М. М. ДЖРБАШЯН

К ПРОБЛЕМЕ ПРЕДСТАВИМОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В настоящее время хорошо известны исследования Ф. Рисса[1], Р. Неванлинна,[2], И. И. Привалова[3] и других авторов, посвященные изучению определенных классов голоморфных и мероморфных функций в единичном круге.

Имеется также большое число работ, посвященных установлению полноты различных систем аналитических функций.

Настоящая работа также посвящена изучению некоторых классов аналитических функций.

В § 1 определен некоторый класс $H_p(\alpha)$ $(p>0, \alpha>-1)$ функций голоморфных внутри единичного круга и доказаны теоремы о параметрическом представлении и единственности функций этого класса. Установлена полнота некоторых систем рациональных функций в классе $H_2(\alpha)$.

В § 2 получено обобщение известной формулы Иенсен-Неванлинна для мероморфных функций, что позволяет доказать теорему о каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, имеющих неограниченную характеристику. При этом показано, что как формула (2.3) § 2, так и теорема XII_1 являются естественными обобщениями результатов Р. Неванлинна[2].

В § 3 приведен интегральный аппарат для представления некоторых классов целых функций. Доказана теорема о полноте во всей плоскости системы целых функций типа функции Миттаг-Леффлера[4] в классе целых функций, имеющих конечный порядок и тип.

Часть результатов этой работы были изложены в двух заметках[14,15].

§ *1. О представлении некоторых классов голоморфных в единичном круге функций.*

1. Отнесем к классу $H_p(\alpha)$ $(p>0, \alpha>-1)$ все функции $f(z)$, голоморфные в единичном круге $|z|<1$, для которых интеграл

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|f(\rho e^{i\vartheta})|^p\rho d\rho d\vartheta \tag{1.1}$$

существует*.

*) Определение класса $H_p(\alpha)$ и основная терема I были приведены нами в заметке (14) в 1945 г.

Очевидно, что при $\alpha_1 < \alpha_2$, класс $H_p(\alpha_1)$ содержится в классе, $H_p(\alpha_2)$, а при $p_1 < p_2$ класс $H_{p_2}(\alpha)$ содрежится в классе $H_{p_1}(\alpha)$. Докажем лемму.

Лемма 1. Если $f(z)$ *принадлежит классу* $H_p(\alpha)(p \geqslant 1,\ \alpha \geqslant 0)$, *тогда*

$$\lim_{k \to 1} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha |f(\rho e^{i\vartheta}) - f(k\rho e^{i\vartheta})| \rho d\rho d\vartheta = 0, \tag{1.2}$$

где $0 < k < 1$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем сначала $r_1 (0 < r_1 < 1)$ так, чтобы было

$$\int_{r_1}^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha |f(\rho e^{i\vartheta})| \rho d\rho d\vartheta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.3}$$

Пусть $r_1 < r_2 < 1$, а число $k (0 < k < 1)$ выбрано из условия $kr_2 \geqslant r_1$, тогда

$$\int_{r_2}^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha |f(k\rho e^{i\vartheta})| \rho d\rho d\vartheta < \frac{1}{k^2} \int_{r_1}^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha |f(\rho e^{i\vartheta})| \rho d\rho d\vartheta < \frac{\varepsilon}{4k^2} \tag{1.4}$$

Теперь выберем k $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant k < 1\right)$ настолько близким к единице чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha | f(\rho e^{i\vartheta}) - f(k\rho e^{i\vartheta}) | \rho d\rho d\vartheta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.5}$$

Из неравенств (1.3), (1.4), и (1.5) следует утвеждение леммы.

Теорема I. Для всякой функции $f(z)$ *класса* $H_p(\alpha)$ $(p \geqslant 1,\ \alpha > -1)$ *имеет место следущюее интегральное представление*

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \frac{f(\rho e^{i\vartheta})}{(1 - z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}} \rho d\rho d\vartheta \tag{1.6}$$

или

$$f(z) = -\overline{f(0)} + \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \frac{\mathrm{Re}\{f(\rho e^{i\vartheta})\}}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}} \rho d\rho d\vartheta \tag{1.7}$$

внутри единичного круга $|z| < 1$.

Доказательство. Функция

$$\Phi(\alpha;\ z) = \frac{\alpha+1}{(1-z)^{\alpha+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2+k)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(1+k)} z^k \ (|z| < 1). \tag{1.8}$$

голоморфна внутри единичного круга, причем

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha(\rho e^{i\vartheta})^n\,\Phi(\alpha;\, z\rho e^{-i\vartheta})\rho d\rho d\vartheta=z^n \tag{1.8}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

когда $|z|<1$. Последнее немедленно получается почленным интегрированием ряда (1.8), если заметить, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in\vartheta}\,e^{-ik\vartheta}d\vartheta=\begin{cases}0 & \text{при } k\neq n\\ 1 & \ \ k=n\end{cases}$$

и (1.9)

$$\int_0^1(1-\rho^2)^\alpha\rho^{2n+1}\,d\rho=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)}{2\,\Gamma(\alpha+2+n)}.$$

Предположим сначала, что $f(z)\subset H_p(\alpha)(p\geqslant 1,\ \alpha\geqslant 0)$ и в окрестности $z=0$ имеется разложение $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$. Если $k(0<k<1)$ — любое число, то в силу (1.8), при $|z|<1$ будем иметь

$$f(kz)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{f(k\rho e^{i\vartheta})}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta.$$

Отсюда ввиду (1.2) предельным переходом, когда $k\to 1$ получаем (1.6).

Теперь докажем формулу (1.6), когда $f(z)\subset H_p(p\geqslant 1, -1<\alpha<0)$. Очевидно, что при любом $\beta\geqslant 0$, $f(z)\subset H_p(\beta)$ и по уже доказанному, для $|z|<1$ имеем

$$f(z)=\frac{\beta+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\beta\frac{f(\rho e^{i\vartheta})}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\beta+2}}\rho d\rho d\vartheta. \tag{1.10}$$

Но при фиксированном z интеграл в правой части (1.10) будет аналитической функцией от β в полуплоскости $Re\beta\geqslant\alpha$. Отсюда по теореме единственности аналитических функций заключаем, что (1.10) справедлива при $\beta\geqslant\alpha$.

Таким образом (1.6) справедлива для всякой функции $f(z)\subset H_p(\alpha)$ $(p\geqslant 1,\ \alpha>-1)$.

Аналогично имеем:

$$f(0)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\overline{f(\rho e^{i\vartheta})}}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta. \tag{1.11}$$

Формула (1.7) получается сложением выражений (1.6) и (1.11).

Результат теоремы I в случае, когда $\alpha=0$, содержится в работе Виртингера[5,6].

Следствие. Если

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|f(\rho e^{i\vartheta})|\rho d\rho d\vartheta\leqslant M,$$

то при $|z|<1$

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{(1-|z|)^{\alpha+2}} \tag{1.12}$$

2. Мы определили класс $H_p(\alpha)$ голоморфных в единичном круге функций. Установим теперь некоторое взаимоотношение между классами $H_p(\alpha)$ и известным классом $H_p(p>0)$ Ф. Рисса голоморфных в единичном круге функций. Напомним[1,3], что голоморфная внутри единичного круга функция $f(z)$ принадлежит классу $H_p(p>0)$, если интегралы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\vartheta})|^p d\vartheta, \qquad r<1 \tag{2.1}$$

ограничены при $r\to 1$.

Очевидно, что при всяком $\alpha>-1$, $H_p\subset H_p(\alpha)$. Можно доказать теорему.

Теорема II. Для того, чтобы голоморфная внутри единичного круга функция $f(z)$ *принадлежала к классу* H_p, *необходимо и достаточно, чтобы интегралы*

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|f(\rho e^{i\vartheta})|^p\rho d\rho d\vartheta \tag{2.2}$$

были равномерно ограничены при $\alpha\to -1$.

Доказательство. Если $f(z)\subset H_p$, тогда интегралы (2.1) ограничены при $r\to 1$. Следовательно, так как (2.1) не убывает при $r\to 1$, то интегралы

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^\alpha|f(re^{i\vartheta})|^p r dr d\vartheta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\vartheta})|^p d\vartheta \tag{2.3}$$

равномерно ограничены при $\alpha\to -1$.

Обратно, пусть при $\alpha\to -1$, интегралы (2.2) ограничены числом M. Замечая опять, что при $r\to 1$ (2.1) не убывает, для $0<\rho<1$ будем иметь

$$(1-\rho^2)^{\alpha+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\vartheta})|^p d\vartheta < \frac{\alpha+1}{\pi}\int_\rho^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^\alpha|f(re^{i\vartheta})|^p r dr d\vartheta < M. \tag{2.4}$$

Отсюда, когда $\alpha\to -1$ заключаем, что $f(z)\subset H_p$.

3. Приведем теорему единственности для функций класса $H_p(\alpha)$ $(p>0,\ \alpha>-1)$.

Пусть функция $f(z)$ принадлежит к классу $H_p(\alpha)$ и $\{\alpha_n\}$ означает последовательность ее нулей, расположенных в $|z|<1$ и отличных от $z=0$. Полагаем, кроме того, что нули $\{\alpha_n\}$ пронумерованы в порядке возрастания модулей, при этом каждый нуль берется соответственно его кратности.

Обозначим через $n(t)$ число чисел $\{\alpha_n\}$, расположенных в круге $|z|\leqslant t$. Если $f(z)\neq 0$, то по формуле Иенсена[7]

$$N(r)\equiv\int_0^r\frac{n(t)}{t}\,dt<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta+A \tag{3.1}$$

здесь и в дальнейшем A есть постоянная, не зависящая от r.

Из известного неравенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\vartheta})|^p\,d\vartheta\leqslant\log\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\vartheta})|^p\,d\vartheta\right\} \tag{3.2}$$

получаем

$$\int_0^1(1-r)^\alpha e^{pN(r)}\,dr<A\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha|f(re^{i\vartheta})|^p r\,dr\,d\vartheta. \tag{3.3}$$

Очевидно, что интеграл, стоящий в правой части (3.3), сходится одновременно с интегралом (1.1). Резюмируя все сказанное, можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема III_1. Если $f(z)\subset H_p(\alpha)$ *и отлична от тождественного нуля, то*

$$\int_0^1(1-r)^\alpha e^{pN(r)}\,dr<+\infty. \tag{3.4}$$

Теорема III_2. Если $f(z)\subset H_p(\alpha)$ *и*

$$\int_0^1(1-r)^\alpha e^{pN(r)}\,dr=+\infty, \tag{3.5}$$

тогда $f(z)\equiv 0$.

В частности, из теоремы III_2 следует

Теорема III_3. Если $f(z)\subset H_p(\alpha)$ *и числовая функция* $n(r)$ *нулей функции* $f(z)$ *удовлетворяет условию*

а) $$\lim_{r\to1}\inf\,(1-r)\,n(r)=\lim_{n\to\infty}\inf\,(1-|\alpha_n|)n>\frac{\alpha+1}{p} \tag{3.6}$$

или

в) $$\lim_{r\to1}\sup\frac{1-r}{\log\frac{1}{1-r}}\,n(r)=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1-|\alpha_n|}{\log\frac{1}{1-|\alpha_n|}}\,n>e\,\frac{\alpha+1}{p}. \tag{3.7}$$

тогда $f(z)\equiv 0$.

Доказательство.

а) Пусть

$$\lim_{r\to1}\inf\,(1-r)\,n(r)>\Delta>\frac{\alpha+1}{p}, \tag{3.8}$$

тогда для $r\geqslant r_0$ будем иметь $(1-r)\,n(r)\geqslant\Delta$.

Отсюда следует, что

$$N(r)=\int_0^{r_0}\frac{n(t)}{t}\,dt+\int_{r_0}^{r}(1-t)\,n(t)\,\frac{dt}{t(1-t)}>A+\Delta\log\frac{1}{1-r} \qquad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) получим

$$(1-r)^{\alpha}\,e^{pN(r)}>\frac{A}{1-r}. \qquad (3\cdot10)$$

Следовательно, интеграл (3·5) расходится и по теореме Ш_2 $f(z)\equiv 0$.

в) Если $f(z)\subset H_p(\alpha)$ и $f(z)\not\equiv 0$, тогда из (3·4), в частности, следует

$$\sqrt{r}\,(1-\sqrt{r})^{\alpha+1}e^{pN(r)}<\int_r^{\sqrt{r}}(1-t)^{\alpha}e^{pN(t)}dt<A$$

Отсюда имеем:

$$N(r)<A+\frac{\alpha+1}{p}\log\frac{1}{1-r}. \qquad (3.11)$$

Далее, для всякого $\lambda<1$

$$N(r^{\lambda})>\int_r^{r^{\lambda}}\frac{n(t)}{t}dt>(1-r^{\lambda})\,n(r)\int_r^{r^{\lambda}}\frac{dt}{t(1-t)}=$$

$$=(1-r^{\lambda})n(r)\left\{\log\frac{1}{r^{1-\lambda}}+\log\frac{1-r}{1-r^{\lambda}}\right\}. \qquad (3\cdot12)$$

Из неравенств (3.11) и (3·12) следует

$$\lim_{r\to1}\sup\frac{1-r}{\log\frac{1}{1-r}}n(r)\leqslant\frac{1}{\lambda\log\frac{1}{\lambda}}\;\frac{\alpha+1}{p}$$

При $\lambda<1$ выражение $\lambda\log\frac{1}{\lambda}$ достигает максимума, когда $\lambda=\frac{1}{e}$.

Следовательно,

$$\lim_{r\to1}\sup\frac{1-r}{\log\frac{1}{1-r}}n(r)\leqslant e\frac{\alpha+1}{p}. \qquad (3.13)$$

Таким образом, если

$$\lim_{r\to1}\sup\frac{1-r}{\log\frac{1}{1-r}}n(r)>e\frac{\alpha+1}{p},$$

то необходимо $f(z)\equiv 0$.

Теорема доказана, так как равенства (3.6) и (3.7) устанавливаются легко[8].

4. Если нули $\{\alpha_n\}$ имеют особое расположение, то для определенных классов голоморфных в единичном круге функций свойство единственности сохранятся и при меньшей плотности последовательности $\{\alpha_n\}$.

Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям

$$1)\qquad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=e^{i\vartheta_0}\quad (0<\vartheta_0<2\pi) \tag{4.1}$$

$$2)\qquad |\arg(\alpha_n e^{-i\vartheta_0}-1)|\geqslant\frac{\pi}{2}+\delta\quad(\delta>0) \tag{4.2}$$

Очевидно, что ряды

$$\sum_1^\infty|1-\alpha_n|\ \ и\ \ \sum_1^\infty(1-|\alpha_n|) \tag{4.3}$$

расходятся одновременно.

Теорема IV. Если $f(z)$ ***голоморфна в единичном круге и в окрестности точки*** $z=e^{i\vartheta_0}$

$$|f(z)|<\frac{M}{(1-|z|)^p}(p>0) \tag{4.6}$$

тогда из условий $f(\alpha_n)=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ ***тождество*** $f(z)\equiv 0$ ***вытекает только при расходимости ряда***

$$\sum_1^\infty(1-|\alpha_n|). \tag{4.7}$$

Доказательство. Функция

$$F(z)=(1-z)^{2p}f(z)$$

голоморфна в круге $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ и $F(\alpha_n)=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$. Из (4.6) следует, что $F(z)$ ограничена в круге $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$. Преобразованием $w=2z-1$ этот круг переходит в $|w|<1$. Функция

$$\Phi(w)=F\left(\frac{w+1}{2}\right)$$

голоморфна и ограничена в $|w|<1$, при этом $\Phi(\beta_n)=0$ $(n=1,2,3,\ldots)$, где $\beta_n=2\alpha_n-1$.

Предположим, что ряд (4.7) расходится. В силу вышесказанного расходится и ряд

$$\sum_1^\infty|1-\alpha_n|=\frac{1}{2}\sum_1^\infty|1-\beta_n|.$$

Так как последовательность $\{\beta_n\}$ тоже удовлетворяет условиям (4.1) и (4.2), то ряд

$$\sum_1^\infty(1-|\beta_n|)$$

расходится. По известной теореме отсюда следует, что

$$\Phi(w)=F(z)=f(z)\equiv 0.$$

При сходимости ряда (4.7), вообще говоря, $f(z)\not\equiv 0$, что показывает пример произведения Бляшке.

Следствие. Теорема IV справедлива для всякой функции $f(z)\subset H_p(\alpha)$ $(p>1)$ в силу неравенства (1.12).

5. Рассмотрим класс $H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$ голоморфных в единичном круге функций. Пусть функция

$$f(z)=\sum_1^{\infty}a_n z^n \tag{5.1}$$

принадлежит к классу $H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$, тогда для всякого $r(0<r<1)$ интегралы

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}|f(\rho e^{i\theta})|^2\,\rho d\rho d\theta=(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\int_0^r(1-t)^{\alpha}t^n dt \tag{5.2}$$

равномерно ограничены. Отсюда в силу (1.9) следует, что имеет место равенство

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}|f(\rho e^{i\theta})|^2\,\rho d\rho d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2)\ \Gamma(1+n)}{\Gamma(\alpha+2+n)}|a_n|^2. \tag{5.3}$$

Разность $f(z)-\sum\limits_0^n a_k z^k$ очевидно принадлежит к классу, $H_2(\alpha)$, следовательно по (5.3)

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}|f(\rho e^{i\theta})-\sum_0^n a_k(\rho e^{i\theta})^k|^2\rho d\rho d\theta=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2)\ \Gamma(1+k)}{\Gamma(\alpha+2+k)}|a_k|^2 \tag{5.4}$$

Отсюда в силу сходимости ряда (5.3) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}|f(\rho e^{i\theta})-\sum_{k=0}^n a_k(\rho e^{i\theta})^k|^2\rho d\rho d\theta=0. \tag{5.5}$$

Приводим теоремы о параметрическом представлении функций класса $H_2(\alpha)$.

Теорема V. Если функция $f(z)$ *принадлежит к классу* $H_2(\alpha)$ *$(\alpha>-1)$, тогда функция*

$$\varphi_0(z)=\frac{\alpha+1}{2}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}}f(\rho z)\,d\rho \qquad |z|<1 \tag{5.6}$$

принадлежит к классу H_2 *Рисса, при этом имеет место следующее интегральное представление функции* $f(z)$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\varphi_0(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}|dt| \tag{5.7}$$

в единичном круге.

Доказательство. Из (5.1) при $|z|<1$ имеем

$$\varphi_0(z)=\frac{\alpha+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\int_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}}\rho^n d\rho=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}+n\right)}a_n z^n \tag{5.8}$$

По формуле Стирлинга имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\alpha+2+n)}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+3}{2}+n\right)}{\Gamma^2(1+n)}=1. \tag{5.9}$$

Из сходимости ряда (5.3) и из (5.9) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(1+n)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+3}{2}+n\right)}|a_n|^2<+\infty. \tag{5.10}$$

Но (5.10) означает, что $\varphi_0(z)\subset H_2$ в круге $|z|<1$. Следовательно имеем

$$a_n\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}+n\right)}=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\varphi_0(t)}{t^n}|dt|\ (n=0,1,2,\ldots). \tag{5.11}$$

Таким образом, из (5.1) и (5.11) получим при $|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\varphi_0(t)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)\Gamma(1+n)}(z\bar{t})^n\right\}|dt| \tag{5.12}$$

Замечая, что в силу (1.8) при $|z|<1$

$$\frac{1}{(1-z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)\Gamma(1+n)}z^n. \tag{5.13}$$

Из (5.12) получаем утверждение теоремы*).

Теорема VI. Функции класса $H_2(\alpha)$ *представляются в следующем параметрическом виде*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}|dt|, \tag{5.14}$$

где $\varphi(t)$ *произвольная суммируемая с квадратом модуля функция на* $|t|=1$. *Функция* $\varphi_0(t)$, *являющийся граничным значением функции* $\varphi_0(z)$, *минимизирует интеграл*

$$\int_{|t|=1}|\varphi(t)|^2\,|dt|$$

в классе функций $\varphi(t)$, *представляющих* $f(z)$ *интегралом* (5.14)

*) В случае, когда $\alpha=0$ терема V была доказана М. В. Келдышом

Доказательство. Обозначим

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \varphi(t)\,\bar{t}^n\,|dt| \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{5.15}$$

где $\varphi(t)$ произвольная суммируемая с квадратом модуля функция на $|t|=1$. Имея в виду, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} t^n \cdot \bar{t}^m\,|dt| = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m=n \end{cases}$$

из неравенства Бесселя заключаем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \tag{5.16}$$

сходится. Далее, по (5.14), (5.13) и (5.12)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)\Gamma(1+n)}\, b_n z^n \tag{5.17}$$

Из соотношения (5.9) и из сходимости ряда (5.16) заключаем, что

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} (1-\rho)^\alpha\,|f(\rho e^{i\vartheta})|^2\,\rho\,d\rho\,d\vartheta < +\infty,$$

т. е. $f(z) \subset H_2(\alpha)$.

По теореме V функция

$$\varphi_0(z) = \frac{\alpha+1}{2}\int\limits_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}} f(\rho z)\,d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{5.18}$$

принадлежит к классу H_2 Рисса и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{|t|=1} |\varphi_0(t) - \sum_{k=0}^{n} b_n t^n|^2\,|dt| = 0. \tag{5.19}$$

По (5.15) и (5.18) для любого $n \geqslant 0$

$$\int\limits_{|t|=1} [\varphi_0(t) - \varphi(t)]\ \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} b_k t^k\right)}\,|dt| = 0, \tag{5.20}$$

откуда, пользуясь неравенством Шварца, имеем

$$\int\limits_{|t|=1} [\varphi_0(t) - \varphi(t)]\,\overline{\varphi_0(t)}\,|dt| = \int\limits_{|t|=1} [\overline{\varphi_0(t)} - \overline{\varphi(t)}]\,\varphi_0(t)\,|dt| = 0. \tag{5.21}$$

Из (5.21) имеем

$$\int\limits_{|t|=1} |\varphi(t)|^2\,|dt| - \int\limits_{|t|=1} |\varphi_0(t)|^2\,|dt| = \int\limits_{|t|=1} |\varphi(t) - \varphi_0(t)|^2\,|dt|, \tag{5.22}$$

откуда следует экстремальное свойство функции $\varphi_0(t)$.

Наконец докажем теорему, частный случай которой, когда $\alpha=0$, содержится в [5,6].

Теорема VII. Если $F(\rho,\vartheta)$ *произвольная функция, задання в круге* $|z|<1$, *для которой*

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|F(\rho,\vartheta)|^2\,\rho d\rho d\vartheta<+\infty, \tag{5.23}$$

тогда функция

$$f_F(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,\frac{F(\rho,\vartheta)}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\,\rho d\rho d\vartheta \tag{5.24}$$

принадлежит к классу $H_2(\alpha)$ *и минимизирует интеграл*

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|F(\rho,\vartheta)-f(\rho e^{i\vartheta})|^2\,\rho d\rho d\vartheta \tag{5.25}$$

в классе функций $f(z)\subset H_2(\alpha)$.

Доказательство. Обозначим

$$a_n=\frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(1+n)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,F(\rho,\vartheta)\,\overline{(\rho e^{i\vartheta})^n}\,\rho d\rho d\vartheta, \tag{5.26}$$

тогда в силу (1.8)

$$f_F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\quad(|z|<1). \tag{5.27}$$

Далее имеем

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|F(\rho,\vartheta)-\sum_{k=0}^{n}a_k(\rho e^{i\vartheta})^k|^2\,\rho d\rho d\vartheta=$$

$$=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|F(\rho,\vartheta)|^2\rho d\rho d\vartheta-\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(1+k)}{\Gamma(\alpha+2+k)}|a_k|^2\geqslant0,$$

откуда следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(1+n)}{\Gamma(\alpha+2+n)}\,|a_n|^2$$

сходится, и следовательно $f(z)\subset H_2(\alpha)$.

Но из (5.26) и (5.27) следует, что

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,[F(\rho,\vartheta)-f_F(\rho e^{i\vartheta})]\,\overline{(\rho e^{i\vartheta})^n}\,\rho d\rho d\vartheta=0\ (n=0,1,2,\ldots)$$

Пусть $f(z)$ любая функция класса $H_2(\alpha)$, тогда, используя неравенство Шварца, имеем:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha[F(\rho,\vartheta)-f_F(\rho e^{i\vartheta})][\overline{f_F(\rho e^{i\vartheta})}-\overline{f(\rho e^{i\vartheta})}]\,\rho d\rho d\vartheta=0$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|F(\rho,\vartheta)-f(\rho e^{i\vartheta})|^2\,\rho d\rho d\vartheta=$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|F(\rho,\vartheta)-f_F(\rho e^{i\vartheta})|^2\,\rho d\rho d\vartheta+\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|f_F(\rho e^{i\vartheta})-f(\rho e^{i\vartheta})|^2\,\rho d\rho d\vartheta$$

и следовательно, минимум интеграла (5.25) достигается только при $f(z)\equiv f_F(z)$.

6. При помощи предыдущих результатов, мы установим полноту некоторых систем рациональных функций в единичном круге.

Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ отличных друг от друга комплексных чисел лежит внутри $|z|<1$ и

$$0\leqslant|\alpha_0|\leqslant|\alpha_1|\leqslant\ldots\leqslant|\alpha_n|\leqslant\ldots$$

Рассмотрим систему рациональных функций

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{(1-\bar{\alpha}_n z)^{\alpha+2}}\quad(\alpha>-1)\quad(n=0,1,2\ldots)\tag{6.1}$$

Очевидно, что $\varphi_n(z)\subset H_2(\alpha)$ и по теореме I имеем

$$\varphi_n(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,\frac{\varphi_n(\rho e^{i\vartheta})}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\,\rho d\rho d\vartheta\quad(n=0,1,2,\ldots)\tag{6.2}$$

В частности, при $z=\alpha_m$ имеем

$$\varphi_n(\alpha_m)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{1}{(1-\alpha_m\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\,\frac{1}{(1-\bar{\alpha}_n\rho e^{i\vartheta})^{\alpha+2}}\,\rho d\rho d\vartheta\tag{6.3}$$

Иначе говоря,

$$[\varphi_n,\bar{\varphi}_m]\equiv\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,\varphi_n(\rho e^{i\vartheta})\overline{\varphi_m(\rho e^{i\vartheta})}\,\rho d\rho d\vartheta=$$

$$=\varphi_n(\alpha_m)=\frac{1}{(1-\bar{\alpha}_n\alpha_m)^{\alpha+2}}\quad(n,m=0,1,2,\ldots)\tag{6.4}$$

Ортогонализуем систему функций (6.1) по площади единичного круга при наличии веса $\frac{\alpha+1}{\pi}(1-\rho^2)^\alpha$.

Для этого вводим известные обозначения

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} [\bar{\varphi}_0, \varphi_0], [\bar{\varphi}_0, \varphi_1], \ldots, [\bar{\varphi}_0, \varphi_n] \\ [\bar{\varphi}_1, \varphi_0], [\bar{\varphi}_1, \varphi_1], \ldots, [\bar{\varphi}_1, \varphi_n] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\bar{\varphi}_n, \varphi_0], [\bar{\varphi}_n, \varphi_1], \ldots, [\bar{\varphi}_n, \varphi_n] \end{vmatrix} \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \qquad (6,5)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} & \Delta_{n-1} & & \begin{matrix}[\bar{\varphi}_0, \varphi_n] \\ \cdots \\ [\bar{\varphi}_{n-1}\varphi_n]\end{matrix} \\ \varphi_0(z), & \varphi_1(z), \ldots, & & \varphi_n(z) \end{vmatrix}, \ \Delta_{-1}=1 (n=0, 1, 2, \ldots) \qquad (6.6)$$

Очевидно, что

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha \, \Phi_n(\rho e^{i\vartheta})\overline{\Phi_m(\rho e^{i\vartheta})}\,\rho d\rho d\vartheta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m=n \end{cases} \qquad (6.7)$$

Далее, в силу (6.4)

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} \frac{1}{(1-\alpha_0\bar{\alpha}_0)^{\alpha+2}}, & \frac{1}{(1-\alpha_0\bar{\alpha}_1)^{\alpha+2}}, \ldots, & \frac{1}{(1-\alpha_0\bar{\alpha}_n)^{\alpha+2}} \\ \frac{1}{(1-\alpha_1\bar{\alpha}_0)^{\alpha+2}}, & \frac{1}{(1-\alpha_1\bar{\alpha}_1)^{\alpha+2}}, \ldots, & \frac{1}{(1-\alpha_1\bar{\alpha}_n)^{\alpha+2}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{(1-\alpha_{n-1}\bar{\alpha}_0)^{\alpha+2}}, & \frac{1}{(1-\alpha_{n-1}\bar{\alpha}_1)^{\alpha+2}}, \ldots, & \frac{1}{(1-\alpha_{n-1}\bar{\alpha}_n)^{\alpha+2}} \\ \frac{1}{(1-z\bar{\alpha}_0)^{\alpha+2}}, & \frac{1}{(1-z\bar{\alpha}_1)^{\alpha+2}}, \ldots, & \frac{1}{(1-z\bar{\alpha}_n)^{\alpha+2}} \end{vmatrix} \qquad (6.8)$$

Из (6.8) следует, что при $n=0,1,2,\ldots.$

$$\Phi_n(\alpha_0)=\Phi_n(\alpha_1)=\ldots=\Phi_n(\alpha_{n-1})=0, \ \Phi_n(\alpha_n)=\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}. \qquad (6.9)$$

Пусть теперь $f(z) \subset H_2(\alpha)$. Составим числа

$$a_k=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha f(\rho e^{i\vartheta})\,\overline{\Phi_k(\rho e^{i\vartheta})}\,\rho d\rho d\vartheta. \qquad (6.10)$$

По неравенству Бесселя имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2 \leqslant \frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha \, |f(\rho e^{i\vartheta})|^2 \rho d\rho d\vartheta. \qquad (6.11)$$

По теореме Рисса-Фишера существует функция $f_1(z) \subset H_2(\alpha)$ такая, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|f_1(\rho e^{i\vartheta})|^2\,\rho d\rho d\vartheta \tag{6.12}$$

и

$$a_k=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,f_1(\rho e^{i\vartheta})\,\overline{\Phi_k(\rho e^{i\vartheta})}\,\rho d\rho d\vartheta. \tag{6.13}$$

Но, очевидно, что $F(z)=f(z)-f_1(z)\subset H_2(\alpha)$ и по (6.10) и (6.13)

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,F(\rho e^{i\vartheta})\,\overline{\Phi_k(\rho e^{i\vartheta})}\rho d\rho d\vartheta=0\quad(k=0,\,1,\,2,\ldots) \tag{6.14}$$

или, что то же самое,

$$F(\alpha_k)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,\frac{F(\rho e^{i\vartheta})}{(1-\alpha_k\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\,\rho d\rho d\vartheta=0\quad(k=0,1,2,\ldots). \tag{6.15}$$

Из теорем III_2, III_3, IV и из (6.15) следует

Теорема $VIII_1$. *Если последовательность* $\{\alpha_n\}$ *удовлетворяет одному из следующих условий*

a) $$\int_0^1(1-r)^\alpha e^{2N(r)}\,dr=+\infty,$$

b) $$\liminf_{n\to\infty}(1-|\alpha_n|)\,n>\frac{\alpha+1}{2}, \tag{6.16}$$

c) $$\limsup_{n\to\infty}\frac{1-|\alpha_n|}{\log\frac{1}{1-|\alpha_n|}}\,n>e\frac{\alpha+1}{1},$$

d) $$|\arg(\alpha_n-1)|\geqslant\frac{\pi}{2}+\delta\,(\delta>0),\ \sum_0^\infty(1-|\alpha_n|)=+\infty,$$

то для всякой функции $f(z)\subset H_2(\alpha)$ *будем иметь*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,\Big|f(\rho e^{i\vartheta})-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(\rho e^{i\vartheta})\Big|^2\rho d\rho d\vartheta=0 \tag{6.17}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(1-|z|)^{\alpha+2}\,\Big|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(z)\Big|=0\quad(|z|\leqslant1) \tag{6.18}$$

равномерно относительно z, *где*

$$a_k=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,f(\rho e^{i\vartheta})\,\overline{\Phi_k(\rho e^{i\vartheta})}\,\rho d\rho d\vartheta.$$

В каждой замкнутой части круга $|z|<1$ имеем равномерно

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Phi_k(z). \tag{6.19}$$

Заметим, что в силу (6.9) коэфициенты $\{a\}$ можно определить из следующих рекурентных соотношений

$$\begin{aligned} f(\alpha_0)&=a_0\Phi_0(\alpha_0)\\ f(\alpha_1)&=a_0\Phi_0(\alpha_1)+a_1\Phi_1(\alpha_1)\\ &\dots\\ f(\alpha_n)&=a_0\Phi_0(\alpha_n)+a_1\Phi_1(\alpha_n)+\dots+a_n\Phi_n(\alpha_n)\\ &\dots \end{aligned} \tag{6.20}$$

Теорема VIII$_2$ При $|w|<1$ в каждой замкнутой части круга $|z|<1$ имеем равномерно

$$\frac{1}{(1-\bar{w}z)^{\alpha+2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\Phi_k(w)}\,\Phi_k(z), \tag{6.21}$$

а в открытом круге $|z|<1$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}\left|\frac{1}{(1-\bar{w}\rho e^{i\theta})^{\alpha+2}}-\sum_{k=0}^{n}\overline{\Phi_k(w)}\Phi_k(\rho e^{i\theta})\right|^2\rho d\rho d\theta=0 \tag{6.22}$$

Доказательство. Если заметим, что

$$\Phi_k(z)=\sum_{p=0}^{k}\frac{A_p}{(1-\bar{\alpha}_p z)^{\alpha+2}}$$

то будем иметь по (6.4)

$$a_k=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}\frac{1}{(1-\bar{w}\rho e^{i\theta})^{\alpha+2}}\cdot\overline{\Phi_k(\rho e^{i\theta})}\rho d\rho d\theta=$$

$$=\sum_{p=0}^{k}\bar{A}_p\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}\frac{1}{(1-\bar{w}\rho e^{i\theta})^{\alpha+2}}\cdot\frac{1}{(1-\alpha_p\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta=$$

$$=\sum_{p=0}^{k}\frac{\bar{A}_p}{(1-\bar{w}\alpha_p)^{\alpha+2}}=\overline{\Phi_k(w)}. \tag{6.23}$$

Соотношения (6.21) и (6.22) следует из теоремы VIII$_1$ и из (6.23).

Результат этого пункта является распространением на классы $H_2(\alpha)(\alpha>-1)$ теорем Такенака(⁹), доказанных им для класса H_2 Рисса.

7. Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет одному из условий (6.16). Если для последовательности комплексных чисел $\{a_n\}$ ряд $\sum_0^{\infty}|a_n|^2$ сходится, тогда по теоремам Рисса—Фишера и VIII$_1$ существует единственная функция $f(z)$ класса $H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$ такая, что

$$1)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,[f(\rho e^{i\vartheta})-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(\rho e^{i\vartheta})]^2\,\rho d\rho d\vartheta=0 \qquad (7.1)$$

2) Значения функции $f(z)$ в точках последовательности $\{\alpha_n\}$ определяются из соотношений

$$f(\alpha_n)=a_0\Phi_0(\alpha_n)+a_1\Phi_1(\alpha_n)+\ldots+a_n\Phi_n(\alpha_n)\quad (n=0,1,2,\cdots). \qquad (7.2)$$

Таким образом имеем

Теорема IX. Пусть последовательность точке $\{\alpha_n\}$ *удовлетворяет одному из условий (6.16). для того, чтобы существовала функция* $f(z)$ *класса* $H_2(\alpha)$, *принимающая в точках* α_n *заданные значения* $f(\alpha_n)$, *необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2$ *был сходящимся, где* $\{a_k\}$ *определяются при помощи значений* $\{f(\alpha_k)\}$ *по рекурентным формулам* (7.2). *Эта функция* $f(z)$ *дается рядом*

$f(z)=\sum_0^{\infty}a_k\Phi_k(z)$ *равномерно сходящимся в* $|z|\leqslant r<1$ *и является единственной функцией класса* $H_2(\alpha)$, *принимающей значения* $f(\alpha_n)$ *в точках* α_n.

Соответствующая теорема для класса H_2 была доказана в уже цитированной работе Такенака.

Использованием теоремы V аналогичными методами получаем

Теорема X. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ *удовлетворяет одному из следующих условий*

a) $\displaystyle\int_0^1(1-r)^{2\beta-1}e^{2N(r)}dr=+\infty,$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\inf(1-|\alpha_n|)n>\beta-1,$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1-|\alpha_n|}{\log\frac{1}{1-|\alpha_n|}}n>e(\beta-1),$

d) $\displaystyle|\arg(\alpha_n-1)|\geqslant\frac{\pi}{2}+\delta(\delta>0),\ \sum_{n=0}^{\infty}(1-|\alpha_n|)=+\infty,$

то для всякой функции $f(z)$, *принадлежащей к классу* H_2 *в круге* $|z|<1$ *будем иметь*

$$\inf\int_{|z|=1}|f(z)-R(z)|^2\,|dz|=0,$$

где $\{R\}$ *всевозможные линейные комбинации от функций* $\{(1-\bar{\alpha}_n z)^{-\beta}\}$ $(\beta>1)$.

§ 2. *Об одном обобщении формулы Иенсена-Неванлинна. Каноническое представление мероморфных функций неограниченного вида**).

I. Пусть функция $w=F(z)$ мероморфна в единичном круге $|z|<1$ и $F(z)=C_\lambda z^\lambda+\ldots$ $(C_\lambda\neq 0)$ есть ее разложение в ряд Лорана в окрестности начала координат. Пусть далее, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ соответственно означают последовательности всевозможных нулей и полюсов функции $F(z)$, расположенные в порядке возрастания их модулей и отличные от $z=0$, причем каждый кратный нуль или полюс берется соответственно его кратности.

Известно, что для любого $0<r<1$ и $|z|<r$ имеет место тождество

$$\log|F(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{i\vartheta})|\ \mathrm{Re}\ \frac{re^{i\vartheta}+z}{re^{i\vartheta}-z}d\vartheta+\sum_{0<|a_\mu|<r}\log\left|\frac{r(z-a_\mu)}{r^2-\bar a_\mu z}\right|-$$

$$-\sum_{0<|b_\nu|<r}\log\left|\frac{r(z-b_\nu)}{r^2-\bar b_\nu z}\right|+\lambda\log\frac{|z|}{r}, \tag{1.1}$$

называемое формулой Иенсена-Неванлинна[2].

При $z=0$ формула (1.1) можно записать в следующей симметричной форме

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|F(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta+\sum_{0<|b_\nu|<r}\log\frac{r}{|b_\nu|}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|F(re^{i\vartheta})|}\,d\vartheta+\sum_{0<|a_\mu|<r}\log\frac{r}{|a_\mu|}+\lambda\log r+\log|C_\lambda|. \tag{1.2}$$

Для исследования мероморфных функций, в частности, для выяснения природы распределения их значений, выражение

$$T_F(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|F(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta+\sum_{0<|b_\nu|<r}\log\frac{r}{|b_\nu|} \tag{1.3}$$

играет важную роль. Оно называется характеристикой функции $F(z)$ (Р. Неванлинна).

Функция $T_F(r)$ неотрицательна и возрастает вместе с r. В случае, когда

$$T_F(1)=\lim_{r\to 1}T_F(r)<+\infty,$$

$F(z)$ называется мероморфной функцией ограниченного вида.

Путем предельного перехода в (1.1), когда $r\to 1$, Неванлинным было доказано, что

Всякая функция ограниченного вида представляется по формуле

---

*) Результаты этого параграфа были изложены в заметке (14) в 1945 г.

$$F(z)=z^{\lambda}\frac{\pi(z;\,a_\mu)}{\pi(z;\,b_\nu)}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\psi(\vartheta)+ic\right\},\tag{1.4}$$

где $\psi(\vartheta)$ — *произвольная вещественная функция ограниченной вариации на* $[0,2\pi]$, C — *постоянная, а*

$$\pi(z;\,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-z_k z}\tag{1.5}$$

произведение Бляшке.

Результат теоремы I позволяет дать некоторое обобщение формулы Иенсена-Неванлинна, что даст нам возможность получить каноническое представление вполне определнного вида некоторых классов мероморфных в единичном круге функций, имеющих неограниченную характеристику.

2. Пусть $F(z)$ есть функция п. 1. Выражение

$$\varphi(z)=z^{-\lambda}F(z)\,\frac{\prod\limits_{|b_\nu|\leqslant r}\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)}{\prod\limits_{|a_\mu|\leqslant r}\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)}\quad(0<r<1)\tag{2.1}$$

является голоморфной функцией в замкнутом круге $|z|\leqslant r$, и там отлична от нуля. Функция $\log\varphi(z)$ голоморфна при $|z|\leqslant r$, и по теореме I (формула (1·7)) имеем при $|z|<r$

$$\log\varphi(z)=-\log\overline{\varphi(0)}+\frac{2(\alpha+1)}{\pi}r^2\int_0^r\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)^{\alpha}\frac{\log|\varphi(\rho e^{i\vartheta})|}{(r^2-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta\tag{2.2}$$

Подставляя сюда значение $\varphi(z)$ из (2.1), получим следующую формулу, связывающую нули и полюсы мероморфной функции $F(z)$, при $|z|<r<1$

$$\log F(z)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)^{\alpha}\frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(r^2-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta+$$

$$+\sum_{0<|a_\mu|\leqslant r}\log\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)e^{-U_\alpha^{(r)}(z;\,a_\mu)}-\sum_{0<|b_\nu|\leqslant r}\log\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)e^{-U_\alpha^{(r)}(z;\,b_\nu)}+$$

$$+\lambda\log z+4\lambda(\alpha+1)r^{-2\alpha-2}\int_0^r(r^2-\rho^2)^{\alpha}\rho\log\frac{1}{\rho}\,d\rho-\log\overline{C}_\lambda,\tag{2.3}$$

где

$$U_\alpha^{(r)}(z;\,\zeta)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}r^2\int_0^r\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)^{\alpha}\frac{\log\left|1-\frac{\rho e^{i\vartheta}}{\zeta}\right|}{(r^2-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta,\tag{2.4}$$

а $\alpha>-1$ любое.

Покажем, что после предельного перехода, когда $\alpha\to-1$, (2.3) переходит в формулу (1.1) Иенсена-Неванлинна.

С этой целью докажем, что

$$\lim_{\alpha\to-1}\frac{2(\alpha+1)}{\pi}r^2\int_0^r\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)^\alpha\frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(r^2-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}-z}\log|F(re^{i\vartheta})|d\vartheta. \tag{2.5}$$

Действительно, пусть $\varepsilon>0$ произвольное и $r_0=r_0(\varepsilon)$ выбрано так, чтобы при $r_0\leqslant\rho\leqslant r$, $0\leqslant\alpha\leqslant-1$ и фиксированном z ($|z|<r$) было

$$\left|\frac{r^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(r^2-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}d\vartheta-\frac{r^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\log|F(re^{i\vartheta})|}{(r^2-zre^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}d\vartheta\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Пока полагая, что $\alpha>-1$, умножим (2.6) на $2(\alpha+1)(r^2-\rho^2)^\alpha\rho d\rho$ и интегрируем в пределах (r_0, r), получим неравенство

$$\left|\frac{2(\alpha+1)r^2}{\pi}\int_{r_0}^r\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)^\alpha\frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(r^2-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta-\right.$$

$$\left.-\frac{(r^2-r_0^2)^{\alpha+1}}{\pi}r^2\int_0^{2\pi}\frac{\log|F(re^{i\vartheta})|}{(r^2-zre^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}d\vartheta\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Далее, очевидно, что

$$\lim_{\alpha\to-1}\frac{2(\alpha+1)r^2}{\pi}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)^\alpha\frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(r^2-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta=0. \tag{2.8}$$

Перейдя к переделу в (2.7), когда $\alpha\to-1$ и имея в виду (2.8), получаем (2.5).

В предельном соотношении (2.5) берем в частности

$$F(\rho e^{i\vartheta})=\log\left|1-\frac{\rho e^{i\vartheta}}{\zeta}\right|,\ (0<|\zeta|<r)$$

тогда, имея в виду формулу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}-z}\log\left|1-\frac{re^{i\vartheta}}{\zeta}\right|d\vartheta=\log\frac{r^2-\bar{\zeta}z}{|\zeta|^2}, \tag{2.9}$$

которая следует из формулы Коши, получаем

$$U_{-1}^{(r)}(z;\zeta)\equiv\lim_{\alpha\to-1}U_\alpha^{(r)}(z;\zeta)=\log\frac{r^2-\bar{\zeta}z}{|\zeta|^2}. \tag{2.10}$$

Наконец не трудно видеть, что

$$\lim_{\alpha\to-1} 2(\alpha+1)\int_0^r (r^2-\rho^2)^\alpha \rho \log\frac{1}{\rho}\,d\rho=\log\frac{1}{r}. \tag{2.11}$$

Из соотношений (2.8), (2.10) и (2.11) и из формулы (2.3) после предельного перехода, когда $\alpha\to-1$, получаем:

$$\log F(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}-z}\log[F(re^{i\vartheta})]\,d\vartheta+\sum_{|a_\mu|<r}\log\frac{(a_\mu-z)\bar a_\mu}{r^2-\bar a_\mu z}$$

$$-\sum_{|b_\nu|<r}\log\frac{(b_\nu-z)\bar b_\nu}{r^2-\bar b_\nu z}+\lambda\log\frac{z}{r^2}-\log\bar c_\lambda. \tag{2.12}$$

Когда $z=0$, (2.12) дает

$$\log|\bar c_\lambda|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{i\vartheta})|d\vartheta+\sum_{|a_\mu|<r}\log\left|\frac{a_\mu}{r}\right|-\sum_{|b_\nu|<r}\log\left|\frac{b_\nu}{r}\right|+\lambda\log\frac{1}{r} \tag{2.13}$$

что совпадает с (1.2).

Беря вещественную часть от (2.12) и подставляя туда значение $\log|C_\lambda|$ из (2.13), получаем формулу (1.1) Иенсена-Неванлинна.

3. Обозначим

$$U_\alpha(z;\zeta)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\log\left|1-\frac{\rho e^{i\vartheta}}{\zeta}\right|}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta. \tag{3.1}$$

Легко видеть, что

$$U_\alpha^{(r)}\left(\frac{z}{r},\frac{\zeta}{r}\right)=U_\alpha(z;\zeta). \tag{3.2}$$

Докажем лемму

Лемма 2. При $|z|<1$ и $0<|\zeta|\leqslant 1$ функции $U_\alpha(z;\zeta)$ удовлетворяют рекурентному соотношению

$$U_{\alpha-1}(z;\zeta)-U_\alpha(z;\zeta)=\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^{\alpha+1}(\alpha>0) \tag{3.3}$$

Доказательство. Имеем:

$$U_\alpha(z;\zeta)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^{|\zeta|}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\log\left|1-\frac{\rho e^{i\vartheta}}{\zeta}\right|}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta+$$

$$+\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_{|\zeta|}^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\log\left|1-\frac{\zeta}{\rho e^{i\vartheta}}\right|}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta+$$

$$+\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\log\frac{\rho}{|\zeta|}}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta. \tag{3.4}$$

Заметим теперь, что при $|\tau|<1$

$$\log|1-\tau|=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^n+\bar{\tau}^n}{2n} \tag{3.5}$$

и

$$\frac{\alpha+1}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2+k)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(1+k)}(z\rho e^{-i\vartheta})^k \tag{3.6}$$

равномерно относительно ρ и ϑ $(0\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\rho\leq 2\pi)$ при фиксированном $z(|z|<1)$.

В силу (3.5) и (3.6), из (3.4) получаем:

$$U_\alpha(z;\zeta)=4(\alpha+1)\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-\rho^2)^\alpha\rho\log\frac{\rho}{|\zeta|}d\rho-$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(1+n)}\frac{z^n}{n}\left\{\zeta^{-n}\int\limits_{0}^{|\zeta|}(1-\rho^2)^\alpha\rho^{2n+1}d\rho+\bar{\zeta}^n\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-\rho^2)^\alpha\rho d\rho\right\}. \tag{3.7}$$

Интегрированием по частям получим

$$4(\alpha+1)\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-\rho^2)^\alpha\rho\log\frac{\rho}{|\zeta|}d\rho=\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}dt \tag{3.8}$$

и

$$2\zeta^{-n}\int\limits_{0}^{|\zeta|}(1-\rho^2)^\alpha\rho^{2n+1}d\rho+2\bar{\zeta}^n\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-\rho^2)^\alpha\rho d\rho=\frac{n}{(\alpha+1)\zeta^n}\int\limits_{0}^{|\zeta|^2}(1-t)^{\alpha+1}t^{n-1}dt \tag{3.9}$$

Из (3.7), (3.8) и (3.9) имеем:

$$U_\alpha(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}dt-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\int\limits_{0}^{|\zeta|^2}(1-t)^{\alpha+1}t^{n-1}dt. \tag{3.10}$$

Теперь положим, что $\alpha>0$ и рассмотрим разность (3,3)

$$U_{\alpha-1}(z;\zeta)-U_\alpha(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}(1-t)^\alpha dt+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\left\{\frac{\alpha+1+n}{\alpha+1}\int\limits_{0}^{|\zeta|^2}(1-t)^{\alpha+1}t^{n-1}dt-\int\limits_{0}^{|\zeta|^2}(1-t)^\alpha t^{n-1}dt\right\} \tag{3.11}$$

Но

$$\frac{\alpha+1+n}{\alpha+1}\int\limits_0^{|\zeta|^2}(1-t)^{\alpha+1}t^{n-1}dt-\int\limits_0^{|\zeta|^2}(1-t)^{\alpha}t^{n-1}dt=\frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,|\zeta|^{2n}. \qquad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) получаем

$$U_{\alpha-1}(z;\zeta)-U_\alpha(z;\zeta)=(1-|\zeta|^2)^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(1+n)}(z\bar\zeta)^n. \qquad (3.13)$$

Утверждение леммы следует из (3.6) и (3.13).

Заметим, что (2.10) получается тоже из (3.10) предельным переходом

$$U_{-1}(z;\zeta)\equiv\lim_{\alpha\to-1}U_\alpha(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{dt}{t}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z\bar\zeta)^n}{n}=\log\frac{1-\bar\zeta z}{|\zeta|^2}. \qquad (3.14)$$

Следствие 1. *При* $\eta\leqslant|\zeta|\leqslant1\ (\eta>0)$ *и* $|z|\leqslant r<1$ *соотношение* (3.14) *выполняется равномерно относительно* ζ.

Это просто следует из (3.10).

Следствие 2. Если $p\geqslant0$ целое, то

$$\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-U_p(z;\zeta)}=\left(1-\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)\exp\left\{\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{j+1}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^{j+1}\right\} \qquad (3.15)$$

Отметим, что правая часть (3.15) имеет такую же структуру, что и так называемые элементарные множители в бесконечном произведении Вейерштрасса.

4. Докажем теорему.

Теорема XI. Пусть бесконечная последовательность лежащих внутри единичного круга комплексных чисел $\{z_n\}$, *расположенных в порядке возрастания их модулей и отличных от* $z=0$, *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{\alpha+2}<+\infty \quad (\alpha>-1). \qquad (4.1)$$

Бесконечное произведение

$$\pi_\alpha(z;z_n)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{-U_\alpha(z;z_n)}\ (\alpha>-1), \qquad (4.2)$$

где

$$U_\alpha(z;z_n)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\log\left|1-\frac{\rho e^{i\vartheta}}{z_n}\right|}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta \qquad (4.3)$$

абсолютно и равномерно сходится в каждой замкнутой части $|z|<1$ и представляет аналитическую функцию, обращающуюся в нуль на последовательности $\{z_n\}$.

Доказательство. Пусть $|z|<|\zeta|$, тогда из (3.10) имеем

$$U_\alpha(z;\zeta)=\int\limits_{|z|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\zeta}\,t\right)^n\right\}dt-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha+1}t^{n-1}dt. \qquad (4.4)$$

В силу (3.6) отсюда следует

$$U_\alpha(z;\zeta)=\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{z}{\zeta}t\right)^{\alpha+2}}\frac{dt}{t}. \qquad (4.5)$$

Следовательно, при $|\zeta|>|z|$

$$A(z;\zeta)\equiv\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-U_\alpha(z;\zeta)}=\exp\left\{-\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{z}{\zeta}t\right)^{\alpha+2}}\frac{dt}{t}\right\}. \qquad (4.6)$$

Обозначим

$$\omega(z;z_n)=-\int\limits_{|z_n|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{z}{z_n}t\right)^{\alpha+2}}\frac{dt}{t}, \qquad (4.7)$$

тогда

$$|\omega(z;z_n)|\leqslant\frac{(1-|z_n|^2)^{\alpha+2}}{|z_n|^2\left(1-\frac{r}{|z_n|}\right)^{\alpha+2}}\quad(|z|\leqslant r<1). \qquad (4.8)$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\omega(z;z_n)=0$ равномерно относительно z, когда $|z|\leqslant\zeta<1$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|1-|A(z;z_n)||}{(1-|z_n|)^{\alpha+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|1-e^{\operatorname{Re}\omega(z;z_n)}|}{|\operatorname{Re}\omega(z;z_n)|}\lim_{n\to\infty}\frac{|\operatorname{Re}\omega(z;z_n)|}{(1-|z_n|)^{\alpha+2}}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{|\omega(z;z_n)|}{(1-|z_n|)^{\alpha+2}}\leqslant\frac{2^{\alpha+2}}{(1-r)^{\alpha+2}} \qquad (4.9)$$

Из (4.1) и (4.9) следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{1-|A(z;z_n)|\}$$

равномерно сходится при $|z|\leq r<1$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Важно отметить, что в силу следствий 1 и 2 п. 3, при $\alpha=p>0$ целом

$$\pi_p(z;\, z_n)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\bar z_n z}\,\bar z_n\,.\, e^{\sum\limits_{j=0}^{p}\frac{1}{j+1}\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar z_n z}\right)^{j+1}}, \tag{4.10}$$

а при $\alpha=-1$

$$\pi_{-1}(z;\, z_n)\equiv \lim_{\alpha\to -1}\pi_\alpha(z;\, z_n)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-z_n z}\,\bar z_n. \tag{4.11}$$

Таким образом, бесконечное произведение $\pi_\alpha(z;z_n)$ зависящее от параметра $\alpha>-1$, в пределе, когда $\alpha\to -1$ совпадает с бесконечным произведением Бляшке.

Что касается произведения (4.10), то оно имеет такую же форму как и бесконечые произведение Вейерштрасса и является естественным обобщением произведения Бляшке, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{p+2}. \tag{4.12}$$

Докажем лемму, необходимую в дальнейшем.

Лемма 3. Если последовательность $\{z_n\}$ *удовлетворяет условиям теоремы* XI, *то*

$$\lim_{r\to 1}\prod_{|z_k|<r<1}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_\alpha^{(r)}(z;\, z_k)}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_\alpha(z;\, z_k)} \tag{4.13}$$

равномерно в каждой замкнутой части круга $|z|<1$.

Доказательство. Пусть $|z|<\rho<1$ и

$$\pi(z;\, r_0;\, r)=\prod_{r_0\leq|z_k|<r}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_\alpha(rz;\, rz_k)}, \tag{4.14}$$

где $\rho<r_0<1$. В силу (3.2)

$$\prod_{|z_k|<r<1}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_\alpha^{(r)}(z;\, z_k)}=$$

$$=\pi(z;\, r_0;\, r).\prod_{|z_k|<r_0}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_\alpha(rz;\, rz_k)} \tag{4.15}$$

Но при $r_0\leq|z_k|<r$ имеем $|rz|<|rz_k|$ и следовательно, по (4.6) и (4.7)

$$\pi(z;\, r_0;\, r)=\exp\Big\{\sum_{r_0\leq|z_k|<r}\omega\,(rz;\, rz_k)\Big\}. \tag{4.16}$$

Из (4.8) следует

$$\left|\sum_{r_0\leq|z_k|<r}\omega(rz;\ rz_k)\right|<\frac{1}{r^2r_0^2\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)^{\alpha+2}}\sum_{r_0\leq|z_k|<r}(1-r^2|z_k|^2)^{\alpha+2}<$$

$$<\frac{2^{\alpha+2}}{r^2r_0^2\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)^{\alpha+2}}\sum_{|z_k|\geq r_0}(1-|z_k|^2)^{\alpha+2}. \qquad (4.17)$$

Из сходимости ряда (4.1) и из (4.16), (4.17) следует, что при $|z|<\rho<1$ имеем равномерно

$$\lim_{r_0\to 1}\left\{\lim_{r\to 1}\pi(z;\ r_0;\ r)\right\}=1. \qquad (4.18)$$

Очевидно, что

$$\lim_{r\to 1}U_\alpha(rz;\ rz_k)=U_\alpha(z;\ z_k)\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots) \qquad (4,19)$$

равномерно в круге $|z|<\rho<1$.

Перейдя к пределу в (4.15) сперва когда $r\to 1$, а затем когда $r_0\to 1$, мы в силу (4.18) и (4.19) получаем утверждение (4.13) леммы.

5. Пусть функция $F(z)$ мероморфна в единичном круге, а число C_λ и последовательности $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ имеют для $F(z)$ прежний смысл (п.1).

Обозначим

$$\pi_r(z;\ z_k)=\prod_{0<|z_k|<r}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_\alpha^{(r)}(z;\ z_k)} \qquad (5.1)$$

и

$$\Phi_r(z)=\frac{2(\alpha+1)r^2}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}(r^2-\rho^2)^\alpha\frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(r^2-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta, \qquad (5.2)$$

тогда формула (2.3) полученная нами в п. 2 запишется в следующей форме:

$$F(z)=\frac{k(r)}{C_\lambda}z^\lambda\frac{\pi_r(z;\ a_\mu)}{\pi_r(z;\ b_\nu)}e^{\Phi_r(z)},\ (|z|<r), \qquad (5.3)$$

где

$$k(r)=\exp\left\{\frac{4\lambda(\alpha+1)}{r^{2\alpha+2}}\int_0^r(r^2-\rho^2)^\alpha\rho\log\frac{1}{\rho}\,d\rho\right\}. \qquad (5.4)$$

С помощью предыдущих результатов доказываются

Теорема XII$_1$. Если функция $F(z)$ *мероморфна в единичном круге* $|z|<1$ *и*

$$(\alpha+1)\int_0^1(1-r)^\alpha T_F(r)\,dr<+\infty, \qquad (5.5)$$

тогда она представляется в следующем каноническом виде

$$F(z)=\frac{k_\alpha}{\overline{C}_\lambda} z^\lambda \frac{\pi_\alpha(z;\,a_\mu)}{(\pi_\alpha(z;\,b_\nu)} \exp\left\{\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha \frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\,\rho d\rho d\vartheta\right\}, \tag{5.6}$$

где $\pi_\alpha(z;a_\mu)$ *и* $\pi_\alpha(z;b_\nu)$ *определяются из* (4.2) *и*

$$k_\alpha=\exp\left\{\lambda(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho)^\alpha \log\frac{1}{\rho}d\rho\right\}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Из условия (5.5) следует([2]), что ряды

$$\sum_{|a_\mu|<1}(1-|a_\mu|)^{\alpha+2} \text{ и } \sum_{|b_\nu|<1}(1-|b_\nu|)^{\alpha+2} \tag{5.8}$$

сходятся. Следовательно по теореме XI и лемме 3 имеем

$$\lim_{r\to1}\pi_r(z;\,a_\mu)=\pi_\alpha(z;\,a_\mu) \text{ и } \lim_{r\to1}\pi_r(z;\,b_\nu)=\pi_\alpha(z;\,b_\nu), \tag{5.9}$$

при этом произведения, стоящие справа, сходятся при $|z|<1$.

С другой стороны, из (1.2), (1,3) и (5.5) следует, что

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|\log|F(\rho e^{i\vartheta})||\,\rho d\rho d\vartheta<+\infty. \tag{5.10}$$

Из сходимости интеграла (5.10) заключаем

$$\lim_{r\to1}\Phi_r(z)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\,\rho d\rho d\vartheta. \tag{5,11}$$

Наконец,

$$\lim_{r\to1}k(r)=\exp\left\{4\lambda(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho^2)^\alpha\rho\log\frac{1}{\rho}d\rho\right\}=$$

$$=\exp\left\{\lambda(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho)^\alpha\log\frac{1}{\rho}d\rho\right\}=k_\alpha. \tag{5.12}$$

Перейдем к пределу в (5.3), когда $r\to1$, тогда в силу (5.9), (5.11) и (5.12) получаем каноническое представление (5.6).

Теорема XII, пусть $p\geqslant0$ *наименьшее целое число, для которого*

$$\int_0^1(1-r)^pT_F(r)dr<+\infty, \tag{5.13}$$

тогда функция $F(z)$ *представляется в каноническом виде*

$$F(z)=\frac{k_p}{C_\lambda}z^\lambda\frac{\pi_p(z;a_\mu)}{\pi_p(z;b_\nu)}\exp\left\{\frac{2(p+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^p\frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{p+2}}\rho d\rho d\vartheta\right\},\tag{5.14}$$

где

$$\pi_p(z;z_n)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\bar{z}_n z}\bar{z}_n\cdot\exp\left\{\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{j+1}\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^{j+1}\right\}\tag{5.15}$$

Доказательство следует из теоремы XII_1 и формулы (4.10).

6. Перейдем теперь к голоморфным внутри единичного круга функциям.

Отнесем к классу $A(\alpha)$ все функции $f(z)$, голоморфные в $|z|<1$ и удовлетворяющие условию

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\log^+|f(\rho e^{i\vartheta})|\rho d\rho d\vartheta<+\infty.\tag{6.1}$$

Из формул (1.2) и (1.3) следует, что в данном случае

$$T_f(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\vartheta})|d\vartheta.\tag{6.2}$$

Следовательно, если $f(z)\subset A(\alpha)$, тогда

$$\int_0^1(1-r)^\alpha T_f(r)dr<+\infty\tag{6.3}$$

и по теоремам XII_1 и XII_2 имеем

Теорема $XIII_1$. *Если* $f(z)\subset A(\alpha)$, *тогда*

$$f(z)=\frac{k_\alpha}{C_\lambda}z^\lambda\pi_\alpha(z;a_\mu)\exp\left\{\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\log|f(\rho e^{i\vartheta})|}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta\right\},\tag{6.4}$$

где $\{a_\mu\}$ *суть нули функции* $f(z)$, *а* k_α *и* C_λ *имеют прежнее значение.*

В частности, если $p\geqslant\alpha$ *целое число, то имеет место следующее каноническое представление функции*

$$f(z)=\frac{k_p}{C_\lambda}z^\lambda\pi_p(z;a_\mu)\exp\left\{\frac{2(p+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^p\frac{\log|F(\rho e^{i\vartheta})|}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{p+2}}\rho d\rho d\vartheta\right\},\tag{6.5}$$

где

$$\pi_p(z;a_\mu)=\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{a_\mu-z}{1-\bar{a}_\mu z}\bar{a}_\mu\exp\left\{\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{j+1}\left(\frac{1-|a_\mu|^2}{1-\bar{a}_\mu z}\right)^{j+1}\right\}.\tag{6.6}$$

Из очевидного неравенства $\log^+|x| \leqslant \frac{|x|^q}{q}$ ($q>0$ любое) следует, что класс $H_q(\alpha)$ (см. § I) содержится в классе $A(\alpha)$. Следовательно

Теорема XIII₂. Всякая функция $f(z)$ *класса* $H_q(\alpha)(q>0, \alpha>-1)$ *представляется в каноническом виде* (6.4) *или*, (6.5).

В заключение отметим, что произведения, подобные (6.6) были применены Пикаром и Неванлинна, для отделения нулей мероморфных в единичном круге функций[10], но экспоненциальный множитель у них не определен в явном виде.

§ 3. *О представимости некоторых классов целых функций*

1. В настоящем параграфе мы приведем некоторые результаты о параметрическом представлении и о полноте определенных классов целых функций

Отнесем к клбссу $M_2(\sigma, \alpha)$ ($\sigma>0$, $\alpha>0$) все целые функции $f(z)$, для которых интеграл

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} |f(\rho e^{i\vartheta})|^2 \, d\rho d\vartheta \tag{1.1}$$

существует.

Теорема XIV₁. функции класса $M_2(\sigma, \alpha)$ *представляются в следующем параметрическом виде*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} F(\rho, \vartheta)\, E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{-i\vartheta})\, d\rho d\vartheta, \tag{1.2}$$

где $F(\rho, \vartheta)$ *произвольная функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1}|F(\rho, \vartheta)|^2 \, d\rho d\vartheta<+\infty \tag{1.3}$$

и

$$E_{\sigma,\alpha}(z)=\sigma\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma^{\frac{2n}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{2n}{\alpha}\right)} z^n \tag{1.4}$$

целая функция порядка $\frac{\alpha}{2}$ *и типа* σ.

Доказательство. Пусть $f(z)\subset M_2(\sigma,\alpha)$ и

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.5}$$

тогда при $0<r<\infty$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{r}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1} |f(\rho e^{i\vartheta})|^2 \, d\rho d\vartheta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\int_0^{r} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{2n+\alpha-1} \, d\rho <A, \tag{1.6}$$

где A постоянная, не зависящая от r. Из (1.6) следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \int_0^{\infty} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{2n+\alpha-1} d\rho \tag{1.7}$$

сходится и

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \int_0^{R} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{2n+\alpha-1} d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \int_0^{\infty} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{2n+\alpha-1} d\rho. \tag{1.8}$$

Земечая, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{2n+\alpha-1} d\rho = \sigma^{-\frac{2n}{\alpha}-1} \Gamma\left(1+\frac{2n}{\alpha}\right), \tag{1.9}$$

из (1.6) и (1.8) получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} |f(\rho e^{i\vartheta})|^2 d\rho d\vartheta = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{-1-\frac{2n}{\alpha}} \Gamma\left(1+\frac{2n}{\alpha}\right) |a_n|^2. \tag{1.10}$$

Обратно, если числа $\{a_n\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{-1-\frac{2n}{\alpha}} \Gamma\left(1+\frac{2n}{\alpha}\right) |a_n|^2 < +\infty, \tag{1.11}$$

тогда функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ будет целой и принадлежит к классу $M_2(\sigma, \alpha)$.

Обозначим

$$b_k = \frac{\sigma\alpha}{2\pi} \frac{\sigma^{\frac{2k}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{2k}{\alpha}\right)} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} F(\rho, \vartheta) \overline{(\rho e^{i\vartheta})^k} d\rho d\vartheta, \tag{1.12}$$

$(k=0, 1, 2,\ldots)$

тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} \left|F(\rho, \vartheta) - \sum_{k=0}^{n} b_k (\rho e^{i\vartheta})^k\right|^2 d\rho d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} |F(\rho, \vartheta)|^2 d\rho d\vartheta - \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n} \sigma^{-1-\frac{2k}{\alpha}} \Gamma\left(1+\frac{2k}{\alpha}\right) |b_k|^2 \geqslant 0. \tag{1.13}$$

Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{-\frac{2n}{\alpha}} \Gamma\left(1+\frac{2n}{\alpha}\right) |b_n|^2 \tag{1,14}$$

сходится и следовательно функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1}F(\rho,\vartheta)E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{-i\vartheta})\,d\rho d\vartheta \qquad (1.15)$$

принадлежит к классу $M_2(\sigma,\alpha)$. Функция $E_{\sigma,\alpha}(z)$ определенная рядом (1.4) является функцией Миттаг-Лефлера порядка $\frac{\alpha}{2}$ и типа σ(⁴).

Теорема XIV_2. Если $f(z)\subset M_2(\sigma,\alpha)$, *то при* $|z|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1}f(\rho e^{i\vartheta})\,E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{-i\vartheta})\,d\rho d\vartheta \qquad (1.16)$$

при этом $f(\rho e^{i\vartheta})$ *минимизирует интеграл* (1.3) *в классе функций* $F(\rho,\vartheta)$, *представляющих* $f(z)$ *в виде* (1.2).

Доказательство. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

тогда очевидно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1}f(\rho e^{i\vartheta})\overline{(\rho e^{i\vartheta})^k}\,d\rho d\vartheta=$$

$$=a_k\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{2k+\alpha-1}d\rho d\vartheta=a_k\alpha^{-1}\sigma^{-1-\frac{2k}{\alpha}}\Gamma\left(1+\frac{2k}{\alpha}\right) \qquad (1.17)$$

и

$$a_k=\frac{\sigma\alpha}{2\pi}\frac{\sigma^{\frac{2k}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{2k}{\alpha}\right)}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1}f(\rho e^{i\vartheta})\,\overline{(\rho e^{i\vartheta})^k}\,d\rho d\vartheta. \qquad (1.18)$$

Из (1.18) следует формула (1.16), а вторая часть теоремы доказывается аналогично доказательству теоремы VI.

Замечание I. Если $\alpha=\frac{2}{q}$ $(q=1,2,3,\ldots)$, то

$$E_{\sigma,\alpha}(z)=\sigma\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma^{nq}}{\Gamma(1+nq)}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma^q z)^n}{(nq)!}. \qquad (1.19)$$

Но

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{nq}}{(nq)!}=\frac{e^z+e^{\omega z}+\ldots+e^{\omega^{q-1}z}}{q}, \qquad (1.20)$$

где $\omega=e^{\frac{2\pi}{q}i}$. Из (1. 19) и (1.20) следует, что

$$E_{\frac{2}{q},\sigma}(z)=\frac{2\sigma}{q^2}\sum_{k=0}^{q-1} e^{\sigma\omega^k \sqrt[q]{z}}, \quad (\omega=e^{\frac{2\pi}{q}i}), (q=1,2,3,\dots). \tag{1.21}$$

В частности

$$E_{2,\sigma}(z)=2\sigma e^{\sigma z} \quad \text{и} \quad E_{1,\sigma}(z)=\sigma \operatorname{ch}\sigma \sqrt{z} \tag{1.22}$$

Замечание 2. Если $f(z)$ целая функция порядка α и типа σ_0, то очевидно $f(z)\subset M_2(\sigma,\alpha)$ для всякого $\sigma>\frac{\sigma_0}{2}$. Следовательно, по теореме XIV_1, $f(z)$ представляется в виде (1.2).

Но имеет место и обратное.

Лемма 4. Всякая целая функция класса $M_2(\sigma,\alpha)$ является функцией порядка $\leqslant \alpha$ и типа $\leqslant \frac{\sigma}{2}$.

Доказательство. Известно, что при $r\to\infty$[8]

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^{pn}}\sim\frac{\sqrt{2\pi}}{p}\sqrt{pe^{-1}r^{\frac{1}{p}}}\cdot e^{pe^{-1}r^{\frac{1}{p}}} \; (p>0). \tag{1.23}$$

Кроме того, когда $x\geqslant 0$

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}{\Gamma(1+x)}<A, \tag{1.24}$$

где A некоторая постоянная, не зависящая от x.

Из (1.23) и (1.24) следует, что когда $|z|\to\infty$,

$$|E_{\sigma,\alpha}(z)|<A\sigma\alpha\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{2n}{\alpha}}\left(\sigma^{\frac{2}{\alpha}}e^{\frac{2}{\alpha}}\frac{\alpha}{2}|z|\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}<A_1|z|^{\frac{\alpha}{4}}e^{\sigma|z|^{\frac{\alpha}{2}}}. \tag{1.25}$$

Пусть $f(z)\subset M_2(\sigma,\alpha)$, тогда по (1·16)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1}f(\rho e^{i\theta})E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{-i\theta})d\rho d\theta.$$

По неравенству Шварца и по (1.25) и в силу конечности интеграла (1.1) имеем при $|z|\to\infty$:

$$|f(z)|<A_2\left\{\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1}|E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{i\theta})|^2d\rho d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}<$$

$$<A_3\left\{|z|^{\frac{\alpha}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\sigma\rho^{\alpha}+2\sigma|z|^{\frac{\alpha}{2}}\rho^{\frac{\alpha}{2}}}\rho^{\frac{3\alpha}{2}-1}d\rho\right\}<$$

$$<A_3|z|^{\frac{\alpha}{4}}e^{\frac{\sigma}{2}|z|^{\alpha}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma t^2}(|z|^{\frac{\alpha}{2}}+t)^2dt\right\}<A_4e^{\left(\frac{\sigma}{2}+\varepsilon\right)|z|^{\alpha}}, \tag{1.26}$$

где $\varepsilon>0$ любое. Из (1.26) и следует утверждение леммы.

2. Пользуясь предыдущим, установим полноту некоторых систем целых функций на всей плоскости комплексного переменного.

Отметим, что вопросами полноты определенных систем целых функций в смысле равномерного приближения в конечном круге, занимались Гельфонд[11], Маркушевич[12] и Боас[13]. Последний дал исчерпывающее решение проблемы полноты систем вида $\{f(a_n z)\}$ в единичном круге, где $f(z)$ целая функция, а $\{a_n\}$ — некоторая последовательность отличных друг от друга комплексных чисел.

Рессмотрим систему целых функкйий.

$$\varphi_n(z)=E_{\sigma,\alpha}(\bar{a}_n z) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{2.1}$$

где $a_n(n=0,1,2,\ldots)$ произвольная последовательность неравных комплексных чисел.

Очевидно, что $\varphi_n(z)\subset M_2(\sigma,\alpha)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ и по теореме XIV_2

$$\varphi_n(a_m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}\varphi_n(\rho e^{i\vartheta})\overline{\varphi_m(\rho e^{i\vartheta})}\,d\rho d\vartheta \quad (n,m=0,1,2,\ldots) \tag{2.2}$$

Теперь ортогонализируем систему функций (2.1) по площади на всей плоскости при наличии веса $\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}$.

Для этого обозначим

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}\varphi_0(a_0), & \varphi_1(a_0),\ldots, & \varphi_n(a_0)\\ \varphi_0(a_1), & \varphi_1(a_1),\ldots, & \varphi_n(a_1)\\ \varphi_0(a_n), & \varphi_1(a_n),\ldots, & \varphi_n(a_n)\end{vmatrix} \quad (n=0,1,2,\ldots,) \tag{2.3}$$

$$\Psi_n(z)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}\left|\begin{array}{ccc|c} & \Delta_{n-1} & & \begin{matrix}\varphi_n(a_0)\\ \varphi_n(a_1)\\ \varphi_n(a_{n-1})\end{matrix}\\ \hline \varphi_0(z), & \varphi_1(z),\ldots, & & \varphi_n(z)\end{array}\right|,\ \Delta_{-1}=1,\ (n=0,1,2,\ldots,) \tag{2.4}$$

Тогда из (2.2) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}\Psi_n(\rho e^{i\vartheta})\overline{\Psi_m(\rho e^{i\vartheta})}d\rho d\vartheta=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases} \tag{2.5}$$

Кроме того, из (2.4) имеем при $n=0,1,2,\ldots$

$$\Psi_n(a_0)=\Psi_n(a_1)=\ldots=\Psi_n(a_{n-1})=0,\quad \Psi_n(a_n)=\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}. \tag{2.6}$$

Теорема XV_1. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет хотя бы одну предельную точку в конечной части плоскости, то для всякой целой функции $f(z)$ класса $M_2(\sigma,\alpha)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}\,|f(\rho e^{i\vartheta})-\sum_{k=0}^{n}A_k\Psi_k(\rho e^{i\vartheta})|^2\,d\rho d\vartheta=0, \qquad (2.7)$$

где

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}\,f(\rho e^{i\vartheta})\overline{\Psi_k(\rho e^{i\vartheta})}\,d\rho d\vartheta. \qquad (2.8)$$

Из (2.7) следует также, что для всякого $p>\frac{\sigma}{2}$ *и* $\varepsilon>0$ *число* N *можно выбрать таким образом, чтобы неравенство*

$$e^{-p|z|^\alpha}\,|f(z)-\sum_{k=0}^{n}A_k\Psi_k(z)|<\varepsilon \qquad (2.9)$$

удовлетворялось во всей плоскости z *при* $n\geqslant N$.

Доказательство. Пусть $f(z)\subset M_2(\sigma,\alpha)$ и числа A_k определяются по (2.8), тогда по неравенству Бесселя ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|A_k|^2$ сходится. Следовательно, по теореме Рисса-Фишера существует функция $f_1(z)\subset$ $\subset M_2(\sigma,\alpha)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}\,|f(\rho e^{i\vartheta})-\sum_{k=0}^{n}A_k\Psi_k(\rho e^{i\vartheta})|^2\,d\rho d\vartheta=0 \qquad (2.10)$$

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}f_1(\rho e^{i\vartheta})\overline{\Psi_k(\rho e^{i\vartheta})}\,d\rho d\vartheta \quad (k=0,1,2,\ldots) \qquad (2.11)$$

Отсюда и из (2.8) следует, что $F(z)=f(z)-f_1(z)\subset M_2(\sigma,\alpha)$ и

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}\,F(\rho e^{i\vartheta})\overline{\Psi_k(\rho e^{i\vartheta})}\,d\rho d\vartheta=0 \quad (k=0,1,2,\ldots). \qquad (2.12)$$

Но $\Psi_n(z)$ является линейной комбинацией от первых n функций $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z),\ldots,\varphi_n(z)$ и обратно. Следовательно условия (2.12) эквивалентны со следующими

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}\,F(\rho e^{i\vartheta})\,\overline{E_{\sigma,\alpha}(\bar a_n\rho e^{i\vartheta})}\,d\rho d\vartheta=0 \quad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (2.13)$$

В силу (1.16) это означает, что $F(a_n)=0$ ($n=0, 1, 2,\ldots$). Отсюда по теореме единственности аналитических функций следует, что $F(z)\equiv0$, т.е. $f_1(z)\equiv f(z)$. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Теперь заметим, что по (1.16), для всякого $n\geqslant0$

$$f(z)-\sum_{k=0}^{n} A_k\Psi_k(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1}\left[f(\rho e^{i\vartheta})-\sum_{k=0}^{n} A_k\Psi_k(\rho e^{i\vartheta})\right]E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{-i\vartheta})\, d\rho d\vartheta \qquad (2.14)$$

Отсюда по неравенству Шварца имеем

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} A_k\Psi_k(z)\right|\leq\left\{\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1}|E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{-i\vartheta})|^2 d\rho d\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}}\rho^{\alpha-1}\left|f(\rho e^{i\vartheta})-\sum_{k=0}^{n} A_k\Psi_k(\rho e^{i\vartheta})\right|^2 d\rho d\vartheta\right\} \qquad (2.15)$$

Из (2.15) по (1.26) и (2.7) следует утверждение (29) теоремы. Отметим, что в силу (2.6) коэфициенты $\{A_k\}$ можно определить из следующих рекурентных соотношений

$$\begin{aligned} f(a_0)&=A_0\Psi_0(a_0)\\ f(a_1)&=A_0\Psi_0(a_1)+A_1\Psi_1(a_1)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f(a_n)&=A_0\Psi_0(a_n)+A_1\Psi_1(a_n)+\ldots+A_n\Psi_n(a_n) \end{aligned} \qquad (2.16)$$

3. Результат теоремы XV_1 остается в силе и при более общих предположениях о последовательности точек $\{a_n\}$. Для краткости последовательность точек $\{a_n\}$ будем называть [13] „единственной“ для функций данного класса, если для каждой функции $f(z)$ этого класса из $f(a_n)=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$ следует, что $f(z)\equiv 0$. Скажем, что класс целой функции $f(z)$ не выше (соответственно—ниже) $[\alpha,\sigma]$ если либо порядок $f(z)$ меньше α, либо равен α, но тогда тип не больше (соответственно, меньше) σ.

Из сказанного и из леммы 4 ясно, что всякая функция $f(z)$ класса $M_2(\sigma,\alpha)$ является функцией класса, не выше $\left[\alpha, \frac{\sigma}{2}\right]$ и всякая функция $f(z)$ класса ниже $[\alpha,\sigma]$ будет класса $M_2(2\sigma,\alpha)$.

Существуют довольно сильные критерии для единственности последовательностей, связывающие порядок роста целой функции с плотностью ее нулей. Например известны следующие результаты[13]

Теорема А. Последовательность $\{a_n\}$ будет единственной для функций класса не выше $[\alpha,\sigma]$, если

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{|a_n|^{\alpha}}>\sigma\alpha \qquad (3.1)$$

или

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{|a_n|^{\alpha}}>e\sigma\alpha. \qquad (3.2)$$

Теорема В. Последовательность $\{a_n\}$ *будет единственной для функций класса не выше* $[\alpha,\sigma]$, *если точки* a_n *лежат в некотором угле с раствором* 2ω *и*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{|a_n|^\alpha} > \frac{\sigma\alpha\omega}{\pi B}\left(\omega > \frac{b}{\alpha}\right), \tag{3.3}$$

или

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{|a_n|^\alpha} > \frac{\sigma}{2\pi\cos\omega\alpha}\left(\omega \leqslant \frac{b}{\alpha}\right), \tag{3.4}$$

где $B=b\cos b$ *есть максимум функции* $x\cos x$ *в* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Так как всякая функция $f(z)\subset M_2(\sigma,\alpha)$ будет класса не выше $\left[\alpha, \dfrac{\sigma}{2}\right]$, то аналогичным способом, как в теореме XV_1 пользуясь критерием единственности из теорем A и B, получим.

Теорема XV_2 *Результаты* (2.7) *и* (2.8) *теоремы* XV_1 *остаются в силе, если последовательность* $\{a_n\}$ *удовлетворяет одному из следующих условий*

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{|a_n|^\alpha} > \dfrac{\sigma\alpha}{2}$

b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{|a_n|^\alpha} > e\,\dfrac{\sigma\alpha}{2}$

c) *Точки* $\{a_n\}$ *лежат в угле с раствором* 2ω

и $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{|a_n|^\alpha} > \dfrac{\sigma\alpha\omega}{2\pi B}\left(\omega > \dfrac{b}{\alpha}\right)$, *или*

$\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{|a_n|^\alpha} > \dfrac{\sigma}{\pi\cos\omega\alpha}\left(\omega \leqslant \dfrac{b}{\alpha}\right)$, *где* $B=b\cos b$

есть максимум $x\cos x$ *в* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Так как всякая функция $f(z)$ класса ниже $[\alpha,\sigma]$ принадлежит к классу $M_2(2\sigma,\alpha)$, то из теоремы XV_2 имеем:

Теорема XV_3. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *удовлетворяет одному из условий теорем* A *или* B, *то для всякой функции* $f(z)$ *класса ниже* $[\alpha,\sigma]$ *будем иметь*

1) *Равномерно в каждой части плоскости* z

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k\Psi_k(z) \tag{3.5}$$

2) *Равномерно во всей плоскости* z

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\sigma|z|^\alpha}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} A_k\Psi_k(z)\right|=0, \tag{3,6}$$

где функции $\{\Psi_k(z)\}$ *и числа* $\{A_k\}$ *определены в п.* 2.

4. Приведем пример ортонормальной системы целых функций. При $\alpha=2$ и $a_n=n (n=0,1,2,\ldots)$ из (1.22) и (2.1) имеем

$$\varphi_n(z)=E_{2,\sigma}(nz)=2\sigma e^{\sigma nz} \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{4.1}$$

Отсюда и из (2.3) следует

$$\Delta_n=(2\sigma)^{n+1}\begin{vmatrix} 1, & 1, \ldots, & 1 \\ 1, & e^{\sigma}, \ldots, & e^{n\sigma} \\ 1, & e^{n\sigma}, \ldots, & e^{n^2\sigma} \end{vmatrix}=(2\sigma)^{n+1}\prod_{p>q}^{0,n}(e^{p\sigma}-e^{q\sigma}) \tag{4.2}$$

и

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}=2\sigma\prod_{k=0}^{n-1}(e^{n\sigma}-e^{k\sigma}) \tag{4.3}$$

Далее, по (2.4)

$$\Psi_n(z)=2\sigma\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}\prod_{k=0}^{n-1}(e^{\sigma z}-e^{\sigma k}) \tag{4.4}$$

Таким образом имеем

$$\Psi_0(z)=\sqrt{2\sigma},\quad \Psi_n(z)=\sqrt{2\sigma}\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(e^{\sigma z}-e^{\sigma k})}{\sqrt{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(e^{\sigma n}-e^{\sigma k})}} \quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{4.5}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^2}\Psi_n(\rho e^{i\theta})\overline{\Psi_m(\rho e^{i\theta})}\rho d\rho d\theta=\begin{cases} 0, & m\neq n \\ 1, & m=n \end{cases} \tag{4.6}$$

Надо отметить однако, что эта система функций не будет полной в класса $M_2(\sigma,2)$.

1947. Май.

Институт Математики и Механики
АН Арм. ССР и Ереванский Государственный Университет
им. В. М. Молотова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. F. RIESZ, Über die Randwerte einer analitchen Funktion. Mathematische Zeitschrift, vol. 18, pp. 87-95.
2. Р. НЕВАНЛИННА, Однозначные аналитические функции, гл. VI, VII, X. Москва (1941).
3. И. И. ПРИВАЛОВ, Граничные свойства однозначных аналитических функций. Москва (1941).
4. L. BIEBERBACH, Moderne Funktionentheorie, pp. 265-269, Berlin (1927).
5. W. WIRTINGER, Über eine Minimumaufgabe im Gebiet der analytischen Funktionen. Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 39, pp. 377-384.
6. J. L. WALSH, Interpolation and Approximation by Rational Functions, (pub. by the American Math. Society), § 10. 6, § 10, 7, § 10. 12, (1935).
7. E. C. TITCHMARSH, Theory of Functions, p. 125, Oxford (1932).
8. ПОЛИА и СЕГЕ, Задачи и Теоремы из Анализа, ч. 1. отд. II, задача 148, ч. II. отд. IV, задача 46.
9. S. TAKENAKA, On the orthogonal functions and a new formula of interpolation. Japanese Journal of Mathematics, vol. 2. pp. 129-145.
10. Цит. по KING-ZAI HIONG, "Journal de Jiouville„, 45, 268-276 (1935)
11. A. GELFOND, Sur les systémes completes de fonctions analytiques, Матем. Сборник, 4/1936 149—145.
12. А. И. МАРКУШЕВИЧ, О базисе в пространстве аналитических функций, Матем. Сборник, 17 (1945), 211-252.
13. R. P. BOAS, Fundemental sets of entire Functions, Annals of Mathematics, vol. 147, №1, pp. 21-32 (1946).
14. М. М. ДЖРБАШЯН, ДАН Арм ССР. III, №1 (1945)
15. М. М. ДЖРБАШЯН, ДАН Арм ССР. VI, №5 (1947)

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ներկա աշխատանքը նվիրված է անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի ներկայացման և լրիվության մի քանի հարցերին։

§ 1-ում սահմանված է միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների $H_p(\alpha)$ դասը և ապացուցված են մի շարք թեորեմներ այդ դասի ֆունկցիաների պարամետրական ներկայացման և լրիվության մասին։ Հաստատված է ռացիոնալ ֆունկցիաների որոշ սիստեմների լրիվությունը $H_2(\alpha)$ դասում։

§ 2-ում բերված է Յենսեն-Նևանլիննայի ֆորմուլայի մի ընդհանրացումը մերոմորֆ ֆունկցիաների համար։ Վերջինս մեզ հնարավորություն է տալիս ստանալ միավոր շրջանում այն մերոմորֆ ֆունկցիաների կանոնական վերածումը, որոնց T (r) խարակտերիստիկան անսահմանափակ է և բավարարում է

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T(r)dr < +\infty \qquad (\alpha > -1)$$

պայմանին։ Ցույց է տրված նաև, որ այս պարագրաֆի արդյունքները Ռ. Նևանլիննայի արդյունքների բնական ընդհանրացումներն են ներկայացնում։

§ 3-ում բերված է ինտեգրալ ապարատ որոշ դասերի պատկանող ամբողջ ֆունկցիաների ներկայացման համար։ Ապացուցված է Միտտագ-Լեֆլերի ֆունկցիայի տիպի ֆունկցիաների սիստեմի լրիվությունը, վերջավոր կարգ և տիպ ունեցող ամբողջ ֆունկցիաների դասի մեջ։
