С. Н. МЕРГЕЛЯН

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ ПОНЯТИИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

1. Рассмотрим последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

определенных и измеримых на отрезке [0,1].
Пусть k означает некоторую характеристику точечного множества (например, счетность), а $S(k)$ — совокупность всевозможных измеримых подмножеств [0,1], обладающих свойством k. Функцию $f(x)$ назовем k — пределом последовательности $\{f_n(x)\}$, если для всякого $M \subset S(k)$ найдется подпоследовательность $f_{n_1}(x)$, $f_{n_2}(x)$, ...

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x),\quad x \subseteq M$$

Очевидно, если характеристика k заключается в существовании по крайней мере одной точки, т. е. в непустоте, то приведенное выше определение ничего не даст. Поэтому начнем рассмотрение k — сходимости с того случая, когда свойство k заключается в наличии двух точек. Это свойство будем обозначать так $k = k_2$.

Построим пример последовательности аналитических функций, которые не имеют ни одного измеримого k_2 — предела. Тем самым будет показано, что вводимое определение не является тривиальным. Для построения отметим предварительно следующий факт.

Если $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(x)\}$ —две последовательности функций, определенных на [0,1], таковы, что

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \psi_n(x)| = 0,\quad x \subset [0,1],$$

то совокупность всевозможных k_2 — пределов $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с множеством всех k_2 — пределов $\{\psi_n(x)\}$. Действительно, так как при любых $\{n_k\}$, $\varphi(x)$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |\psi_{n_k}(x) - \varphi(x)| \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} |\psi_{n_k} - \varphi_{n_k}| + \overline{\lim_{k\to\infty}} |\psi_{n_k} - \varphi|,$$

то, беря произвольное M и функции $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, сходящиеся к $\varphi(x)$ на M, а в качестве $\varphi(x)$ какой-нибудь k_2 — предел $\{\varphi_n(x)\}$, будем иметь:

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_{n_k}(x) - \varphi(x)| = 0.$$

т. е. $\varphi(x)$ является k_2 — пределом и для $\{\psi_n(x)\}$

Положим

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(2k+1)\pi x 2^n}{2k+1}.$$

Докажем, что определяемая таким образом последовательность аналитических функций не имеет ни одного измеримого k_2 — предела.

Пусть

$$\nu(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \nu(x+2k) = \nu(x) \\ k = 1, 2, \ldots \end{array}$$

ряд Фурье функции $\nu(x)$:

$$\nu(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi x}{2k+1}$$

сходится везде кроме $x = 0$ к $\nu(x)$. Обозначим

$$\nu_k(x) = \nu(2^k \cdot x).$$

Ряды Фурье функций $\nu_k(x)$, $k \geqslant 1$, сходятся к ним везде кроме точек вида $\frac{F}{2^q}$. Пусть дополнение этого множества относительно $[0,1]$ — M. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - \nu_n(x)| = 0, \ x \subset M.$$

Следовательно, согласно сделанному ранее замечанию, достаточно доказать отсутствие измеримых k_2 — пределов у совокупности $\{\nu_n(x)\}$.

Легко видеть, что функции $\nu_n(x)$, принимающие на множестве M лишь два значения — 0 и 1, удовлетворяют тождеству

$$1 - x \equiv \frac{\nu_1(x)}{2} + \frac{\nu_2(x)}{2^2} + \ldots + \frac{\nu_k(x)}{2^k} + \ldots,$$

т. е. являются k — ми знаками в двоичном разложении числа $1 - x$. Этим обстоятельством мы в дальнейшем воспользуемся.

Пусть $\{\nu_n(x)\}$ имеют измеримый k_2 — предел — функцию $\nu(x)$; покажем, что это предположение приводит к противоречию. Пусть

$$E = E[\nu(x) = 1], \quad \mathrm{mes}\, E = \mu.$$

Возможны три случая: $\mu = 0$, $\mu = 1$, $0 < \mu < 1$.

Если $0 < \mu < 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ по имеющейся $\nu(x)$ возможно построить еще один измеримый k_2 — предел — $\nu_\varepsilon(x)$, для которого уже

$$\mathrm{mes}\, E_\varepsilon = \mathrm{mes}\, E[\nu_\varepsilon(x) = 1] > 1 - \varepsilon.$$

Действительно, разобьем $[0,1]$ на 2^n равных частей —

$$\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots, \Delta_{2^n}^{(n)}.$$

и пусть $x_0 \subset \Delta_{i_n}^{(n)}$ есть точка плотности множества E.

Выберем n настолько большим, чтобы

$$\frac{\mathrm{mes}\left\{E \cdot \Delta_{i_n}^{(n)}\right\}}{\mathrm{mes}\, \Delta_{i_n}^{(n)}} > 1 - \varepsilon$$

и определим $\nu_\varepsilon(x)$ так:

$$\nu_\varepsilon(x) = \begin{cases} \nu(x) & x \subset \Delta_{i_n}^{(n)} \\ \nu\left(x + \dfrac{k}{2^n}\right) & x, x + \dfrac{k}{2^n} \subset [0,1];\ x + \dfrac{k}{2^n} \subset \Delta_{i_n}^{(n)}. \end{cases}$$

Таким образом, $\nu_\varepsilon(x)$ периодически, с периодом $\frac{1}{2^n}$, проложена за $\Delta_{i_n}^{(n)}$.

Легко убедиться в том, что $\nu_\varepsilon(x)$, так же как и $\nu(x)$ является k_2 — пределом $\left\{\nu_n(x)\right\}$. Это следует из того, что все $\nu_{n+1}, \nu_{n+2}, \dots$ периодичны с периодом $\frac{1}{2^n}$ а в $\Delta_{i_n}^{(n)}$ имеем $\nu_\varepsilon(x) = \nu(x)$, причем ясно, что

$$\mathrm{mes}\, E_\varepsilon = \mathrm{mes}\, E[\nu_\varepsilon(x) = 1] > 1 - \varepsilon.$$

Пусть $P = \left(0, \frac{1}{2}\right) E_\varepsilon$ и α пробегает все точки P; тогда совокупность всех $1 - \alpha$ есть некоторое множество Q, причем $\mathrm{mes} P = \mathrm{mes}\, Q$. Так как $\mathrm{mes}\, E_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, то $\mathrm{mes}\, P > \frac{1}{2} - \varepsilon$ и

$$\mathrm{mes}\left\{E_\varepsilon - E_\varepsilon Q\right\} < \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \dots\dots \quad (*)$$

ни одна из точек Q не принадлежит множеству E_ε.

Действительно, если бы существовала точка α, такая что $\alpha \subset Q$,

$\alpha \subset E_\varepsilon$, то тогда $1-\alpha \subset P \subset E_\varepsilon$ следовательно, и α и $1-\alpha$ принадлежат множеству E_ε. В силу того, что $\nu(x)$ является k_2 — пределом функций $\{\nu_n(x)\}$, для любого $\delta > 0$ и для наших двух точек α и $1-\alpha$ найдутся номера N, такие что

$$|\nu_N(\alpha) - 1| < \delta$$

$$|\nu_N(1-\alpha) - 1| < \delta$$

но, так как $\nu_n(x) = 0{,}1$, то

$$\nu_N(\alpha) = 1, \; \nu_N(1-\alpha) = 1.$$

Этого не может быть, так как имеем

$$1 - x = \frac{\nu_1(x)}{2} + \frac{\nu_2(x)}{2^2} + \cdots + \frac{\nu_k(x)}{2^k} + \cdots; \; x = 1 - (1-x) =$$

$$= \frac{1-\nu_1(x)}{2} + \frac{1-\nu_2(x)}{2^2} + \cdots + \frac{1-\nu_k(x)}{2^k} + \cdots = \frac{\nu_1(1-x)}{2} + \cdots +$$

$$+ \frac{\nu_k(1-x)}{2^k} + \cdots$$

следовательно, $\nu_k(x) = 1 - \nu_k(1-x)$

и если бы $\nu_N(\alpha) = 1$, то $\nu_N(1-\alpha) = 0$. Итак, $Q \cdot E_\varepsilon = 0$, следовательно

$$E_\varepsilon = E_\varepsilon - E_\varepsilon \, . \, Q$$

в силу же (*) имеем

$$\operatorname{mes} E_\varepsilon < \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ является противоречием с $\operatorname{mes} E_\varepsilon > 1 - \varepsilon$. Таким образом, или $\mu = 0$, или $\mu = 1$. Очевидно, что в случае $\mu = 1$ предыдущие рассуждения остаются в силе, если же $\mu = 0$, то трансформация $1 - F(1-x)$ переводит $\{\nu_n(x)\}$ в себя же, а $\nu(x)$ — в функцию $1 - \nu(1-x) = \nu_0$, для которой

$$\operatorname{mes} E[\nu_0 = 1] = 1,$$

т. е. мы имеем ранее рассмотренный случай. Итак, $\{\nu_n(x)\}$ измеримого k_2 — предела не имеют, следовательно, тем же свойством обладает и последовательность аналитических функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, $\ldots$.

2. Остановимся теперь на том случае, когда свойство k есть счетность множества.

Построенный пример показывает, что даже самый общий случай k — сходимостей не является тривиальным, потому что не всякая последовальность функций обязана иметь измеримый k_2 — предел.

Следовательно, имеет смысл поставить вопрос о разыскании признаков, необходимых и достаточных для существования измеримого k — предела у последовательности функций; особенно интересно это для случая функций, принимающих лишь два значения — 0 и 1, так как в этом случае возможно установить некоторые факты из теории точечных множеств, рассматривая эти функции как характеристические функции соответствующих множеств.

Вместе с этим следующие несколько предложений устанавливают, что все же k — сходимость является весьма общей и не имеет в некотором смысле никакой связи с обычной сходимостью.

Разобьем $[0,1]$ на 2^n равных полуинтервала $\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \ldots, \Delta_{2^n}^{(n)}$ и возьмем произвольно группу в n полуинтервалов нашего разбиения. Пусть:

$$\varphi_{i_1 i_2 \cdots i_n}(x) = \begin{cases} 1 & x \subset \Delta_{i_1}^{(n)} + \Delta_{i_2}^{(n)} + \cdots + \Delta_{i_n}^{(n)} \\ 0 & x \overline{\subset} \Delta_{i_1}^{(n)} + \Delta_{i_2}^{(n)} + \cdots + \Delta_{i_n}^{(n)} \end{cases}$$

Варьируя всевозможными способами числа $i_1, i_2, \ldots, i_n$, получим первые $C_{2^n}^n$ функции строящейся последовательности. Давая n всевозможные целые положительные значения и совершая описанную операцию с каждым из этих значений, мы получим последовательность групп функций, которые при иной нумерации можно расположить в ряд

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

Легко видеть, что $\varphi(x) \equiv 1$ является k — пределом последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, причем никакая подпоследовательность ни на каком множестве положительной меры не сходится к $\varphi(x) \equiv 1$ ни равномерно, ни в среднем, ни по мере. Итак, в этом смысле k — сходимость не имеет никакой связи с обычной сходимостью.

Далее, имеет место следующая

Теорема 1. Существует последовательность аналитических функций, так, что совокупность всевозможных ее k — пределов совпадает с множеством всех действительных и комплексных функций в их самом общем определении.

Доказательство.

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — произвольные числа

$$(\,|z_i| \leqslant 1,\ i \leqslant n = 1, 2 \ldots)$$

Возьмем произвольную последовательность $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n \to 0$. Полином $P_{z_i w_i n}(z)$ выберем так, чтобы

$$P_{z_i w_i n}(z_i) = w_i \quad 1, 2, \ldots, n;$$

через

$$P_{z_i w_i n k}(z) \quad |z| \leqslant 1$$

обозначим многочлен с рациональными коэфициентами, такой, что

$$\left| P_{z_i\, w_i\, n_k}(z) - P_{z_i\, w_i\, n}(z) \right| < \varepsilon_k, \quad |z| < 1.$$

Беря произвольно числа $z_1, z_2, \ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_n$ и заставляя n пробегать все целые положительные числа, мы получим совокупность полиномов

$$\left\{ P_{z_i\, w_i\, n_k}(z) \right\}$$

Так как коэфициенты их рациональны, то, изменив нумерацию, возможно представить их в виде последовательности:

$$P_1(z),\ P_2(z), \ldots, P_n(z), \ldots.$$

Нетрудно показать, что эта последовательность обладает указанными в теореме свойствами.

3. Если составить множества $E_k = E[\nu_k = 1]$ где $\nu_k(x)$ — функции, встречающиеся в приведенном в начале примере, то для любой части натурального ряда $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ будем иметь

$$\mathrm{mes}\left\{ \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \right\} = 0$$

В то же время, если все $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ таковы, что $\mathrm{mes}\, E_i > \delta > 0$, то

$$\mathrm{mes}\left\{ \sum_{n_k} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \right\} \geqslant \delta,$$ где суммирование распространяется на все части натурального ряда.

Это следует из того, что

$$\sum_{n_k} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} E_m = \prod_{n=1}^{\infty} S_n$$

Причем $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$

Но $\mathrm{mes}\, S_k \geqslant \delta_k = 1, 2, \ldots$

Следовательно,

$$\mathrm{mes} \prod_{k=1}^{\infty} S_k \geqslant \sigma$$

Как следствие из предыдущего, мы можем заключить, что если последовательность $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ такова, что каждая точка отрезка [0,1] принадлежит лишь конечному числу членов этой последовательности, то

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{mes}\, E_n = 0.$$

Действительно, если бы нашлись множества $\left\{ E_{n_k} \right\}$ и $\alpha > 0$ такие, что $\quad \mathrm{mes}\, E_{n_k} \geqslant \alpha > 0,$

то по предыдущему

$$\text{mes } M = \text{mes}\left\{\sum_{k_m}\prod_{m=1}^{\infty} E_{n_{k_m}}\right\} \geqslant \alpha > 0,$$

между тем как по условию множество M пусто. Из этого следует:

Если последовательность функций, принимающих два значения 0 и 1 сходится почти везде на $[0,1]$ к $\varphi(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество меры меньшей, чем ε, на дополнении которого последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится равномерно к $\varphi(x)$.

Пусть $\varphi_n(x) = 0{,}1 n = 1{,}2, \ldots$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x).$$

Обозначим

$$E_n = \sum_{m=n}^{\infty} E\left[\,|\varphi_m(x) - \varphi(x)| > 0\right].$$

Ясно, что каждая точка отрезка $[0,1]$, за исключением множества меры нуль, принадлежит лишь конечному числу множеств E_n, следовательно, по доказанному ранее

$$\lim_{n\to\infty} \text{mes } E_n = 0.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N настолько большим, чтобы $\text{mes } E_n < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Покроем E_N, а следовательно, и все E_m, $m \geqslant N$ открытым множеством G так, чтобы

$$\text{mes } G < 2\varepsilon$$

множество $CG = P_\varepsilon$ замкнуто, $\text{mes } P_\varepsilon > 1 - 2\varepsilon$ и на нем последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится равномерно. Члены последовательности

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

где $E_n = E[\nu_n(x) = 1]$, как замечено, таковы, что пересечение всякой бесконечной их подпоследовательности имеет меру нуль.

По аналогии с конечными совокупностями точечных множеств естественно назвать это свойство последовательности метрической независимостью.

Необходимым условием отсутствия у $\{\varphi_n(x)\}$, $\varphi_n = 0{,}1$ измеримых k — пределов является метрическая независимость множеств

$$E_n = E[\varphi_n(x) = 1] \text{ и } M_n = E[\varphi_n(x) = 0].$$

Докажем сейчас одно достаточное условие отсутствия метрической независимости. Если перейти к характеристическим функциям множеств, то тем самым будет установлен соответствующий факт в терминах k — сходимости.

Пусть E — измеримая совокупность ($\text{mes}\, E > 0$), расположенная на окружности $|z| = 1$.

Пусть E_k означает E повернутое вокруг $z = 0$ как жесткое целое на угол ψ_k.

Теорема 2. Каковы бы ни были числа ψ_k последовательность множеств $\{E_k\}$ не может быть метрически независимой.

Доказательство.

Обозначим

$$\varphi_k = \psi_k - 2\pi \left[\frac{\psi_k}{2\pi}\right].$$

Без ограничения общности можно предположить, что

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \ldots > \varphi_n \to 0 \quad n \to \infty,$$

а также, что E — замкнуто.

Выберем пока произвольно последовательность чисел

$$N_1 < N_2 < \ldots < N_n \to \infty, \ n \to \infty,$$

и обозначим

$$CE = G = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n, \quad G_k = \sum_{n=1}^{N_k} \delta_n$$

$$CE_k = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{k,n}$$

Для любого $k > 0$ выделим из нашей совокупности $\{\varphi_m\}$ число φ_{n_k} из условия (**) $\varphi_{n_k} < \min\left\{\delta_{N_k}; \frac{\varepsilon}{2^k N_k}\right\}$,

где $\varepsilon > 0$ — заранее фиксированное число.

Пусть

$$G_k^* = \sum_{m=1}^{N_k} \delta_{n_k, m}, \quad CG_k^* = P_k, \quad Z = \sum_{k=1}^{\infty} G_k^*.$$

Тогда ясно, что

$$E_{n_k} \subset P_k$$

и

$$\text{mes}\,[P_k - E_{n_k}] = \sum_{i=N_k+1}^{\infty} \delta_i \to 0 \quad k \to \infty$$

Имеем

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{N_k} \delta_{n_k,m},$$

Согласно (**):

$$(***)\quad \operatorname{mes} Z < \operatorname{mes} CE + \sum N_k \frac{\varepsilon}{2^k N_k} = 2\pi - \sigma + \varepsilon = 2\pi - (\sigma - \varepsilon)$$

Но

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} G_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} CP_k,$$

следовательно,

$$CZ = C \sum_{k=1}^{\infty} CP_k = \prod_{k=1}^{\infty} CCP_k = \prod_{k=1}^{\infty} P_k$$

Из (***) следует:

$$\operatorname{mes} \prod_{k=1}^{\infty} P_k > 2\pi - [2\pi - (\sigma - \varepsilon)] = \sigma - \varepsilon > 0$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$.
Но

$$P_k = E_{n_k} + R_k, \ \operatorname{mes} R_k = \sum_{i=N_k+1}^{\infty} \delta_i$$

Числа $N_1 < N_2 < \ldots < N_n \to \infty$ выберем теперь так, чтобы

$$(****)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_k+1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

Пусть $\prod_{k=1}^{\infty} P_k = P$.

Ясно, что каждая точка P принадлежит или бесконечному множеству R_k или же, начиная с некоторого номера всем E_{n_k}. Точки первого сорта входят в множество

$$\sum_{n_m} \prod_{m=1}^{\infty} R_{n_m},$$

мера которого—нуль, согласно (****) и ранее сделанному замечанию.

Таким образом, почти все точки P принадлежат, начиная с некоторых номеров, всем E_{n_k}.

Имеем разложение $P = P' + P'' = P' + \sum_{k=1}^{\infty} P_k''$, где P_k'' — множества тех точек P, которые, начиная с номера n_k, принадлежат всем $\{E_{n_m}\}$ и, так как $\text{mes}\, P'' > 0$, то существует хотя бы один индекс, такой, что

$$\text{mes}\, P_{k_0}'' = \text{mes} \prod_{k=k_0}^{\infty} E_{n_k} > 0.$$

Итак, существует часть $E_{n_{k_0}}$, $E_{n_{k_0}} + 1, \ldots$ пересечение которой имеет положительную меру. Следовательно, последовательность E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$ не обладает свойством метрической независимости.

В связи с расширением понятия предела в указанном выше смысле, естественно возникает ряд вопросов. В первую очередь интересно было бы обобщить классификацию Baire'а, пользуясь не обычным „фильтром",—сходимостью везде, а k—сходимостью.

Именно, беря за нулевой класс все непрерывные функции, к первому классу отнесем всевозможные не непрерывные k—пределы различных последовательностей функций нулевого класса, и далее так же, как и в случае обычной классификации Baire'а, заменяя лишь везде обычную сходимость на k—сходимость. Представляет интерес выяснить, для каких k все алеф—один классов не пусты, каков их объем и прочее.

Май 1946 год.
Ереван

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

«ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԻՄԱՍՏԻ ՄԱՍԻՆ»

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա հոդվածում սահմանվում և ուսումնասիրվում է ֆունկցիաների, այսպես կոչված, K զուգամիտությունը, որը որոշ իմաստով սովորական զուգամիտության ընդհանրացումն է, իսկ մյուս կողմից էապես տարբերվում է նրանից։

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Գոյություն ունի անալիտիկ ֆունկցիաների այնպիսի հաջորդականություն, որի բոլոր հնարավոր K սահմանների բազմությունը նույնական է, բոլոր իրական և կոմպլեքս ֆունկցիաների բազմությանը։

Ուսումնասիրված են նաև ֆունկցիաների հաջորդականության չափական անկախությանը վերաբերող մի շարք հատկություններ։