

Б. Л. АБРАМЯН

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С КРЕСТООБРАЗНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

В работе приводится решение задачи кручения призматических стержней с крестообразным поперечным сечением.

При решении задачи использован метод Н. Х. Арутюняна [1] для решения уравнения Пуассона.

Применение этого метода позволило свести задачу кручения к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений и к решению бесконечной, вполне регулярной системы уравнений для постоянных интегрирования.

Полученные формулы (5.1) и (6.1)–(6.4) определяют напряжения и жесткость профиля для различных отношений $\frac{b}{d}$, начиная от $\frac{b}{d} = 1$ (квадратное сечение) до $\frac{b}{d} = \infty$.

Кроме того, в работе указываются пределы применимости эмпирических формул Вебера [2], Фепля [3] и других (в зависимости от отношений $\frac{b}{d}$) для определения жесткости тонкостенных стержней с крестообразным поперечным сечением.

§ 1. Постановки задачи

Определение функции напряжений $U(x, y)$ при кручении сводится к интегрированию уравнения Пуассона

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2, \quad (1.1)$$

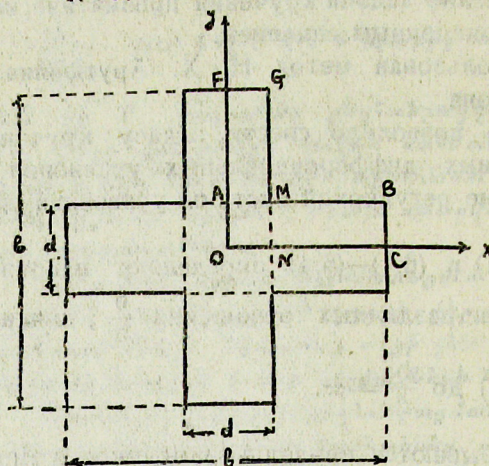
при условии, что $U = 0$ на контуре области поперечного сечения.

По соображениям симметрии области сечения и аналитичности функции $U(x, y)$ достаточно найти функцию $U(x, y)$ только для части ОАВС сечения. Для того, чтобы функция $U(x, y)$ распространилась и на остальную часть области, она должна удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0, \\
 \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} &= 0, \\
 U\left(\frac{b}{2}, y\right) &= 0, \\
 U\left(x, \frac{d}{2}\right) &= \begin{cases} 0 & \frac{d}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ U_2\left(x, \frac{d}{2}\right) & 0 \leq x \leq \frac{d}{2} \end{cases},
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$U_2(x, y)$ имеет такой же вид, как функция $U(x, y)$, только x и y меняются местами.



Для определения функции $U(x, y)$ из уравнений (1.1) и (1.2) пользуемся методом, предложенным Н. Х. Арутюняном.

Ищем функцию $U(x, y)$ в виде

$$U(x, y) = \Psi(x, y) + \Phi(x, y), \tag{1.3}$$

где $\Phi(x, y)$ — гармоническая функция и существует только в области OAMN, а $\Psi(x, y)$ существует во всей области OABC.

Для определения $\Psi(x, y)$ получим уравнения:

$$\nabla^2 \Psi = -2, \tag{1.4}$$

$$\Psi\left(x, \frac{d}{2}\right) = 0, \quad \Psi\left(\frac{b}{2}, y\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x=0} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \tag{1.5}$$

Полагая функцию $\Psi(x, y)$ в виде

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d}, \tag{1.6}$$

получим следующие уравнения для $\Phi(x, y)$:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \tag{1.7}$$

$$\Phi\left(\frac{d}{2}, y\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=\frac{d}{2}} = 0, \quad \Phi\left(x, \frac{d}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(\frac{d}{2}\right) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{d}. \tag{1.8}$$

Уравнения (1.4), (1.5), (1.7) (1.8) полностью определяют функцию $U(x, y)$ в области OABC.

В области OFGN функция напряжений имеет такой же вид, как (1.3), только там x и y меняются местами.

Определив функцию $U(x, y)$, напряжения и жесткость при кручении, получим из формул

$$X_z = \frac{\partial U}{\partial y} \mu \tau, \quad (1.9)$$

$$Y_z = - \frac{\partial U}{\partial x} \mu \tau,$$

$$C = 2\mu \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy = \\ = 8\mu \left[2 \int_{d/2}^{b/2} dx \int_0^{d/2} U(x, y) dy + \int_0^{d/2} \int_0^{d/2} U(x, y) dx dy \right], \quad (1.10)$$

где

Ω — область поперечного сечения стержня,

μ — модуль сдвига,

τ — угол закручивания на единицу длины стержня.

§ 2. Решение дифференциальных уравнений (1.4) и (1.7)

Согласно (1.6) имеем

$$f_k(x) = \frac{4}{d} \int_0^{d/2} \Psi(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} dy. \quad (2.1)$$

Из (1.4), умножив его на $\frac{4}{d} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d}$ и интегрируя по y от нуля до $\frac{d}{2}$, получим:

$$\int_0^{d/2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2 \right) \frac{4}{d} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} dy = \\ = f_k''(x) - \left[\frac{(2k-1)\pi}{d} \right]^2 f_k(x) + (-1)^{k+1} \frac{8}{(2k-1)^2 \pi} = 0, \quad (2.2)$$

где использованы условия (1.5) и значение (2.1). Общее решение дифференциального уравнения (2.2) имеет вид:

$$f_k(x) = A_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{d} + B_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{d} + (-1)^{k+1} \frac{8d^2}{(2k-1)^2 \pi^3}. \quad (2.3)$$

Граничные условия для определения функции $\Phi(x, y)$ не однородны, следуя Гринбергу [3], полагаем:

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d}, \quad (2.4)$$

откуда
$$\varphi_k(x) = \frac{4}{d} \int_0^{d/2} \Phi(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} dy. \quad (2.5)$$

Умножив уравнение (1. 7) на $\frac{4}{d} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d}$ и интегрируя его по y от нуля до $\frac{d}{2}$, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{d/2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \frac{4}{d} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} dy &= \varphi''(x) + \\ &+ \frac{4}{d} \int_0^{d/2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} dy = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Интегрируя второй член (2.6) по частям, получим:

$$\begin{aligned} \frac{4}{d} \int_0^{d/2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} dy &= \frac{4}{d} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} \Big|_0^{d/2} + \\ &+ \frac{4(2k-1)\pi}{d^2} \int_0^{d/2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{d} dy = \frac{4(2k-1)\pi}{d^2} \Phi(x, y) \sin \frac{(2k-1)\pi y}{d} \Big|_0^{d/2} - \\ &- \frac{4}{d} \left[\frac{(2k-1)\pi}{d} \right]^2 \int_0^{d/2} \Phi(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} dy = \\ &= (-1)^{k+1} \frac{4(2k-1)\pi}{d^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p \left(\frac{d}{2} \right) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{d} - \left[\frac{(2k-1)\pi}{d} \right]^2 \varphi_k(x), \end{aligned} \quad (2.7)$$

причем использованы уравнения (1.8) и (2.5), а $f_p \left(\frac{d}{2} \right)$ имеет значение:

$$f_p \left(\frac{d}{2} \right) = A_p \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi}{2} + B_p \operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi}{2} + (-1)^{p+1} \frac{8d^2}{(2p-1)^3 \pi^3}. \quad (2.8)$$

Подставив (2.7) в (2.6), получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_k''(x) - \left[\frac{(2k-1)\pi}{d} \right]^2 \varphi_k(x) = \\ = (-1)^k \frac{4(2k-1)\pi}{d^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p \left(\frac{d}{2} \right) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{d}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = C_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{d} + D_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{d} + \\ + (-1)^k \frac{4(2k-1)}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \left(\frac{d}{2} \right)}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{d} - \right. \\ \left. - \cos \frac{(2p-1)\pi x}{d} \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

§ 3. Определение постоянных интегрирования

Для функций $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ из (1.5) и (1.8) получаем условия:

$$\begin{aligned} \varphi_k \left(\frac{d}{2} \right) &= 0, \\ \varphi_k' \left(\frac{d}{2} \right) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots \\ f_k \left(\frac{b}{2} \right) &= 0, \\ f_k'(0) + \varphi_k'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

На основании (3.1) из уравнений (2.3) и (2.10) получим:

$$\begin{aligned} C_k \operatorname{sh} (2k-1) \frac{\pi}{2} + D_k \operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} + \\ + (-1)^k \frac{4(2k-1)}{\pi} \operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \left(\frac{d}{2} \right)}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} = 0, \quad (3.2) \\ C_k \operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} + D_k \operatorname{sh} (2k-1) \frac{\pi}{2} + \\ + (-1)^k \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} f_p \left(\frac{d}{2} \right) \frac{(2k-1) \operatorname{sh} (2k-1) \frac{\pi}{2} + (2p-1)(-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$A_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b}{2d} + B_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d} + (-1)^{k+1} \frac{8d^3}{(2k-1)^3 \pi^3} = 0, \quad (3.4)$$

$$A_k + C_k = 0. \quad (3.5)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \infty.$$

Исключив из этих соотношений A_k , C_k и D_k , получим бесконечную систему уравнений в виде:

$$B_k = (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} \operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi b}{2d} \sum_{p=1}^{\infty} B_p \frac{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi(b-d)}{2d}}{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi b}{2d}} +$$

$$\frac{(2p-1)(-1)^{p+1}}{(2k-1)^3 + (2p-1)^3} + (-1)^k \frac{8d^3}{(2k-1)^3 \pi^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{32d^3}{\pi^4} \operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{th} (2k-1) \frac{\pi b}{2d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\operatorname{sh} (2p-1) \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi b}{2d}}}{(2p-1)^3 [(2k-1)^2 + (2p-1)^2]}. \quad (3.6)$$

Введя в (3.6) обозначение

$$B_k = F_k d^3 \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2}}{2k-1} \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi b}{2d} (-1)^k; \quad (3.7)$$

после некоторых преобразований бесконечную систему (3.6) приведем к виду, разрешенному относительно F_k

$$F_k = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{\infty} F_p c_{kp} + b_k, \quad (3.8)$$

где

$$c_{kp} = \frac{4(2k-1)}{\pi \left[1 - \frac{2}{\pi(2k-1)} \cdot \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi(b-d)}{2d}}{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi b}{2d}} \right]} \cdot$$

$$\frac{\operatorname{ch} (2p-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi(b-d)}{2d}}{\operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi b}{2d} [(2k-1)^2 + (2p-1)^2]}, \quad (3.9)$$

$$b_k = \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3} \frac{1}{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}}$$

$$\left[1 - \frac{2}{\pi(2k-1)} \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi(b-d)}{2d}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} \right] -$$

$$- \frac{32}{\pi^4} \left[1 - \frac{2}{\pi(2k-1)} \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi(b-d)}{2d}}{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi b}{2d}} \right]$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\operatorname{sh} (2p-1) \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sh} (2p-1) \frac{\pi b}{2d}}}{(2p-1)^2 [(2k-1)^2 + (2p-1)^2]} \quad (3.10)$$

Бесконечная система (3.8) вполне регулярна, т. к.

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{\infty} |c_{kp}| \leq \frac{4(2k-1)}{\pi} \left[1 - \frac{2}{\pi(2k-1)} \cdot \frac{1+e^{-\pi}}{2} \right] \cdot \frac{1+e^{-\pi}}{2} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} =$$

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{1+e^{-\pi} - \frac{1}{\pi(2k-1)}} \left[\frac{1}{2} \operatorname{th} (2k-1) \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi(2k-1)} \right] \leq \frac{1+e^{-\pi}}{2} = 0,5216, \quad (3.11)$$

таким образом имеем:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{\infty} c_{kp} \leq 1 - \Theta = 0,5216, \quad (3.12)$$

откуда

$$\Theta = 0,4784.$$

Свободный член b_k системы (3.8) удовлетворяет неравенству

$$|b_k| \leq 0,2525 - \frac{0,7199}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}} = P, \quad (3.13)$$

для любых k при $\frac{b}{d} > 1,127$.

Обозначим значения неизвестных F_k с избытком через $\bar{F}_k$, а значения с недостатком через $\tilde{F}_k$,

$$\tilde{F} \leq F_k \leq \bar{F}_k. \quad (3.14)$$

Вполне регулярная система (3.8) имеет ограниченное решение

$$|F_k| \leq \frac{P}{\theta} = K = 0,5278 - \frac{1,5048}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}}. \quad (3.15)$$

Из теории регулярных систем [4] известно, что для случая систем с коэффициентами $c_{kp} > 0$ и свободными членами произвольного знака можем писать:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_k &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N c_{kp} \tilde{F}_p + b_k - K \sum_{p=N+1}^{\infty} c_{kp}, \quad (k=1, 2, \dots, N), \\ \bar{F}_k &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N c_{kp} \bar{F}_p + b_k + K \sum_{p=N+1}^{\infty} c_{kp}, \quad (k=1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует

$$\begin{aligned} \bar{F}_k - \tilde{F}_k &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N c_{kp} (\bar{F}_p - \tilde{F}_p) + 2K \sum_{p=N+1}^{\infty} c_{kp} \quad (k=1, 2, \dots, N) \\ \bar{F}_k + \tilde{F}_k &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N c_{kp} (\bar{F}_p + \tilde{F}_p) + 2b_k \quad (k=1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из (3.17) для конечного числа N определяются $\bar{F}_k$ и $\tilde{F}_k$.

Применением лимитант, введенных Б. М. Кояловичем, можно границы определения неизвестных F_k ($k=1, 2, \dots$) уточнить.

Напишем лимитанты в удобном для нашего случая виде

$$h \leq v_k^{(N)} = \frac{\sum_{p=1}^N c_{kp} F_p^* + b_k}{K \sum_{p=1}^N c_{kp} + K\theta} \leq H \quad k \geq N+1, \quad (3.18)$$

где

F_p^* — известные значения первых N неизвестных,

h — значение $v_k^{(N)}$ при неизвестных с недостатком и

H — значение $v_k^{(N)}$ при неизвестных с избытком.

Из (3.18) следует

$$Kh = \tilde{F}_k \leq F_k \leq \bar{F}_k = KN. \quad (3.19)$$

Наибольшее отношение для $v_k^{(N)}$ получается при $k = N + 1$, поэтому

$$H' = \frac{\sum_{p=1}^N c_{kp} \bar{F}_p + b_k}{K \left(\sum_{p=1}^N c_{kp} + \theta \right)} \quad k \geq N + 1, \quad (3.20)$$

$$h' = \frac{\sum_{p=1}^N c_{kp} \tilde{F}_p + b_k}{K \left(\sum_{p=1}^N c_{kp} + \theta \right)} \quad k \geq N + 1$$

Определив по этим формулам h' и H' , будем иметь

$$Kh' = \tilde{F}'_k \leq F_k \leq \bar{F}'_k = KN' \quad k \geq N + 1, \quad (3.21)$$

а для $k = 1, 2, \dots, N$ получим:

$$\begin{aligned} \bar{F}'_k &= \tilde{F}_k + \frac{1+H'}{2} (\bar{F}_k - \tilde{F}_k), \\ \tilde{F}'_k &= \tilde{F}_k + \frac{1+h'}{2} (\bar{F}_k - \tilde{F}_k). \end{aligned} \quad (3.22)$$

С помощью найденных значений $\bar{F}'_k$ и $\tilde{F}'_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$), значения h и H можно вновь уточнить, перейдя от H' к $H'' < H'$, от h' к $h'' > h'$ и т. д. При этом два последовательные значения H и h связаны равенствами:

$$\begin{aligned} H^{(m+1)} &= \frac{\sum_{p=1}^N c_{kp} \left[\tilde{F}_p + \frac{1+H^{(m)}}{2} (\bar{F}_p - \tilde{F}_p) \right] + b_k}{K \left(\sum_{p=1}^N c_{kp} + \theta \right)} \quad k \geq N + 1, \\ h^{(m+1)} &= \frac{\sum_{p=1}^N c_{kp} \left[\tilde{F}_p + \frac{1+h^{(m)}}{2} (\bar{F}_p - \tilde{F}_p) \right] + b_k}{K \left(\sum_{p=1}^N c_{kp} + \theta \right)} \quad k \geq N + 1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для нашего случая приняв $N=3$ двухкратным применением лимитант, получим:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1 &= \frac{0,8157}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}} - 0,2938 \leq F_1 \leq \frac{0,8140}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}} - 0,2932 = \bar{F}_1, \\ \tilde{F}_2 &= \frac{0,5219}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}} - 0,2229 \leq F_2 \leq \frac{0,5187}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}} - 0,2218 = \bar{F}_2, \\ \tilde{F}_3 &= \frac{0,4073}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}} - 0,1771 \leq F_3 \leq \frac{0,4032}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}} - 0,1756 = \bar{F}_3. \quad (3.24) \\ \frac{0,3614}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}} - 0,1579 &\leq \tilde{F}_k \leq F_k \leq \bar{F}_k \leq \frac{0,3475}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2d}} - 0,1530 \quad k \geq 4.\end{aligned}$$

§ 4. Определение функции напряжений

Согласно (1.3), (1.6) и (2.4) можем написать

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} [f_k(x) + \varphi_k(x)] \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{d}{2} \quad (4.1)$$

$$\text{и } U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} f_k(x) \quad \text{при } \frac{d}{2} < x \leq \frac{b}{2}. \quad (4.2)$$

Подставляя сюда (2.3) и (2.10), получим:

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} \left\{ (-1)^{k+1} \frac{8d^2}{(2k-1)^3 \pi^3} + \right. \\ &+ \left[B_k + (-1)^k \frac{4 \operatorname{sh}(2k-1)}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \left(\frac{d}{2} \right) (2p-1) (-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} \right] \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{d} + \\ &+ (-1)^{k+1} \frac{4(2k-1)}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \left(\frac{d}{2} \right) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{d}}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} \left. \right\} \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{d}{2}. \quad (4.3)\end{aligned}$$

Здесь использованы соотношения (3.2)–(3.5); B_k имеет значение (3.7), а $f_p \left(\frac{d}{2} \right)$ определяется формулой:

$$\begin{aligned}f_p \left(\frac{d}{2} \right) &= \frac{(-1)^p d^2}{2p-1} \left\{ F_p \frac{\operatorname{ch} (2p-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi(b-d)}{2d}}{\operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi b}{2d}} - \right. \\ &- \left. \frac{8}{(2p-1)^2 \pi^3} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi b}{2d}} \right] \right\}. \quad (4.4)\end{aligned}$$

Для части NMBC имеем:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} \left\{ B_k \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi \left(\frac{b}{2} - x\right)}{d}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} + \right. \\ \left. + (-1)^{k+1} \frac{8d^2}{(2k-1)^3 \pi^3} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} \right] \right\} \text{ при } \frac{d}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}. \quad (4.5)$$

Заметим, что для случая $\frac{b}{d} = 1$ из (4.4) и (3.6) получим

$$f_p \left(\frac{d}{2} \right) = 0.$$

$$B_k = (-1)^k \frac{8d^2}{(2k-1)^3 \pi^3} \frac{1}{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2}}.$$

Подставляя эти значения в (4.3), получим:

$$U(x, y) = \frac{8d^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi x}{d}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \right]. \quad (4.6)$$

Это есть функция напряжений для призматического стержня с квадратным поперечным сечением, которая приводится в курсах теории упругости.

§ 5. Определение жесткости при кручении

Подставляя значения функции напряжений $U(x, y)$ из (4.3) и (4.5) в (1.10) и производя интегрирование, для жесткости профиля получим:

$$C = 32\mu \frac{d^4}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left\{ \frac{2}{\pi d^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi b}{2d}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} (2k-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} (2k-1) \frac{\pi}{2} \left(\frac{b}{d} - 1 \right)}{2 \operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi b}{2d}} \right] \sum_{p=1}^{\infty} f_p \left(\frac{d}{2} \right) \frac{(2p-1) (-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} - \right. \\ \left. - \frac{4}{(2k-1)^3 \pi^3} \left[\operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2} \frac{b}{d} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} (2k-1) \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi b}{2d}} \right] \right\} + \quad (5.1)$$

$$+ \frac{(2k-1)^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \left(\frac{d}{2} \right)}{d^2} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)[(2k-1)^2 + (2p-1)^2]} + \frac{2 \frac{b}{d} - 1}{(2k-1)^2 \pi^2} \left. \right\},$$

где $f_p \left(\frac{d}{2} \right)$ имеет значение (4.4).

Для случая $\frac{b}{d} = 1$ из (5.1) получаем известное выражение для жесткости призматического стержня с квадратным сечением.

$$C = 32\mu \frac{d^4}{\pi^4} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{th}(2k-1) \frac{\pi}{2}}{(2k-1)^5} \right\} =$$

$$= \mu d^4 \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{th}(2k-1) \frac{\pi}{2}}{(2k-1)^5} \right\} = 0,1406 \mu d^4. \quad (5.2)$$

Жесткость, определенная по формуле (5.1), можно представить в виде

$$C = C_0 \eta \left(\frac{b}{d} \right), \quad (5.3)$$

где C_0 — жесткость профиля, вычисленная как сумма жесткостей двух прямоугольников, составляющих крест, когда средняя часть креста учтена только в одном прямоугольнике.

$\eta = \frac{C}{C_0}$ — коэффициент увеличения, представляющий влияние стыков данного профиля на величину жесткости.

Подставляя в (5.3) найденные значения коэффициентов $\bar{F}_k$ и $\tilde{F}_k$ из (3,24), получим верхнюю и нижнюю границы жесткости.

При этом коэффициентам с недостатком ($\tilde{F}_k$) будет соответствовать верхняя граница жесткости, а коэффициентам с избытком — нижняя граница жесткости.

$$\bar{C} = C_0 \bar{\eta} \left(\frac{b}{d} \right), \quad (5.4)$$

$$\tilde{C} = C_0 \tilde{\eta} \left(\frac{b}{d} \right),$$

$$\text{т. е. } \tilde{C} \leq C \leq \bar{C}. \quad (5.5)$$

Вычисленные по формуле (5.1) значения жесткостей $\tilde{C}$, $\bar{C}$ и коэффициентов увеличения $\tilde{\eta}$, $\bar{\eta}$ в зависимости от отношения $\frac{b}{d}$ приведены ниже в таблице 1.

Для сравнения в таблице 1 приведены также и жесткости, вычисленные по эмпирической формуле Вебера

$$C^* = \mu \frac{d^3}{3} (2b - 0,15d). \quad (5.6)$$

Из таблицы 1 видно, что эмпирическая формула Вебера (5.6) дает достаточно близкие результаты только для тонкостенных стержней, у которых $\frac{b}{d} \geq 4$, [для таких стержней были сделаны эксперименты и на основании их выведена (5.6)].

Для толстостенных же стержней $\left(\frac{b}{d} \leq 4\right)$ формула Вебера неприменима, она при $\frac{b}{d} = 3$ дает ошибку в 6%, при $\frac{b}{d} = 2,5$ — 10%, при $\frac{b}{d} = 2$ — 20%, при $\frac{b}{d} = 1,5$ — 64% и т. д.

Таблица 1

$\frac{b}{d}$	1	1,5	2	2,5	3	4	5	10
C^* по Веберу в μd^4	0,616	0,950	1,283	1,616	1,950	2,616	3,283	6,616
$\bar{C} \left(\frac{b}{d}\right)$ в μd^4	0,141	0,580	1,051	1,468	1,844	2,543	3,216	6,549
$\tilde{C} \left(\frac{b}{d}\right)$ в μd^4	0,141	0,580	1,051	1,467	1,843	2,542	3,215	6,548
$C_0 \left(\frac{b}{d}\right)$ в μd^4	0,141	0,323	0,600	0,916	1,247	1,913	2,579	5,870
$\bar{\eta} = \frac{\bar{C}}{C_0}$	—	1,796	1,752	1,603	1,479	1,329	1,247	1,116
$\tilde{\eta} = \frac{\tilde{C}}{C_0}$	—	1,796	1,750	1,602	1,478	1,329	1,247	1,116
Максимальная погрешность	—	0,00	0,11%	0,06%	0,07%	0,00	0,00	0,00
$\delta = \frac{\bar{\eta} - \tilde{\eta}}{\tilde{\eta}}$	—	—	—	—	—	—	—	—

§. 6. Определение напряжений X_z и Y_z

Подставляя значения функции напряжений $U(x, y)$ из (4.3) и (4.5) в (1.9.), получим:

$$X_z(x, y) = \pi d \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{d} \left\{ F_k \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{d} \left(\frac{b}{2} - x \right)}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} - \right. \\ \left. - \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^3} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} \right] \right\} \mu \tau \quad \text{при} \quad \frac{d}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}, \quad (6.1)$$

$$X_z(x, y) = 4d \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{(2k-1)\pi y}{d} \left\{ \frac{(2k-1) \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi(b-d)}{2d} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{d}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} \cdot \right. \\ \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \left(\frac{d}{2} \right)}{d^2} \frac{(2p-1)(-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} + (2k-1)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \left(\frac{d}{2} \right) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{d}}{d^2 ((2p-1)^2 + (2k-1)^2)} + \\ \left. + \frac{2}{(2k-1)^2 \pi^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{d}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} \right] \right\} \mu \tau \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \frac{d}{2}, \quad (6.2)$$

$$Y_z(x, y) = \pi d \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} \left\{ F_k \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{d} \left(\frac{b}{2} - x \right)}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} - \right. \\ \left. - \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} \right\} \mu \tau \quad \text{при} \quad \frac{d}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}, \quad (6.3)$$

$$Y_z(x, y) = 4d \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} \left\{ \frac{(2k-1) \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi(b-d)}{2d} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{d}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} \cdot \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \left(\frac{d}{2} \right)}{d^2} \frac{(2p-1)(-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} - \\
 & - (2k-1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p \left(\frac{d}{2} \right) (2p-1) \sin \frac{(2p-1)\pi x}{d}}{d^2 (2p-1)^2 + (2k-1)^2} - \frac{2}{(2k-1)^2 \pi^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{d}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} \Bigg\} \mu \tau
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\text{при } 0 \leq x \leq \frac{d}{2}.$$

Формулы (6.1), (6.2), (6.3) и (6.4) определяют напряжения в любой точке области сечения.

Напряжения в точке $\left(\frac{b}{2}, 0 \right)$ будут:

$$X_z \left(\frac{b}{2}, 0 \right) = 0, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}
 Y_z \left(\frac{b}{2}, 0 \right) = \pi d \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Bigg\{ F_k \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi b}{2d}} - \\
 - \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2} \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi b}{2d} \Bigg\} \mu \tau.
 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Подставив сюда коэффициенты $\bar{F}_k$ и $\tilde{F}_k$, определим верхнюю и нижнюю границы напряжения $Y_z \left(\frac{b}{2}, 0 \right)$, причем верхней границе напряжения $\bar{Y}_z \left(\frac{b}{2}, 0 \right)$ будут соответствовать коэффициенты с недостатком $\tilde{F}_k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Для вычисления удобно (6.6) представить в виде:

$$\begin{aligned}
 Y_z \left(\frac{b}{2}, 0 \right) = \mu \tau d \Bigg\{ 1 - \frac{\psi' \left(-\frac{1}{4} \right)}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \left(\operatorname{cth} \frac{\pi b}{2d} - 1 \right) - \\
 - \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} F_k \frac{\operatorname{ch} (2k-1) \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2d}} \Bigg\},
 \end{aligned} \quad (6.7)$$

где использованы значения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad (6.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)^2} = \frac{\psi' \left(-\frac{1}{4} \right)}{16}, \quad (6.9)$$

$$\psi'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(z+m)^2}. \quad (6.10)$$

$\psi'(z)$ — производная от логарифмической производной Гамма функции [5].

Некоторые значения напряжений $Y_z \left(\frac{b}{2}, 0 \right)$, в зависимости от отношения $\frac{b}{d}$ приведены в таблице 2.

В этой же таблице для сравнения приведены значения соответствующих напряжений $Y_z^0 \left(\frac{b}{2}, 0 \right)$ для прямоугольного сечения.

Таблица 2

$\frac{b}{d}$	1	1,5	2	2,5	3	4	5	10
$\bar{Y}_z \left(\frac{b}{2}, 0 \right)$ в $\mu\tau d$	0,675	0,9333	0,8931	0,8239	0,7821	0,7510	0,7443	0,7425
$\tilde{Y}_z \left(\frac{b}{2}, 0 \right)$ в $\mu\tau d$	0,675	0,9330	0,8927	0,8237	0,7820	0,7510	0,7443	0,7425
$Y_z^0 \left(\frac{b}{2}, 0 \right)$ в $\mu\tau d$	0,675	0,7283	0,7395	0,7415	0,7420	0,7425	0,7425	0,7425

Напряжения, определенные по формулам (6.1) — (6.4), можно представить в виде:

$$Y_z = Y_z^0 \gamma \left(\frac{b}{d} \right), \quad (6.11)$$

где

Y_z^0 — напряжение в стержне с прямоугольным поперечным сечением,

$\gamma \left(\frac{b}{d} \right)$ — коэффициент увеличения напряжений.

Некоторые значения коэффициента увеличения γ для различных отношений $\frac{b}{d}$ приведены в таблице 3.

Таблица 3

$\frac{b}{d}$	1,5	2	2,5	3	4	5	10	∞
$\gamma = \frac{\bar{y}_z\left(\frac{b}{2}, 0\right)}{y_z^0\left(\frac{b}{2}, 0\right)}$	1,2815	1,2077	1,1111	1,0540	1,0114	1,0024	1,0	1,0
$\tilde{\gamma} = \frac{\tilde{y}_z\left(\frac{b}{2}, 0\right)}{y_z^0\left(\frac{b}{2}, 0\right)}$	1,2811	1,2072	1,1108	1,0539	1,0114	1,0024	1,0	1,0
Максимальная ошибка $\delta = \frac{\tilde{\gamma} - \gamma}{\tilde{\gamma}}$	0,03%	0,04%	0,03%	0,01%	0,00	0,00	0,00	0,00

Բ. Լ. ԱՔՐԱՀԱՄՅԱՆ

ԽԱՉԱԶԵՎ ԸՆԴԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ներկա աշխատության մեջ բերվում է խաչաձև ընդլայնական կտրվածք ունեցող ձողերի ոլորման խնդրի լուծումը:

Խնդրի լուծման ընթացքում օգտագործված է Ն. Ն. Հարությունյանի Պուլասոսնի հավասարման լուծումը երկու ֆունկցիաների միջոցով աբտահայտելու եղանակը, ընդ որում այդ ֆունկցիաներից մեկը հարմոնիկ է և գոյություն ունի ընդլայնական կտրվածքի միմիայն մեկ մասում, իսկ մյուսը բավարարում է Պուլասոսնի հավասարմանը և գոյություն ունի կտրվածքի ամբողջ տիրույթում:

Խնդրի լուծումը բերվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանը, իսկ ինտեգրման գործակիցները որոշելու համար անվերջ, լրովին բեզուլյար հավասարումների սխեմաի:

Ստացված են բանաձևեր խաչաձև կտրվածք ունեցող ձողերի ոլորման կոտորվածքը և լարումները հաշվելու համար:

Աշխատության մեջ բերված ոլորման կոտորվածքների աղյուսակը ցույց է տալիս, որ գոյություն ունեցող մոտավոր էմպիրիկ բանաձևերը կիրառելի են միայն բարակապատ ձողերի ($\frac{b}{d} \geq 4$) համար, իսկ հաստապատ ձողերի համար այդ բանաձևերը տալիս են մեծ սխալ:

ЛИТЕРАТУРА — ՀԱՎԱՆՈՒՅՈՒՆ

- [1]. Н. Х. Арутюнян—ДАН АН Арм. ССР IX, № 2, 1948 г. и ПММ. 1949 г., т. XIII, в. 1.
- [2]. С. Weber—Forschungsheft No. 249. Изд. V. D. I, 1921.
- [3]. Г. А. Гринберг—Изв. АН СССР, сер. физ. 10 № 2, 1946 г.
- [4]. Л. В. Канторович и Н. И. Крылов—Приближенные методы высшего анализа, Москва, ОНТИ, 1941.
- [5]. Е. Янке и Ф. Эмде—Таблицы функций. Огиз, Гостехиздат, Москва, 1948 г.
- [6]. А. Pöppel—Vorlesungen, 5, 1922.