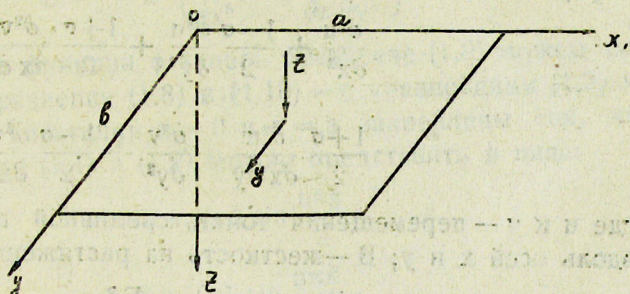


Т. Т. ХАЧАТУРЯН

О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГИЯХ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ ИЗГИБА И ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

В данной статье устанавливаются некоторые аналогии между задачами изгиба и плоско-напряженным состоянием прямоугольной пластинки. Показывается, что использование этих аналогий позволяет составлять решение задач об изгибе пластинки, когда соответствующие задачи о плоско-напряженном состоянии пластинки решены, или же наоборот.

1. Рассмотрим прямоугольную пластинку со сторонами a и b , которая на краях $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ имеет опоры, обеспечивающие ее неподвижность как в своей плоскости, так и в направлении Z . Пусть на пластинку действуют силы, имеющие компоненты Z и Y . Силы Z вызывают изгиб пластинки, а силы Y — плоско-напряженное состояние.



Черт. 1.

Изгиб пластинки опишется дифференциальным уравнением:

$$\nabla^4 w = \frac{Z}{D} \quad 1.1$$

где w — перемещение точки срединной плоскости в направление оси Z , а D — цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\sigma^2)} \quad 1.2$$

E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, δ — толщина пластинки

Изгибающие и крутящий моменты определяются через w формулами:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ H &= -D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad 1.3$$

Опорные реакции на краях пластинки $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ определяются так:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ Q_2 &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad 1.4$$

Задача об изгибе пластинки приводится к интегрированию уравнения (1.1), после чего моменты и реакции опор определяются формулами (1.3) и (1.4).

Плоско-напряженное состояние пластинки опишется следующими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1 + \sigma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{1 + \sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1 - \sigma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{Y}{B}, \end{aligned} \quad 1.5$$

где u и v — перемещения точки срединной поверхности пластинки вдоль осей x и y ; B — жесткость на растяжение

$$B = \frac{E \delta}{1 - \sigma^2}. \quad 1.6$$

Растягивающие усилия T_1 , T_2 и сдвигающее усилие S определяются через u и v формулами:

$$\begin{aligned} T_1 &= B \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ T_2 &= B \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ S &= \frac{1 - \sigma}{2} B \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad 1.7$$

Задачи о плоско-напряженном состоянии пластинки приводятся к интегрированию двух уравнений (1.5), после чего усилия найдутся формулами (1.7).

Преобразуем уравнения (1.5) и (1.7) плоско-напряженного состояния так, чтобы они были записаны по той же схеме, что и уравнения изгиба пластинки. Для этого введем вспомогательную функцию φ , через которую перемещения u и v определяются так:

$$u = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad 1.8$$

$$v = -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - \frac{2}{1-\sigma} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}.$$

Подставив (1.8) в (1.5), убедимся, что первое из уравнений (1.5) удовлетворяется, а второе приведет к виду:

$$\nabla^4 \varphi = \frac{Y}{B}. \quad 1.9$$

На основании (1.8) усилия (1.7) будут определяться через φ формулами

$$\begin{aligned} T_1 &= -B \left(\sigma \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2} \right), \\ T_2 &= -B \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + (2 + \sigma) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2} \right], \\ S &= -B \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \sigma \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad 1.10$$

С введением функции φ теперь уравнение (1.9) можем сопоставить с (1.1), а уравнения (1.8) и (1.10) — с уравнениями (1.3) и (1.4).

Пусть края пластинки $x = 0$ и $x = a$ закреплены так, что интегралы уравнений (1.1) и (1.9) можно представить в виде:

$$w = \sum w_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 1.11$$

$$\varphi = \sum \varphi_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 1.12$$

или в виде:

$$w = \sum w_n(y) \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad 1.11'$$

$$\varphi = \sum \varphi_n(y) \cos \frac{n\pi x}{a}. \quad 1.12'$$

В обоих этих случаях можно показать наличие аналогий между задачами изгиба и плоско-напряженного состояния пластинки.

Остановимся на случае (1.11), (1.12).

Разложим правые части уравнений (1.1) и (1.9) в ряды:

$$Z = \sum Z_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 1.13$$

$$Y = \sum Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 1.14$$

где:

$$Z_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a Z \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad 1.15$$

$$Y_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a Y \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad 1.16$$

Подставив (1.11) и (1.13), в (1.1), а (1.12) и (1.14) в (1.9), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для $w_n(y)$ и $\varphi_n(y)$

$$w_n^{IV} - 2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} w_n^{II} + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} w_n = \frac{Z_n}{D}, \quad 1.17$$

$$\varphi_n^{IV} - 2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \varphi_n^{II} + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} \varphi_n = \frac{Y_n}{B}. \quad 1.18$$

Если подставим (1.11) в (1.3) и (1.4), а (1.12) в (1.8) и (1.10), то получим формулы, в которых усилия и перемещения будут выражены рядами синусов или косинусов аргумента $\frac{n\pi x}{a}$. Приведем здесь выражения коэффициентов разложения тех усилий и перемещений, которые нужны для интегрирования уравнений (1.17) и (1.18).

Получим

$$M_{2n} = -D \left(w_n^{II} - \sigma \frac{n^2 \pi^2}{a^2} w_n \right),$$

$$Q_{2n} = -D \left[w_n^{III} - (2 - \sigma) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} w_n^I \right], \quad 1.19$$

$$\phi_n = w_n^I,$$

$$U_n = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} \cdot \frac{n\pi}{a} \varphi_n^I,$$

$$V_n = -\varphi_n^{II} + \frac{2}{1 - \sigma} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \varphi_n, \quad 1.20$$

$$T_{2n} = -B \left[\varphi_n^{III} - (2 + \sigma) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \varphi_n^I \right],$$

$$S_n = B \left[\frac{n^3 \pi^3}{a^3} \varphi_n + \sigma \frac{n\pi}{a} \varphi_n^{II} \right]$$

(штрихи над величинами означают производные по y).

Для интегрирования уравнений (1.17) и (1.18) применим метод начальных параметров, предложенный акад. А. Н. Крыловым для расчета балки на упругом основании. Однако при построении спе-

циальных функций, являющихся частными интегралами однородного уравнения

$$\phi^{IV} - 2 \frac{\pi^2 \pi^2}{a^2} \phi^{II} + \frac{\pi^4 \pi^4}{a^4} \phi = 0, \quad 1.21$$

мы будем пользоваться приемом, изложенным в нашей работе [1]. В качестве частных решений уравнения (1.21) мы примем следующие основные функции.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \operatorname{ch} z + \frac{z}{2} \operatorname{sh} z, \\ \phi_2 &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} z + z \operatorname{ch} z), \end{aligned} \quad 1.22$$

$$\phi_3 = \frac{z}{2} \operatorname{sh} z,$$

$$\phi_4 = \frac{1}{2} (z \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z),$$

где

$$z = \frac{\pi \pi y}{a}. \quad 1.23$$

Между функциями (1.22) имеются зависимости:

$$\frac{d\phi_1}{dz} = 2\phi_2 - \phi_4; \quad \frac{d\phi_2}{dz} = \phi_1; \quad \frac{d\phi_3}{dz} = \phi_2; \quad \frac{d\phi_4}{dz} = \phi_3. \quad 1.24$$

При $z=0$ (т. е. при $y=0$) эти функции принимают значения

$$\phi_1 = 1; \quad \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0. \quad 1.25$$

Общие интегралы уравнений (1.17) и (1.18) при $Z_n = Y_n = 0$ можем записать так:

$$w_n = A_1 \phi_1 + A_2 \phi_2 + A_3 \phi_3 + A_4 \phi_4, \quad 1.26$$

$$\varphi_n = B_1 \phi_1 + B_2 \phi_2 + B_3 \phi_3 + B_4 \phi_4. \quad 1.27$$

Подставив (1.26) в (1.19) и (1.27) в (1.20), используя при этом (1.24) и (1.25), можем определить коэффициенты A_i через w_n , ψ_n , M_{2n} , Q_{2n} при $y=0$, и коэффициенты B_i через U_n , V_n , T_{2n} , S_n при $y=0$. Определив таким образом коэффициенты A_i и B_i , получим следующие выражения для интегралов (1.26) и (1.27).

$$\begin{aligned} w_n &= w_{no} [\phi_1 - (2 - \sigma)\phi_3] + \psi_{no} \cdot \frac{a}{\pi\pi} (\phi_2 - \sigma\phi_4) - \\ &- Q_{2no} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{a^3}{\pi^3\pi^3} \phi_4 - M_{2no} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{a^3}{\pi^2\pi^2} \phi_3, \end{aligned} \quad 1.28$$

$$\begin{aligned} \varphi_n &= U_{no} \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \frac{a^2}{\pi^2\pi^2} (\phi_2 + \sigma\phi_4) + V_{no} \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{a^2}{\pi^2\pi^2} (\sigma\phi_1 - (1+26)\phi_3) + \\ &+ \frac{S_{no}}{B} \cdot \frac{1}{1+\sigma} \cdot \frac{a^3}{\pi^3\pi^3} [(1-\sigma)\phi_1 + 26\phi_3] - \frac{T_{2no}}{B} \cdot \frac{a^3}{\pi^3\pi^3} \cdot \phi_4. \end{aligned} \quad 1.29$$

Подставив (1.28) в (1.19) и (1.29) в (1.20), получим общие интегралы для коэффициентов разложения M_2 , Q_2 , ψ , U , V , T_2 и S . Ниже эти интегралы приведены в табличной форме, в основных таблицах № 1 и № 2. Коэффициенты разложения других расчетных величин, например M , N , T и т. д., а также некоторых производных коэффициентов разложения перемещений, приведены в дополнительных таблицах № 1 и № 2.

Таблица № 1 (основная)
Общие решения задачи изгиба пластин

	$\frac{\pi}{a} M_{2no}$	$\frac{1}{n} Q_{2no}$	$\frac{\pi^3}{a^3} n^2 DW_{no}$	$\frac{\pi^2}{a^2} n D\psi_{no}$
$\frac{\pi^2}{a^2} n D\psi_n =$	$-\phi_2$	$-\phi_3$	$-\phi_4 + \sigma\phi_2$	$\phi_1 - \sigma\phi_3$
$\frac{\pi^3}{a^3} n^2 DW_n =$	$-\phi_3$	$-\phi_4$	$\phi_1 - (2 - \sigma)\phi_3$	$\phi_2 - \sigma\phi_4$
$\frac{1}{n} Q_{2n} =$	$-\phi_4 + \sigma\phi_2$	$\phi_1 - (2 - \sigma)\phi_3$	$(1 - \sigma)[(1 + \sigma)\phi_2 - 2\phi_3]$	$(1 - \sigma)^2\phi_3$
$\frac{\pi}{a} M_{2n} =$	$\phi_1 - \sigma\phi_3$	$\phi_2 - \sigma\phi_4$	$(1 - \sigma)^2\phi_3$	$(1 - \sigma)[(1 + \sigma)\phi_4 - 2\phi_2]$

Таблица № 2 (основная)
Общие решения задачи о плоско-напряженном состоянии пластинки

	$-\frac{\pi\delta}{a} n EU_{no}$	$\frac{\pi\delta}{a} n EV_{no}$	T_{2no}	S_{no}
$S_n =$	$-\phi_2$	$-\phi_3$	$-\phi_4 - \sigma\phi_2$	$\phi_1 + \sigma\phi_3$
$T_{2n} =$	$-\phi_3$	$-\phi_4$	$\phi_1 - (2 + \sigma)\phi_3$	$\phi_2 + \sigma\phi_4$
$\frac{\pi\delta}{a} n EV_n =$	$-\phi_4 - \sigma\phi_2$	$\phi_1 - (2 + \sigma)\phi_3$	$(1 + \sigma)[(1 - \sigma)\phi_2 - 2\phi_3]$	$(1 + \sigma)^2\phi_3$
$-\frac{\pi\delta}{a} n EU_n =$	$\phi_1 + \sigma\phi_3$	$\phi_2 + \sigma\phi_4$	$(1 + \sigma)^2\phi_3$	$(1 + \sigma)[(1 - \sigma)\phi_4 - 2\phi_2]$

Как видно, размещение основных функций ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 и ϕ_4 в клетках обеих таблиц (как основных, так и дополнительных) одинаково, а сами таблицы симметричны (за исключением последних строк и столбцов дополнительных таблиц).

Характерным является то, что как основные таблицы, так и дополнительные таблицы отличаются друг от друга только знаком коэффициента Пуассона σ . Если изменим в одной из таблиц знак пе-

ред σ , то получим соответствующую другую таблицу. Это позволяет нам отметить наличие соотношений, устанавливающих аналогии между задачами изгиба пластинки и ее плоско-напряженным состоянием.

Таблица № 1 (дополнительная)

Общие решения задачи изгиба пластин

	$\frac{1}{n} Q_{2no}$	$-\frac{\pi}{a} M_{2no}$	$\frac{\pi^3}{a^3} n DW_{no}$	$\frac{\pi^2}{a^2} n D\psi_{no}$
$-\frac{1}{1-\sigma} \cdot \frac{\pi}{a} H_n =$	$-\phi_3$	ϕ_2	$-\phi_4 + \sigma\phi_2$	$\phi_1 - \sigma\phi_3$
$-\frac{\pi}{a} DW_n'' =$	ϕ_2	$-\phi_1$	$\phi_3 - \sigma\phi_1$	$\phi_4 - (2-\sigma)\phi_2$
$\frac{\pi}{a} M_{1n} =$	$-\phi_4 + \sigma\phi_2$	$\phi_3 - \sigma\phi_1$	$(1-\sigma)[(1+\sigma)\phi_1 - 2\phi_3]$	$(1-\sigma)^2\phi_2$
$-\frac{1}{n} Q_{1n} =$	$\phi_4 - (2+\sigma)\phi_2$	$-\phi_3 + (2-\sigma)\phi_1$	$-(1-\sigma)^2\phi_1$	$(1-\sigma)[(3-\sigma)\phi_2 - 2\phi_4]$

Таблица № 2 (дополнительная)

Общие решения задачи о плоско-напряженном состоянии пластинки

	$\frac{\pi\delta}{a} n EV_{no}$	$\frac{\pi\delta}{a} n EU_{no}$	T_{2no}	S_{no}
$S_n =$	$-\phi_3$	ϕ_2	$-\phi_4 - \sigma\phi_2$	$\phi_1 + \sigma\phi_3$
$T_{1n} =$	ϕ_2	$-\phi_1$	$\phi_3 + \sigma\phi_1$	$\phi_4 - (2+\sigma)\phi_2$
$\delta E V_n' =$	$-\phi_4 - \sigma\phi_2$	$\phi_3 - \sigma\phi_1$	$(1+\sigma)[(1-\sigma)\phi_1 - 2\phi_3]$	$(1+\sigma)^2\phi_2$
$\frac{a}{\pi} \delta EU_n'' =$	$\phi_4 - (2+\sigma)\phi_2$	$-\phi_3 + (2+\sigma)\phi_1$	$-(1+\sigma)^2\phi_1$	$(1+\sigma)[(3+\sigma)\phi_2 - 2\phi_4]$

Если граничные условия пластинки в обеих задачах на крае $y=0$ таковы, что имеют место соотношения:

$$M_{2no} = -\delta E \cdot n U_{no}, \quad W_{no} = \frac{a^3}{\pi^3 D} \cdot \frac{1}{n^2} T_{2no},$$

1.30

$$Q_{2no} = \frac{\pi\delta}{a} n^2 EV_{no}, \quad \psi_{no} = \frac{a^2}{\pi^2 D} \cdot \frac{1}{n} S_{no},$$

то, изменяя знак числа Пуассона в общих интегралах одной задачи, получим общие интегралы другой задачи по следующим формулам:

$$H_n = -\frac{1-\sigma}{\pi} a S_n, \quad S_n = -\frac{\pi}{1-\sigma} \cdot \frac{1}{a} H_n$$

$$\begin{aligned}
 W_n &= \frac{a^3}{\pi^3 D} \cdot \frac{1}{n^3} \cdot T_{2n}, & T_{2n} &= \frac{\pi^3 D}{a^3} \cdot n^3 W_n, \\
 M_{2n} &= -\delta E \cdot n \cdot U_n, & U_n &= -\frac{1}{\delta E} \cdot \frac{1}{n} M_{2n}, \\
 Q_{2n} &= \frac{\pi \delta}{a} E \cdot n^2 V_n, & V_n &= \frac{a}{\pi \delta E} \cdot \frac{1}{n^2} Q_{2n}, \\
 M_{1n} &= \frac{a}{\pi} \delta E \cdot V_n', & T_{1n} &= -\frac{\pi}{a} D W_n'', \\
 Q_{1n} &= -\frac{a}{\pi} \delta E \cdot n \cdot U_n''.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Соотношения (1.30) и (1.31) в некоторых случаях могут быть использованы для решения задач о плоско-напряженном состоянии прямоугольной пластинки; когда решены соответствующие задачи об изгибе, или же наоборот. Под соответствующими задачами следует понимать такие задачи, в которых краевые условия удовлетворяют равенствам (1.30), а перемещения и усилия в произвольной точке пластинки (в том числе внешние перемещения и нагрузки) удовлетворяют равенствам (1.31).

Аналогии между краевыми условиями обеих задач непосредственно следует из (1.30)

Изгиб пластинки	Плоско-напряженное состояние пластинки
1. Край $y = \text{const}$ свободно оперт $M_2 = 0, w = 0$	1. Край $y = \text{const}$ закреплен так, что $U = 0, T_2 = 0$ (Условия Белзецкого—Файлона)
2. Край $y = \text{const}$ защемлен $w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0$	2. Край $y = \text{const}$ свободен $T_2 = 0, S = 0$
3. Край $y = \text{const}$ свободен $M_2 = 0, Q_2 = 0$	3. Край $y = \text{const}$ закреплен неподвижно $U = 0, V = 0$
4. Край $y = \text{const}$ не поворачивается, но может прогибаться $\psi = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, Q_2 = 0$	4. Край $y = \text{const}$ закреплен так, что $S = 0, V = 0$ (Условия Рибьера)

2. Приведем пример, иллюстрирующий порядок пользования равенствами (1.31).

Рассмотрим прямоугольную пластинку (черт. 2), у которой на краях $x=0$, $x=a$ выполняются условия Файлона—Белзецкого, а на других краях $y = \pm 0,5 \cdot b$

$$T_2 = p(x), S = 0 \text{ при } y = \frac{b}{2} \quad 2.1$$

$$T_2 = 0; S = 0 \text{ при } y = -\frac{b}{2}$$

Решение этой задачи приведено в курсе П. Ф. Папковича [2]. Для T_2 получается следующее решение

$$T_2 = \sum \gamma_n \varphi_n(y) \sin \frac{\pi x}{a}, \quad 2.2$$

где γ_n — коэффициенты ряда

$$p(x) = \sum \gamma_n \sin \frac{\pi x}{a}, \quad 2.3$$

а через $\varphi_n(y)$ обозначена функция $\left(\alpha_n = \frac{\pi}{a}, \lambda_n = \frac{\pi b}{2a} \right)$:

$$\begin{aligned} \varphi_n(y) = & \frac{(\operatorname{sh} \lambda_n + \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n) \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n y \operatorname{sh} \lambda_n \operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{sh} 2\lambda_n + 2\lambda_n} + \\ & + \frac{(\operatorname{ch} \lambda_n + \lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n) \operatorname{sh} \alpha_n y - 2\alpha_n y \operatorname{ch} \lambda_n \operatorname{ch} \alpha_n y}{\operatorname{sh} 2\lambda_n - 2\lambda_n} \end{aligned} \quad 2.4$$

Этой плоской задаче соответствует задача об изгибе пластинки (черт. 3), свободно опертой на краях $x=0$, $x=a$ и защемленной на краях $y = \pm 0,5 b$, когда краю $y=0,5 b$ сообщается перемещение

$$w = f(x) = \sum \beta_n \sin \frac{\pi x}{a}. \quad 2.5$$

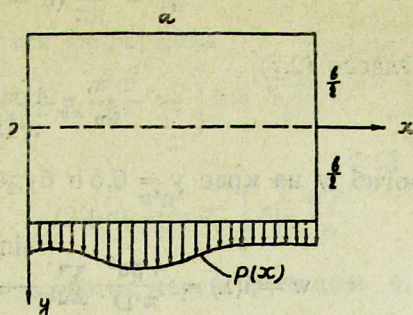
На основании (1.31) (выражения для w_n), для прогиба w в произвольной точке пластинки получается решение

$$w = \sum \beta_n \varphi_n(y) \sin \frac{\pi x}{a}, \quad 2.6$$

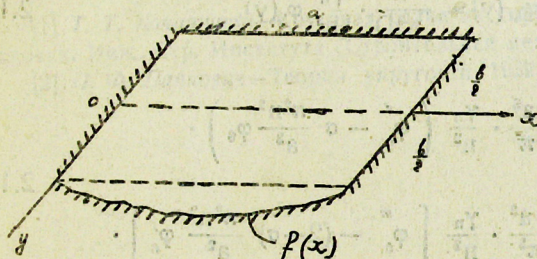
причем между коэффициентами β_n и γ_n имеется зависимость

$$\beta_n = \frac{a^3}{\pi^3 D} \cdot \frac{\gamma_n}{n^2} \quad \dots \quad 2.7$$

Таким образом, из решения (2.2) автоматически можно составить решение (2.6), для этого нужно коэффициенты γ_n заменить коэффициентами β_n по формуле (2.7).



Черт. 2.



Черт. 3.

При $p(x) = p = \text{const}$ имеем;

$$\gamma_n = \frac{4p}{\pi^3} (n = 1, 3, 5 \dots). \quad 2.8$$

Согласно (2.7)

$$\beta_n = \frac{4pa^3}{\pi^4 D} \cdot \frac{1}{n^3}. \quad 2.8$$

Прогиб w на крае $y = 0,5b$ будет

$$w = f(x) = \frac{4pa^3}{\pi^4 D} \sum_{1,3,5} \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{n^3} = \frac{pa}{2\pi D} x(a-x). \quad 2.10$$

Следовательно распределение усилий T_2 в пластинке, вызванное постоянной растягивающей нагрузкой $T_2 = p$, приложенной на крае $y = 0,5b$, будет аналогично распределению перемещения w , вызванного от прогиба края $y = 0,5b$ по параболическому закону (2.10).

В заключение статьи заметим, что, пользуясь соотношениями (1.31), в некоторых случаях можно процесс интегрирования заменить процессом дифференцирования. Так, например, для рассмотренного выше примера П. Ф. Папкович дает формулы только для напряжений $X_x, Y_y = \frac{1}{\delta} \cdot T_2$ и X_y , а для перемещений U и V он формул не дает.

Обычный путь определения перемещений по заданным напряжениям приводит нас к процессу интегрирования. Соотношения же (1.31) нам дают:

$$U_n = - \frac{1}{E\delta} \cdot \frac{1}{n} M_{2n}, \quad 2.11$$

$$V_n = \frac{a}{\pi E\delta} \cdot \frac{1}{n^2} Q_{2n}.$$

Из (2.6) и (2.27) следует, что

$$w_n = \beta_n \varphi_6(y) = \frac{a^3}{\pi^3 D} \cdot \frac{\gamma_n}{n^2} \varphi_6(y). \quad 2.12$$

Отсюда находим

$$M_{2n} = - \frac{a^3}{\pi^3} \cdot \frac{\gamma_n}{n^2} \left(\varphi_6'' - \sigma \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \varphi_6 \right), \quad 2.13$$

$$Q_{2n} = - \frac{a^3}{\pi^3} \cdot \frac{\gamma_n}{n^2} \left[\varphi_6''' - (2-\sigma) \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \varphi_6' \right].$$

Заменив в (2.13) знак коэффициента Пуассона на обратный и подставив их в (2.11), получим:

$$U_n = \frac{a^3}{\pi^3 E\delta} \cdot \frac{\gamma_n}{n^3} \left[\varphi_6'' + \sigma \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \varphi_6 \right], \quad 2.14$$

$$V_n = - \frac{a^4}{\pi^4 E \delta} \cdot \frac{\gamma_n}{n^4} \left[\varphi_n''' - (2 + \sigma) \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \varphi_n' \right]. \quad 2.14$$

Перемещения U и V теперь определяются формулами

$$u = \sum u_n \cos \frac{n\pi x}{a} = \frac{a^3}{\pi^3 E \delta} \sum \frac{\gamma_n}{n^3} \left[\varphi_n'' + \sigma \frac{\pi^2 a^2}{n^2} \varphi_n \right] \cos \frac{n\pi x}{a},$$

$$v = \sum V_n \sin \frac{n\pi x}{a} = - \frac{a^4}{\pi^4 E \delta} \sum \frac{\gamma_n}{n^4} \left[\varphi_n''' - (2 + \sigma) \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \varphi_n' \right] \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad 2.15$$

Как видно из (2.15), перемещения определяются через функцию φ_0 и ее производные.

Ք. Ք. ԽԱԶԱՏՐՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԵՎ ՀԱՐՔ-ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԵՋ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՆԱԼՈԳՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքի մեջ ցույց են տրվում մի քանի անալոգներ, որոնք գոյություն ունեն սալերի ծռման և նրանց հարթ-լարվածային վիճակի խնդիրների միջև: Այդ անալոգները արտահայտվում են (1.30) և (1.31) բանաձևով, որոնք կապ են ստեղծում երկու տարբեր խնդիրների մեջ մտնող հաշվարկային մեծությունների միջև: Ցույց է տրվում, որ կարելի է կազմել սալի ծռման խնդրի լուծումը, եթե հայտնի է համապատասխան հարթ խնդրի լուծումը, և հակառակը: Անալոգների օգտագործման կարգը ցույց տալու համար դիտվում է կոնկրետ խնդիր:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- [1] Т. Т. Хачатурян—Круговая балка на упругом основании. Сборник трудов Московск. Инж. Стр. Института (Строительная механика) № 2, 1939 г.
- [2] П. Ф. Папкович—Теория упругости, 1939 г., стр. 434.

Поступило
16 II 1949