերված երևարմար տեսքի՝ գործնական կիրառությունների համար:

Корректор А. Шадомян

ВФ 01924. Заказ 468. Тираж 750, 3,5 печ. лист. Сдано в производство 15/IX—1947 г. Подписано к печати 10/I—1948 г.

Типография Армгиза, Ереван ул. Ленина № 65, 1948 г.