ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏԻ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СООБЩЕНИЯ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

BULLETIN OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS

ВЫПУСК 1

О ПОЛНОТЕ СЕМЕЙСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

А. Л. ШАГИНЯН

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН EREVAN

1947

ВВЕДЕНИЕ*

Пусть D произвольная односвязная область на плоскости комплексного аргумента $z=x+iy$. Обозначим через D_2 класс функций $\{f(z)\}$ регулярных внутри D и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{(D)} |f(z)|^2 \, dxdy < \infty.$$

Систему функций $\{g_\eta(z)\} \subset D_2$ определяемой значениями индекса η называем полной, если для любой $f(z) \in D_2$ выполняется

$$\inf \iint\limits_{(D)} |f(z)-g_\eta(z)|^2 \, dxdy=0. \qquad (\alpha)$$

Систему $\{g_\eta(z)\}$ называем замкнутой, если из соотношений

$$\iint\limits_{(D)} f(z)\overline{g_\eta(z)} \, dxdy=0, \ \text{[illegible]} ,\ldots$$

следует $f(z)\equiv 0$.

Известно[1], что при замкнутости системы $\{g_\eta(z)\}$ произвольную функцию $f(z) \in D_2$ можно разложить в ряд по полиномам, составленным из линейных комбинаций функций $\{g_\eta(z)\}$ и ортонормальных по площади D.

Из замкнутости следует полнота и обратно.

Основной вопрос теории ортонормальных по площади полиномов, вопрос о возможности аппроксимации вида (α),

---

* Результаты этой работы были энонсированны нами в нескольких заметках; см. (6)—(9), (библиография в конце).

[1] См. (1).

сравнительно легко решается в случае конечной области со связным дополнением[2].

Как показал М. В. Келдыш[3], полнота полиномов в ограниченных областях с несвязным дополнением зависит от метрических свойств этих областей. Эта зависимость была установлена нами и в случае неограниченных областей даже когда они имеют связное дополнение[4].

М. В. Келдыш исследовал также вопрос аппроксимации вида

$$\inf \iint\limits_{(D)} q(z)\,|\,f(z)-P_n(z)\,|^2\,dxdy=0,$$

где D произвольная ограниченная область, $q(z)$ положительная внутри D весовая функция а $f(z)$ регулярна в D и удовлетворяет условию

$$\iint\limits_{(D)} q(z)|\,f(z)\,|^2\,dxdy<\infty.$$

Он указал предельный порядок убывания весовой функции вблизи границы, когда имеет место полнота для любых $f(z)$, удовлетворяющих предыдущему неравнству.

В настоящей работе, ограничиваясь определенными классами областей, мы приводим предельно точные, в некотором смысле, критерии полноты полиномов как при аппроксимации в среднем, так и при взвешенно-равномерной аппроксимации.

Исследуется также вопрос об одновременной аппроксимации в двух соприкасающихся областях.

Задача нахождения точного критерия, который позволил бы для совершенно произвольной области определить—имеет ли там место полнота или нет, не решена и повидимому представляет большие трудности.

В заключении считаю долгом выразить глубокую благодарность моему учителю акад. В. И. Смирнову а также акад. М. В. Келдышу за критические замечания сделанные ими при чтении рукописи настоящей статьи.

---

[2] См. (2), (3) стр. 45.

[3] См. (4).

[4] См. (5).

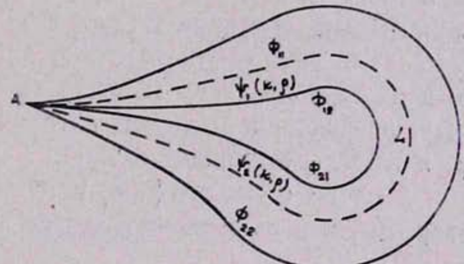
ГЛАВА I

§ 1.1. Тривиальным примером области с несвязным дополнением, где не имеет место полнота полиномов в смысле (α) является открытый круг с радиальным вырезом[5]. Следующей по сложности областью, для которой задача о полноте не решается элементарно, это область топологически эквивалентная области ограниченной двумя окружностями, имеющими внутреннее соприкасание.

Пусть D (черт. 1) область ограниченная двумя замкнутыми жордановыми кривыми с одной общей точкой A. Поместим начало кординат (ρ, φ) в этой точке.

Граница области D в некоторой окрестности $0 \leqslant \rho \leqslant a$ точки A пусть состоит из четырех дуг, представленных следующими однозначными и абсолютно непрерывными функциями

$$(1.1.1) \qquad \varphi = \Phi_{i}(\rho) \qquad (i, k = 1,2)$$



Черт. 1.

Предпологаем далее, что $\varphi = \Phi_{11}(\rho)$, $\varphi = \Phi_{12}(\rho)$ и соответственно $\varphi = \Phi_{21}(\rho)$, $\varphi = \Phi_{22}(\rho)$ имеют в точке A общие касательные, образующие угол β.

Введем следующие обозначения

---

[5] С. напр. (21) стр. 342.

(1.1.2) τ_{ik} угол образуемый полярным радиусом и касательной к кривой $\varphi=\Phi_{ik}(\rho)$[6] в точке (ρ,φ) этой кривой;

$$(1.1.3)\quad \begin{cases} \Theta_1(\rho)=\dfrac{\Phi_{11}-\Phi_{12}}{2}, \varphi=\psi_1(\rho)=\dfrac{\Phi_{11}+\Phi_{12}}{2} \\ \Theta_2(\rho)=\dfrac{\Phi_{21}-\Phi_{22}}{2}, \varphi=\psi_2(\rho)=\dfrac{\Phi_{21}+\Phi_{22}}{2} \end{cases}$$

(1.1.4) δ_{ik} расстояние точки (ρ,φ) кривой $\varphi=\Phi_{ik}$ до касательной к этой кривой, проведенной в точке A.

Пусть L_k замкнутая спрямляемая кривая Жордана внутри (D), проходящая через точку A, и охватывает контур, состоящий из дуг $\varphi=\Phi_{12}$, $\varphi=\Phi_{21}$ и дуги замыкающей их концы. В окрестности точки A пусть L_k состоит из дуг

$$(1.1.5)\quad \begin{cases} \varphi=\psi_1(\rho,k)=\psi_1(\rho)+k\,.\,\Theta_1(\rho) \\ \varphi=\psi_2(\rho,k)=\psi_2(\rho)+k\,.\,\Theta_2(\rho) \end{cases}$$

где $-1<k<1$; в остальном L_k произвольна. В частности, через L_1 обозначим часть границы области D, являющейся одновремено границей области, содержащей бесконечно далекую точку;

(1.1.6) D_k область, ограниченная контуром L_k; D_{12} пересечение круга $|z|<a$ с областью, ограниченной двумя замкнутыми кривыми L_{k_1} и L_{k_2}. D_{12} состоит из двух криволинейных секторов $D'_{k_1k_2}$ и $D''_{k_1k_2}$.

(1.1.7) $T_1(\rho)$ и $T_2(\rho)$ соответственно линейные меры дуг отсекаемых областями $D'_{k_1k_2}$ и $D''_{k_1k_2}$ на окружности $|z|=\rho$; через $T(\rho)$ обозначаем функцию которая в $D'_{k_1k_2}$ совпадает с $T_1(\rho)$ а в $D''_{k_1k_2}$ совпадает с $T_2(\rho)$.

(1.1.8) D^* класс функций $\{g(z)\}$ регулярных внутри L_1 и удовлетворяющих в окрестности точки A неравенству

$$(1.1.9)\quad [g(z)]<\exp\left\{|z|^{\frac{\pi}{\beta}}\,.\,\lg_1\frac{1}{|z|}\lg_2\frac{1}{|z|}\left[\lg_s\frac{1}{|z|}\right]^m\right\}^{-1}$$

где $\lg_s\dfrac{1}{|z|}$ означает s-кратный логарифм и $m>1$; в частности полиномы и рациональные функции с полюсом в точке $A(\rho=0)$ удовлетворяют этому условию;

---

[6] В последующем вместо $\Phi_{ik}(\rho)$ будем писать Φ_{ik}.

(1.1.10) через D_2 обозначаем класс функций $\{f(z)\}$ регулярных в D и удовлетворяющих неравенству

$$\iint_{(D)} |f(z)|^2 \, dx\, dy < \infty.$$

Класс D^* называем полной, если для любой $f(z) \in D_2$

(1.1.11) $$\inf \iint_{(D)} |(fz)-g(z)|^2 dx dy = 0.$$

Наконец обозначим через N(D) класс функций регулярных внутри D и непрерывных вплоть до контура.

Теорема I. Пусть область D *удовлетворяет дополнительно условиям*

(1.1.12) $$\int_0^a \frac{\tau^2_{ik}}{\rho} d\rho < \infty \qquad (i, k = 1,2)$$

(1.1.13) $$\int_0^a \frac{\delta_{ik}}{\rho^2} d\rho < \infty \qquad (i, k = 1,2)$$

и существуют

(1.1.14) $$\int_0^a \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \lg T_i(\rho)\, d(\rho), \quad (i = 1,2)$$

Тогда семейство функций $\{g_\eta(z)\} \subset D^*$ *определяемая значениями индекса* η, *при условии*

$$\iint_{(D)} |g_\eta(z)|^2 dx dy < M,$$

где M *не зависит от* η, *является нормальным семейством внутри* L_1.

При условиях (1.1.12)-(1.1.14) *класс* D^* *не полна в области* D.

Справедлива аналогичная теорема для класса N(D).

Теорема II. Если совокупность функций $\{g_\eta(z)\} \subset D^*$ *в области* D, *удовлетворяет условию* $q(\rho)|g_\eta(z)| < M$, *где*

M не зависит от η, а весовая функция $q(\rho)>0$ $(\rho=|z|)$ *такова, что интеграл*

$$(1.1.15)\qquad \int_0^a \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \lg q(\rho)d\rho \text{ *существует*,}$$

то семейство $\{g_{\eta}(z)\}$ *нормальна внутри* L_1. *В области* D *аппроксимация*

$$(1.1.16)\qquad \operatorname{Sup} q(\rho)|f(z)-g_n(z)|\to 0$$

где $\{g_n(z)\}\subset D^*$ *а* $f(z)\in N(D)$, *вообще говоря, невозможна.*

Замечание 1. Из формулировки теоремы видно, что (1.1.16) может выполняться лишь для функций регулярных внутри L_1.

Замечание 2. Отметим, что условиям (1.1.14) и (1.1.15) удовлетворяет, например, функция вида

$$\exp\left\{-\left[\rho^{\frac{\pi}{\beta}}\cdot\lg\frac{1}{\rho}\lg_2\frac{1}{\rho}\cdots\left(\lg_s\frac{1}{\rho}\right)^m\right]\right\}^{-1},\quad m>1.$$

Предыдущие два отрицательных результата дают критерии неполноты функций класса D^* при аппроксимации в среднем и при взвешенно-равномерной аппроксимации.

Доказательство теоремы 1.

Допустим, что некоторая последовательность функций $\{g_n(z)\}\subset D^*$ сходится в среднем в D к функции $f(z)\in D_2$:

$$(1.1.17)\qquad \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(D)}|f(z)-g_n(z)|^2\,dxdy=0$$

Отсюда следует

$$(1.1.18)\qquad \iint\limits_{(D)}|g_n(z)|^2\,dxdy<\text{Const},$$

где Const. зависит только от f(z).

Мы покажим, что из (1.1.17) следует нормальность совокупности $\{g_n(z)\}$ внутри L_1.

Определим на кривой L_k (1.1.5) непрерывную функцию, которая в окрестности $0 \leq \rho \leq a$ точки A равна $T(\rho)$ и постоянна на остальной части L_k. Определенную таким образом функцию также обозначим через $T(\rho)$. Отобразим конформно область D_k на единичный круг $|z'|<1$ так, чтобы точка $z=A$ перешла в $z'=-1$. На z'—плоскости введем полярную систему координат (ρ', φ') с началом в $z'=-1$.

Согласно одной теореме С. Варшавского[7], при условиях (1.1.12) и (1.1.13) ассимптотически

$$(1.1.19) \qquad |z'| \sim |z|^{\frac{\pi}{\beta}}, \qquad \text{когда } z \to 0,$$

$$\text{т. е.} \qquad \varphi \sim \rho^{\frac{\pi}{\beta}}$$

При указанном отображении функция $T(\rho)$ перейдет в функцию $T(z(z'))$, $(|z'|=1)$, которую обозначим через $T_*(\varphi')$ либо $T_*(t)$, где $|t|=1$. Из условий (1.1.14) и (1.1.19) следует существование интеграла

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \log T_* (\varphi')\, d\varphi$$

Построим функцию

$$(1.1.20) \qquad Q_*(z')=\exp\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} \lg T_*(t) \frac{t+z'}{t-z'}\, d\arg t.$$

С другой стороны, если $g(z)$ любая из функций $\{g_n(z)\}$ то из ея определения и из условий (1.1.9) и (1.1.19) следует[8] субгармоничность функции

$$\lg|g(z(z'))|=\lg|g_*(z')| \text{ в } |z'|<1$$

а следовательно и субгармоничность

$$(1.1.21) \qquad \lg|g_* (z')\, Q_*(z')|.$$

---

[7] См. (10.) стр. 330. Условия (1.1.12) и (1.1.13) теоремы 1 по существу не отличаются от условий (19.4.) и (20.2) теоремы XII С. Варшавского.

[8] См., напр., (11), стр. 19—50.

Фиксируем теперь какую либо область S внутри L_{-k_0} $(-1<k_0<k_1<1)$ так чтобы S имела общую часть с областью ограниченной крывыми L_{-k_0} и L_{-1}. Обозначим образ S в $|z'|<1$, при отображении $z'(z)$, через S'. Тогда из субгармоничности функции $\lg|g_*(z)Q_*(z')|$ в $|z'|<1$ следует

$$\lg|g_*(z')Q_*(z')|\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t-z'|=r}\lg\,|g_*(t)Q_*(t)|\,|dt|,$$

где $|t-z'|=r$ некоторая окружность внутри $|z'|<1$.

Из этого неравенства, учитывая связь между средним геометрическим и средним арифметическим, получим

$$|g_*(z')Q_*(z')|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t-z'|=r}|g_*(t)Q_*(t)|\,|dt|.$$

Но не трудно доказать, что если C какая-либо окружность внутри $|z'|\leqslant 1$ и $\varphi(z)$ аналитическая в $|z'|<1$ то[9]

$$\int\limits_{C}|\varphi(t)|\,|dt|\leqslant\int\limits_{|z'|=1}|\varphi(t)|\,|dt|.$$

Применяя это неравенство к $|g_*(z')Q_*(z')|$ получим

$$|g_*(z')Q_*(z')|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}|g_*(t)Q_*(t)|\cdot|dt|.$$

Но из (1.1.20) следует, что функция $Q_*(z')$ в S' удовлетворяет неравенству $|Q_n(z')|>\text{const}=\gamma$, где γ зависит от области S и числа k, характеризующего линию L_k.

Беря достаточно малое значение этой постоянной, можно считать ее независящей от k. Таким образом при $z'\in S'$,

$$|g_*(z')|\leqslant\gamma\int\limits_{|t|=1}|g_*(t)\,Q_*(t)|\,|dt|,$$

[9] Достаточно отобразить конформно область между двумя окружностями на концентрическое кольцо.

$$\text{т.е. } |g_*(z')| \leqslant \gamma \int\limits_{|t|=1} |g_*(t)\, Q_*(t)|\, |dt|$$

Отображая обратно $|z'|<1$ на область D_k, получим, при $z \in S$ и $-k_0<k<1$,

$$(1.1.22) \qquad |g(z)| \leqslant \gamma \int\limits_{L_k} |g(\eta)|\, T(|\eta|)\, |d\eta|$$

Обозначим через L'_k часть контура L_k внутри $|z|<a$ а через L''_k остальную часть. Из (1.1.22) очевидно следует равномерная ограниченность совокупности $\{g_n(z)\}$ на дугах L''_k при $-1<k_0<k_1 \leqslant k \leqslant k_2<1$. Поэтому в S

$$(1.1.23) \qquad |g(z)| \leqslant \gamma \int\limits_{L'_k+L''_k} |g(\eta)|\, T(|\eta|)\, |d\eta| + \gamma_1,$$

γ_1 некоторая постоянная, зависящая только от $f(t), k_1, k_2$, и a.

Рассмотрим область $D_{k_1k_2}$. Введем в двух криволинейных секторах $D'_{k_1k_2}$ и $D''_{k_1k_2}$ криволинейную полярную систему координат, где координатными линиями являются линии L_k и окружности $|z|=\text{const}$, т. е. от переменных (ρ,φ) перейдем к переменным (ρ,k). Функциональный определитель преобразования получим из соотношений (1.1.6).

$$J\begin{pmatrix}\rho,\varphi\\ \rho,k\end{pmatrix} = \Theta_1(\rho) \text{ для } D'_{k_1k_2}$$

и

$$J\begin{pmatrix}\rho,\varphi\\ \rho,k\end{pmatrix} = \Theta_2(\rho) \text{ для } D''_{k_1k_2}$$

поэтому

$$\iint\limits_{D'_{k_1k_2}} |g(z)|^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \iint\limits_{D'_{k_1k_2}} |g(z)|^2 \rho\, \Theta_1(\rho)\, d\rho\, dk$$

$$\iint\limits_{D''_{k_1k_2}} |g(z)|^2 \rho\, d\rho\, dk = \iint\limits_{D''_{k_1k_2}} |g(z)|^2 \rho\, \Theta_2(\rho)\, d\rho\, dk.$$

Но $\rho\theta_1(\rho)=T_1(\rho)$ и $\rho\theta_2(\rho)=T_2(\rho)$, поэтому

$$\iint\limits_{D_{k_1k_2}} |g(z)|\rho d\rho d\varphi=\gamma\iint\limits_{D_{k_1k_2}} |g(z)|^2 T(\rho)d\rho dk<$$

$$<\gamma\iint\limits_{D} |g(z)|^2\, dxdy<\mathrm{const}. \qquad \text{(ср. 1.1.22)}$$

В левой части этого неравенства, при интегрировании по секторам $D'_{k_1k_2}$ и $D''_{k_1k_2}$ надо $T(\rho)$ заменить соответственно $T_1(\rho)$ и $T_2(\rho)$. С другой стороны, из (1.1.23) интегрированием по k получаем при $z\in S$

$$(k_2-k_1)\ |g(z)|\leqslant\gamma\iint\limits_{D_{k_1k_2}} |g(z)|^2T(\rho)d\rho dk+\gamma_1(k_2-k_1)<\mathrm{const}.$$

Следовательно внутри S

$$|g(z)|<\mathrm{const}.$$

Эти оценки мы производим для произвольной функции $g(z)$ из $\{g_{\gamma_i}(z)\}$. Полученное неравенство показывает, что совокупность $\{g_{\gamma_i}(z)\}$ равномерно ограниченно в S. Тем самым первая часть теоремы I доказана, а вторая часть получается отсюда как следствие. В самом деле, если допустить, что $\{g_n(z)\}$ удовлетворяет условию (1.2.1), то $\{g_n(z)\}$ будет сходиться равномерно в любой замкнутой части области D.

Но область S имеет с D общую часть, поэтому из нормальности последовательности $\{g_n(z)\}$, по теороме Стилтьеса, следует ея равномерная сходимость в S. А S выбрано произвольно, поэтому предельная функция $f(z)$ регулярна везде внутри L_1. Для функции $\dfrac{1}{z-\alpha}$, где α внутри L_1, но вне D, равенство (1.2.1) выполняться не может; теорема доказана.

Замечание. Из предыдущего следует, что в области D, метрически описанной в условии теоремы I, полным в классе D_2 может быть лишь семейство таких функций, которые имели бы в целом достаточно быстрый рост в окрестности точки A. Представляет интерес ответить на следующие два вопроса:

Вопрос 1. Указать какую-либо полную в D (теор. I) систему функций регулярных внутри L_1, а если возможно, охарактеризовать класс таких функций.

Вопрос 2. Охарактеризовать класс D^* функций, регулярных в области D, для которых система полиномов полна.

Интересно заметить, что D^* не совпадает с D. В самом деле, пусть D нежорданова область, ограниченная двумя соприкасающимися окружностями. М. В. Келдышем доказано[10], что в классе полиномов $\{P_n(z)\}$

$$\inf \iint_D |e^{\frac{z+1}{z-1}}|^2 \, |e^{\frac{1+z}{1-z}} - P_n(z)|^2 \, dxdy \neq 0.$$

Но так как $\left| e^{\frac{z+1}{z-1}} \right|$ в области D ограничено сверху и снизу положительными константами, то предыдущее неравенство эквивалентно неравенству

$$\inf \iint_D |e^{\frac{1+z}{1-z}} - P_n(z)|^2 \, dxdy \neq 0.$$

И так как $e^{\frac{1+z}{1-z}}$ явно принадлежит классу D_2, то D^* не совпадает с D_2.

Доказательство теоремы II.

Допустим, что (1.1.16) выполняется, тогда вследствие непрерывности f(z) в $\bar{D}$ получаем при $z \in D$

$$q(\rho)\,|g_n(z)| < C, \qquad n=1, 2, \ldots$$

где C зависит только от f(z).

Заменив во всех вычислениях, ведущих к неравенству (1.1.22) функцию $T(\rho)$ функцией $q(\rho)$, мы придем к аналогичному неравенству

---

[10] См. (12) стр. 3-4.

$$|g_n(z)| < \gamma \int\limits_{L_k} |g_n(\eta)|\, q(|\eta|)\, |d\eta|; \qquad z \in S,$$

$$\text{т. е. } |g_n(z)| < \gamma \cdot C \cdot \text{длина } L_k; \qquad z \in S.$$

Так как область S имеет общую часть с областью D, то из последнего неравенства и (1.1.16) вытекает равномерная сходимость последовательности $\{g_n(z)\}$ внутри S, а поэтому и в любой замкнутой совокупности внутри L_1.

Предельная функция $f(z)$ регулярна везде внутри L_1, этим теорема II доказана.

§ 1.2. Приведем еще некоторые признаки неполноты[11] менее точные чем в теоремах *I* и *II*, но применимые к более широкому классу областей.

Для удобства обозначений мы сформулируем эти результаты для областей типа полос. Простым конформным отображением можно получить аналогичные результаты и для областей типа предыдущего параграфа.

Обозначения

a) $B_{-1,1}$ область, ограниченная кривыми L_{-1} и L_1, которые определены уравнениями

$$y_{-1}(x) = f_{-1}(x) \text{ и } y_1(x) = f_1(x),$$

где $f_{-1}(x)$ и $f_1(x)$ однозначные непрерывные в промежутке $(-\infty; +\infty)$ функции с кусочно-непрерывными производными и везде $f_1(x) > f_{-1}(x)$,

b) $$\Delta(x) = f_1(x) - f_{-1}(x)$$

c) L_0 кривая с уравнением $y_0(x) = \dfrac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2}$

d) L_k кривая с уравнением

(1.2.1) $$y_k(x) = y_0(x) + k\Delta(x), \quad -1 \leqslant k \leqslant 1;$$

e) $B_{k_1 k_2}$ полоса, ограниченная кривыми L_{k_1} и L_{k_2}

---

[11] См. (8).

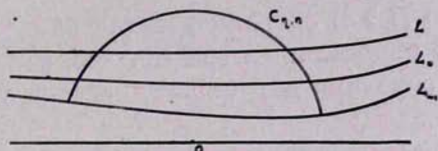
f) $\alpha_k(x)$ угол, составленный касательной к $y_k(x)$ с положительным направлением оси ох.

На крывых L_k устанавливаем положительное направление в сторону возрастающих абсцисс.

Пусть функции $\{f_{\eta}(z)\}$, определяемые значениями индекса η, регулярны везде слева от L_{-1} и непрерывны вплоть до L_{-1} за исключением, может быть, точки $z=\infty$.

К классу B_2^* относим функции $\{f_{\eta}(z)\}$ регулярные слева от L_{-1} и удовлетворяющие следующим условиям:

1) для каждой функции $f_{\eta}(z)$ этого семейства можно указать последовательность чисел $r_{\eta,1}<r_{\eta,2}<\ldots<r_{\eta,n}\to\infty$ и постоянную для всего семейства константу $p(0<p<1)$ такие, что на круговых дугах $C_{\eta,n}$ окружностей $|z|=r_{\eta,n}$ слева от L_{-1} выполняются неравенства



Черт. 2.

$$|f_{\eta}(z)|<e^{|z|^p}; \qquad p<1. \tag{1.2.2}$$

2) Существуют интегралы

$$\iint\limits_{B_{-1,1}} |f_{\eta}(z)|^2\, dxdy.$$

Наконец B_2 означает класс функций $f(z)$ регулярных в $B_{-1,1}$ и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{B_{-1,1}} |f(z)|^2\, dxdy<\infty.$$

Теорема III. Если область $B_{-1,1}$ *удовлетворяет условиям*

$$(1.2.3) \qquad \lim_{|x|\to\infty} \operatorname{Sup} \frac{\ln \ln \sec\alpha}{\ln |x|} = m < 1,$$

на кривых L_{-1} и L_1

$$(1.2.4) \qquad \lim_{|x|\to\infty} \operatorname{Sup} \frac{\ln \ln \frac{1}{\Delta(x)}}{\ln|x|} = s < 1.$$

и при всех η *функции* $\{f_\eta(z)\}$ *из класса* B_2^* *удовлетворяют неравенству*

$$(1.2.5) \qquad \iint_{(B_{-1,1})} |f_\eta(z)|^2 \, dxdy < M,$$

где M*—постоянная, не зависящая от индекса* η, *тогда семейство* $\{f_\eta(z)\}$ *нормальна везде в части плоскости слева от* L_{-1}. *При условиях (1.2.3) и ((1.1.4) в области* $B_{-1,1}$ *семейство* B_2^* *не полна.*

Условием (1.2.3) оргграничивается близость направления полосы к направлению оси оу, что, как увидим, существенно необходимо для справедливости теоремы в ее общности.

Для доказательства достаточно выявить равномерную ограничность функций $\{f_\eta(z)\}$ в произвольной конечной части z—плоскости, слева от L_{-1}. И так как вследствие условия (1.2.5) семейство $\{f_\eta(z)\}$ заведомо нормально внутри $B_{-1,1}$, то достаточно доказать его равномерную ограниченность в области Q_{r_0} ограниченной дугой L'_{k_1}, кривой L_{k_1} $(-1<k_1<1)$, и дугой окружности $|z|=r_0$, при любом r_0. Применим к области, ограниченной дугой L'_k кривой L_k $(-1<k<k_2<k_1<-1)$ и дугой окружности $C_{\eta,n}$ формулу Коши, считая n настолько большим чтобы Q_{r_0} находилось строго внутри этой области.

Для любого z в Q_{r_0} имеем

$$f_\eta(z)e^{-\varepsilon z^{p'}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L'_k} \frac{f_\eta(t)e^{-\varepsilon t^{p'}}dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\eta,n}} \frac{f_\eta(t)e^{-\varepsilon t^{p'}}dt}{t-z}$$

$$(|\varepsilon|=1, \ p<p'<1).$$

Учитывая условия (1.2.2) и неравенство $\rho<\rho<1$ подберем ε так чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{C_{\gamma_j,n}}\frac{f_{\gamma_j}(t)e^{-\varepsilon t^{\rho'}}}{t-z}\,dt=0.$$

При достаточно большом n

$$|f_{\gamma_j}(z)e^{-\varepsilon z^{\rho'}}|<1+\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L'_k}\frac{f_{\gamma_j}(t)e^{-\varepsilon t^{\rho'}}}{t-z}\,dt\right|.$$

Обозначив расстояние области Q_{r_0} до кривой L'_{k}, через δ, получим:

$$|f_{\gamma_j}(z)e^{-\varepsilon t^{\rho'}}|<1+\frac{1}{2\pi\delta}\int\limits_{L'_k}|f_{\gamma_j}(t)e^{-\varepsilon t^{\rho'}}|\cdot|dt|.$$

По неравенству Буняковского-Шварца

$$(1.2.6)\qquad \{|f_{\gamma_j}(z)e^{-\varepsilon z^{\rho'}}|-1\}^2\leqslant\int\limits_{L'_k}|f_{\gamma_j}(t)|^2|e^{-\varepsilon t^{\rho'}}|\,|dt|\cdot\int|e^{-\varepsilon t^{\rho'}}|\,|dt|.$$

На L_k: $$|dt|=\left|\frac{dt}{dx}\right|\,|dx|=\sec\alpha_k\,|dx|$$

Считая $1>\rho'>\max\{\rho, m, s\}$, получим

$$(1.2.7)\qquad \int\limits_{L'_k}|e^{-\varepsilon t^{\rho'}}|\,|dt|<\int\limits_{L_k}\cdots\cdots<\mathrm{const}=q, \text{ и}$$

$$|e^{-\varepsilon t^{\rho'}}|\,|dt|\leqslant|e^{-\varepsilon t^{\rho'}}|\sec\alpha_k|dx|<e^{-|t|^{\rho''}}|dx|$$

где $$\max\{\rho, m, s\}<\rho''<\rho'<1.$$

Последние неравенства выполняются для достаточно больших $|x|$, но, не ограничивая общности, можно пользоваться ими везде на L_k.

Учитывая неравенства (1.2.7), умножив обе части

(1.2.6) на dk и интегрируя в пределах от $k=-1$ до $k=k_2$, получим

$$(1.2.8)\qquad \{|f_\eta(z)e^{-\varepsilon z^{p'}}|-1\}^2 \leqslant \text{const} \iint\limits_{(B_{-1,1})} |f_\eta(t)|^2 e^{-|t|^{p''}} dx\, dk.$$

С другой стороны, перейдя в интеграле $\iint\limits_{(B_{-1,1})} |f_\eta(t)|^2 dxdy$

к переменным x и k, посредством соотношений

$$x=x, \qquad y=y_0(x)+k\Delta(x),$$

получим

$$(1.2.9)\qquad \iint\limits_{(B_{-1,1})} |f_\eta(t)|^2\, dxdy = \iint\limits_{(B_{-1,1})} |f_\eta(t)|^2 \Delta(x) dxdk.$$

Учитывая (1.2.4) и неравенство $\max\{p,m,s\}<p''<p'<1$, получим.

$$\iint\limits_{B_{-1,k_2}} |f_\eta(t)|^2\, e^{-|t|^{p''}} dxdk < \iint\limits_{B_{-1,k_2}} |f_\eta(t)|^2\, dxdy < M,$$

где М-постоянная неравенства (1.2.5). Окончательно в области Q_{r_0}

$$|f_\eta(z)e^{-\varepsilon z^{p'}}| < \text{const}, \text{ т. е. } |f_\eta(z)| < \text{const}.$$

где const. не зависит от η и положения точки z в Q_{r_0}.

Этим доказана первая часть утверждения теоремы II. Вторая часть теоремы следует из первой части. В самом деле, допустим, что система B_2^* полна в $B_{-1,1}$. Тогда для любой функции $f(z)\in B_2$ существует $\{f_n(z)\}\in B_2^*$ такая, что

$$(1.2.10)\qquad \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{B_{-1,1}} |f(z)-f_n(z)|^2\, dxdy = 0.$$

Отсюда следует равномерная сходимость $\{f_n(z)\}$ в любой замкнутой подобласти $B_{-1,1}$ и

$$\iint\limits_{B_{-1,1}} |f_n(z)|^2 dxdy < M,$$

где M не зависит от n. Согласно предыдущему $\{f_n(z)\}$ нормальна везде слева от L_{-1} и так как она равномерно сходится в некоторой области, то $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно в любой замкнутой области слева от L_{-1}.

Предельная функция будет регулярна во всей верхней полуплоскости. В частности для $\frac{1}{z-\alpha}$, где α выше области $B_{-1,1}$, равенство (1.2.10) выполняться не может, так как пришли бы к противоречию. Теорема III доказана.

Для полуполосы теорема аналогичная теореме III получится, если условия (1.2.3) и (1.2.4) заменить условиями

$$(1.2.3) \qquad \lim_{|x|\to\infty} \sup \frac{\ln \ln \sec\alpha}{\ln|x|} = m < \frac{1}{2}$$

$$(1.2.4) \qquad \lim_{|x|\to\infty} \sup \frac{\ln\ln \frac{1}{\Delta(x)}}{\ln |x|} = s < \frac{1}{2}.$$

Ход доказательства этой теоремы существенно не отличается от предыдущего, поэтому его не приводим.

Пусть теперь L простая кривая Жордана в верхней полуплоскости, заданная уравнениями

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

причем $\lim\limits_{t\to 1} x(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to +0} x(t) = -\infty$.

L делит плоскость на две области. Обозначим через D_α ту из этих областей которая лежит в верхней полуплоскости.

Пусть $\{g_\eta(z)\}$ семейство функций регулярных в D_α, непрерывных вплоть до L и каждая из них удовлетворяет неравенству (1.2.2) на последовательности круговых дуг в D_α, с бесконечно возрастающими радиусами.

Теорема IV. Если при весовой функции $q(z)>0$ *определенной и непрерывной на* L, *удовлетворяющей соотношению*

$$(1.2.11) \qquad p<\limsup_{|z|\to\infty}\frac{\ln\ln 1/q(z)}{\ln|z|}=s<1,$$

p *число фигурирующее в неравенстве* (1.2.2), *и для функции* $f(z)$ *непрерывной на* L *выполняется соотношение*

$$(1.2.12) \qquad \sup_{n\to\infty} q(z)\ |f(z)-g_n(z)|\to 0,$$

для некоторой последовательности $\{g_n(z)\}$, *принадлежащей семейству* $\{g_\eta(z)\}$, *то* $f(z)$ *регулярна в* D_α.

В самом деле из (1.2.11) следует, при достаточно большом $|z|$

$$|q(z)|>e^{-|z|^{p'}}$$

где $p<p'<1$ с другой стороны, из (1.2.12)

$$|q(z)g_n(z)|<\text{const} \qquad (n=1, 2, \ldots) \text{ на } L.$$

Составим функцию

$$\varphi(z)=e^{iz^{p'}}g_n(z).$$

Из всех предыдущих условий следует $|\varphi(z)|<\text{const}$. в D_α, где Const. зависит только от $f(z)$.

И так как по условию (1.2.12) последовательность (1.2.12) сходится равномерно на любой конечной дуге кривой L, то из $|\varphi(z)|<C$ следует равномерная сходимость $\{g_n(z)\}$ в любой конечной части замкнутой области D_α, и поэтому $f(z)$ регулярна везде в D_α.

В заключение заметим, что *все предыдущие теоремы I—IV, дающие признаки неполноты некоторых классов аналитических функций, конформным преобразованием областей, фигурирующих в этих теоремах, могут быть перенесены на области в достаточной степени произвольные.*

Наконец, интересто отметить, что условия (1.1.12), (1.1.13) и (1.1.14) в теореме I и условия (1.2.3), (1.2.4) теоремы III в некотором смысле предельно точные. Что замена условия (1.1.14) условием

$$\int\limits_0^a \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \lg T_1(\rho) d\rho = -\infty,$$

а (1.2.4) условием

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf \frac{\ln\ln \dfrac{1}{\Delta(x)}}{\ln |x|} > 1.$$

может привести к противоположным результатам, будет доказано в последующем изложении (теоремы V и VI).

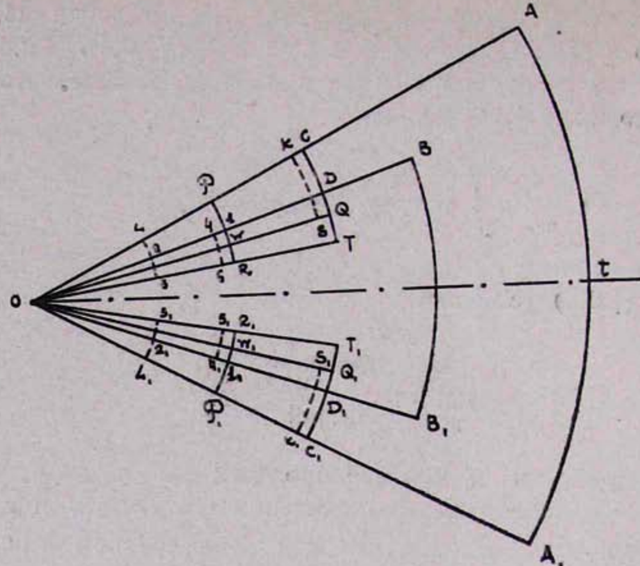
Здесь мы покажем, что при совершенном исключении условий (1.1.12) и (1.1.13) теорема I, вообще говоря, неверна. Для этого достаточно построить область, топологически эквивалетную области D (теор. I), в которой некоторая система полиномов удовлетворяла бы равенству

$$\inf \iint\limits_D \left| \frac{1}{z-\alpha} - P_n(z) \right|^2 dxdy = 0,$$

где α афикс некоторой точки внутри кривой L_{-1}. Система таких полиномов, очевидно, будет удовлетворять в области D неравенству

$$\iint\limits_D |P_n(z)|^2 \, dxdy < \text{const}.$$

Но нормальной внутри L_1 такая система быть не может, так как их предельная функция $\frac{1}{z-\alpha}$ имеет особенность внутри L_1. Область D построим последовательными приближениями.



Черт. 3.

Проведем из начала координат полярные радиусы ot, OQ, OB, OA, и OT_1, OQ_1, OB_1, OA_1 с углами наклона $\frac{\beta}{8}$, $\frac{\beta}{4}$, $\frac{3\beta}{8}$, $\frac{\beta}{2}$ и $-\frac{\beta}{8}$, $-\frac{\beta}{4}$, $-\frac{3}{8}\beta$, $-\frac{\beta}{2}$ (см. черт. 3). Дальнейшее построение указываем на чертеже. $OA=1$, $OB=\frac{3}{4}$, $OC=\frac{1}{2}$, $OP=\frac{1}{4}$, $OL=\frac{1}{8}$.

Обозначим через Δ'_1 совокупность, состоящую из фигур $CDBB_1D_1C_1A_1A$, OPWQT и $OP_1W_1Q_1T_1$. Так как Δ'_1 состоит из одной отдельной области и из двух областей с одной общей граничной точкой O, то для такой совокупности областей возможно подобрать полином $P_1(z)$ так чтобы[12]

$$\iint\limits_{\Delta'_1} \left| \frac{1}{z-{}^5/_8} - P_1(z) \right|^2 dxdy < \frac{1}{2}.$$

Фиксируем полином $P_1(z)$ и присоединяем к Δ'_1 достаточно

[12] См. (5).

узенькие полоски KCQS и $K_1C_1Q_1S_1$ так, чтобы в полученной таким образом области Δ_1

$$\iint\limits_{\Delta_1} \left| \frac{1}{z-{}^5/_8} - P_1(z) \right|^2 dxdy < 1.$$

Δ_1 является первым приближением области D, которая будет находиться внути Δ_1'.

Для построения второго приближения Δ_2, отделим от Δ_1 область $WSKAA_1K_1SW_1R_1T_1DB_1DTRW$ и присоединим к этой области фигуру OP 1 2 3 0 и симетричную ей фигуру в нижней полуплоскости. Полученную таким образом совокупность трех областей обозначим через Δ_2'.

Подберем полином $P_2(z)$ так, чтобы

$$\iint\limits_{\Delta_2'} \left| \frac{1}{z-{}^5/_8} - P_2(z) \right|^2 dxdy < \frac{1}{4}.$$

Фиксируем $P_2(z)$ и присоединяем к Δ_2' достаточно узенькие полоски 4 1 W 5 и , $4_1\,1_1\,W_1\,5_1$ так, чтобы в полученной таким образом односвязной области Δ_2

$$\iint\limits_{\Delta_2} \left| \frac{1}{z-{}^5/_8} - P_2(z) \right|^2 dxdy < \frac{1}{2}$$

Область $\Delta_2 + \Delta_1'$ является вторым приближением искомой области D. Продолжая таким путем построение дальнейших приближений, мы получим последовательность областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots, \Delta_n, \ldots$ и совокупность полиномов $\{P_n(z)\}$ таких что

$$\iint\limits_{\Delta_n} \left| \frac{1}{z-{}^5/_8} - P_k(z) \right|^2 dxdy < \frac{1}{k}.$$

при $k \leqslant n$. Искомая область будет $D = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, так как в D

$$\iint\limits_{D} \left| \frac{1}{z-{}^5/_8} - P_k(z) \right|^2 dxdy < \frac{1}{k}$$

и потому

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D} \left| \frac{1}{z-{}^5/_8} - P_k(z) \right|^2 dxdy = 0.$$

Аналогичным образом можно построить область, которая не удовлетворяла бы условию (1.2.3) теремы III и где некоторая система полиномов, удовлетворяя условию (1.2.5), была бы, однако, неполной.[13]

§ 1.3.

Введем следующие обозначения

Δ_0 область, ограниченная окружностью $C_1(|z|=1)$ и окружностью C_2: $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}$.

Δ подобласть области Δ_0 с кратной граничной точкой также в $z=-1$.

Если B произвольная конечная область, через B_∞ будем обозначать дополнительную относительно B связную компоненту содержащую точку $z=\infty$; $\bar{B}$-замыкание области B;

$\rho=|z+1|$;

$T(\rho)$ линейная мера дуг, отсекаемых областью Δ на $|z+1|=\rho$.

Теорема V. Для любой $f(z)\in N(\Delta)$ ***можно подобрать последовательность полиномов*** $\{P_n(z)\}$, ***так чтобы в замкнутой области*** $\bar{\Delta}$

$$(1.3.1)\qquad \sup_{n\to\infty} e^{-\frac{p}{\rho}|\lg\rho|}|f(z)-P_n(z)|\to 0,$$

где p ***некоторая достаточно большая постоянная.***

Теорема VI. При

$$T(\rho)< e^{-\frac{p}{\rho}|\lg\rho|}$$

для любой $f(z)\in\Delta_2$ ***в классе полиномов*** $\{P_n(z)$ ***возможна аппроксимация***

$$(1.3.2)\qquad \inf\iint_{\Delta}|f(z)-P_n(z)|^2\,dxdy=0.$$

---

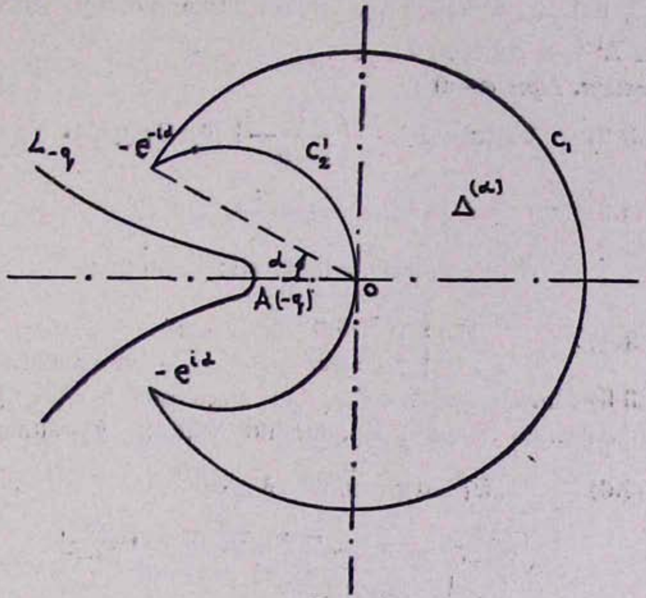
[13] Такую область можно построить, изменив незначительно одну конструкцию, сделанную нами в другом месте (Ср. 5), стр. 286—288.

Невозможность существенного уточнения этих теорем следует из теорем II и I.

Доказательство теоремы V.

При доказательстве применяем интерполяционные методы, опираясь на одну геометрическую лемму; переходим к формулировке и доказательству этой леммы.

Пересечем единичную окружность с окружностью C'_2 радиуса $\frac{\operatorname{Sec}\alpha}{2}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ и с центром в точке $-\frac{\operatorname{Sec}\alpha}{2}$ (черт. 4).



Черт. 4.

Область, ограниченную дугами окружностей C_1 и C'_2 обозначим через $\Delta^{(\alpha)}$.

Исследуем поведение линии L_{-q} функции Грина области $\Delta^{(\alpha)}_{\infty}$ с полюсом в $z=\infty$, проходящую через фиксированную точку $A(-q,0)$ $(0<q<1)$.

Отобразим $\Delta^{(\alpha)}_{\infty}$ на $|w|>1$, нормируя отображающую функцию $w=w(z)$ по условию $w(\infty)=\infty$. Получаем

$$(1.3.1)\qquad W=\frac{e^{i\frac{\pi\alpha}{2\pi-\alpha}}\left(\frac{z+e^{-i\alpha}}{z+e^{i\alpha}}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}-e^{-i\frac{\pi\alpha}{2\pi-\alpha}}}{e^{i\frac{\pi\alpha}{2\pi-\alpha}}\left[\left(\frac{z+e^{-i\alpha}}{z+e^{i\alpha}}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}-1\right]}$$

Пусть $\delta_{-q}(\alpha)$ радиус окружности на W-плоскости, соответствующий линии уровня L_{-q} при отображении (1.3.1).

Обозначим через γ_{12} расстояние между линиями уровней L_{-q_1} и L_{-q_2}, а через γ_{10} расстояние между контуром области $\Delta^{(\alpha)}$ и линией L_{-q}.

Лемма. При $\alpha\to 0$

$$(1.3.2)\qquad \delta_{-q}(\alpha)=1+\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)\vartheta_1;\ 0<q<1.$$

$$(1.3.3)\qquad \delta_{-1}(\alpha)=1+\frac{\alpha}{2}\vartheta_2$$

где

$$\lim_{\alpha\to 0}\vartheta_1=\lim_{\alpha\to 0}\vartheta_2=1;$$

$$(1.3.4)\qquad \begin{cases}\gamma_{12}>m\alpha^4\\ \gamma_{10}>m\alpha^4\end{cases}\qquad m=\text{const}.$$

(1.3.5) *Линия уровня* L_{-q} *не заходит в круг* $|z|<1$.

Доказательство леммы. Уравнение линии уровня L_{-q} будет

$$(1.3.6)\qquad |W(-q)|=\text{const}=\delta_{-q}(\alpha)=$$

$$=\left|\frac{e^{i\frac{\pi\alpha}{2\pi-\alpha}}\left(\frac{-q+e^{-i\alpha}}{-q+e^{i\alpha}}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}-e^{i\frac{\pi\alpha}{2\pi-\alpha}}}{\left(\frac{-q+e^{-i\alpha}}{-q+e^{i\alpha}}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}-1}\right|$$

но $\dfrac{-q+e^{-i\alpha}}{-q+e^{i\alpha}}=e^{(2\pi-2\beta)i}$ (см. черт. 4),

где $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-q}$. Из последнего соотношения следует

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1}{1-q}$, т. е.

$$(1\cdot3\cdot7)\qquad \beta=\frac{\alpha\vartheta}{1-q},\qquad \lim_{\alpha\to0}\vartheta=1.$$

Из (1.3.6)
$$\delta_{-q}(\alpha)=\frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}\,[\alpha+\pi-\beta]\right\}}{\sin\frac{\pi}{2\pi-\alpha}(\pi-\beta)}.$$

Учытывая равенство (1.3.7), получаем

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\delta_{-q}(\alpha)-1}{\alpha^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q}-1\right),$$

т. е. равенство (1.3.2) леммы.

Уравнение линии уровня $L_{-1}(\alpha)$ будет

$$|W(-1)|=\text{const}=\delta_{-1}(\alpha)=$$

$$=\left|\frac{e^{i\frac{\pi\alpha}{2\pi-\alpha}}\left(\frac{-1+e^{-i\alpha}}{-1+e^{i\alpha}}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}-e^{-i\frac{\pi\alpha}{2\pi-\alpha}}}{\left(\frac{-1+e^{-i\alpha}}{-1+e^{i\alpha}}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}-1}\right|$$

но $\dfrac{-1+e^{-i\alpha}}{-1+e^{i\alpha}}=-e^{-i\alpha}$, поэтому

$$\delta_{-1}(\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2\pi-\alpha}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi-\alpha}{2\pi-\alpha}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi-\alpha}{2\pi-\alpha}}$$

а отсюда

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\delta_{-1}(\alpha)-1}{\alpha}=\frac{1}{2}.$$

Это есть пункт (1.3.3) леммы.

Пусть $z=z(w)$ функция обратная относительно $w=w(z)$ см. (1.3.1); $z(w)$ отображает $|w|>1$ на $\Delta_\infty^{(\alpha)}$.

В окрестности точки $w=\infty$

$$z(w)=z'(\infty)w+\frac{\alpha_{-1}}{w}+\ldots\ldots$$

Для доказательства неравенств (1.3.4) применим неравенство Löwner'a.[14]

$$|z'(\infty)|\left\{1-\frac{1}{|w|^2}\right\}\leqslant|z'(w)|\leqslant\frac{|z'(\infty)|}{1-\frac{1}{|w|^2}}$$

Пусть минимальное расстояние γ_{12} линий уровней L_{-q_1}, L_{-q_2} достигается для пары точек $z_1\in L_{-q_1}$ и $z_2\in L_{-q_2}$, $|z_1-z_2|=\gamma_{1,2}$. Обозначив w_1 и w_2 точки, соответствующие z_1 и z_2, при отображении $w=w(z)$, получим

$$\gamma_{12}=|z_1-z_2|=\int\limits_{w_1}^{w_2}|z'(w)|\ |dw|,$$

где за путь интегрирования $(w_1;\ w_2)$ выбран образ прямолинейного отрезка $(z_1,\ z_2)$. Из неравенства Löwner'a следует

$$\gamma_{12}>|z'(\infty)|\left(1-\frac{1}{\delta^2_{-q_2}}\right)\int\limits_{w_1}^{w_2}|dw|>$$

$$>|z'(\infty)|\left(1-\frac{1}{\delta^2_{-q_1}}\right)(\delta_{-q_1}-\delta_{-q_2}).$$

При $\alpha\to0$, $\delta_{-q_1}\to1$, $\delta_{-q_2}\to1$ а $|z'(\infty)|$ ограничено и сверху и снизу положительными константами. Поэтому, учитывая оценку (1.3.2) для δ_{-q_1} и δ_{-q_2}, получим (1.3.4). Для доказательства последнего утверждения леммы, достаточно показать, что любая окружность, проходящая черечь точки $-e^{-i\alpha}$, $e^{i\alpha}$ пересекать любую линию L_{-q} не более, чем в двух точках. В самом деле, в противном случае, если бы линия уровня L_{-1} проходила

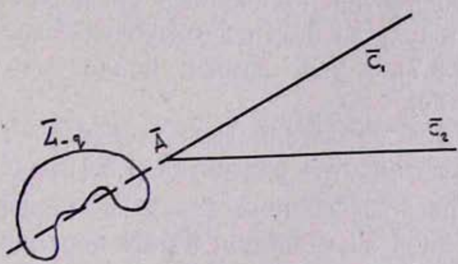
[14] См. (13).

внутрь единичного круга $|z|<1$, то она, вследствие симметричности, имела бы с $|z|=1$ более двух общих точек, т. к. $z=-1$ уже является их точкой пересечения.

Предварительно перейдем на z^* и w^*—плоскости посредством преобразований

$$z^*=\frac{z+e^{-i\alpha}}{z+e^{i\alpha}};\quad w^*=\frac{w-e^{-2\pi i\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}}}{w-1}$$

При этом $|w|=\text{Const}$. окружности перейдут в некоторые окружности на w^*—плоскости; линии уровня L_{-q} на z—плоскости перейдут в линии $\bar{L}_{-q}$, z^*—плоскости. Окружности, проходящие через $-e^{-i\alpha}$ и $-e^{i\alpha}$, преобразуются в полярные лучи, проходящие через точку $\bar{A}(z^*=0)$.



Черт. 5.

Обозначим через a афикс центра w^*-окружности, которая соответствует линии $\bar{L}_{-q}$ (черт. 5). Очевидно, наше утверждение о числе точек пересечения окружностей, проходящих через $-e^{-i\alpha}$ и $-e^{i\alpha}$, с линиями уровней L_{-q} эквивалентно утверждению, что уравнение

$$(1{\cdot}3{\cdot}7)\qquad \frac{\partial \arg z^*}{\partial \arg(w^*-a)}=0;\ (|w^*|=\text{const.})$$

обращается в нуль не более двух раз на любой линии уровня.

$$\frac{\partial \arg z^*}{\partial \arg (w^*-a)}=\mathrm{Jm}\frac{\partial \lg z^*}{\partial a \operatorname{rg}(w^*-a)}=\mathrm{Jm} i(w^*-a)\frac{d \lg z^*}{d w^*}.$$

Но из (1.3.1) $z^*=(w^*)^{2-\frac{\alpha}{\pi}}$,

поэтому $$\frac{\partial \arg z^*}{\partial \arg(w^*-a)}=\mathrm{Jm}\left(2-\frac{\alpha}{\pi}\right) i \frac{w^*-a}{w^*}.$$

Обозначим $w^*=u+iv$, $a=m+in$, тогда

$$\frac{\partial \arg z^*}{\partial \arg(w^*-a)}=\mathrm{const}\cdot \mathrm{Reel}\left\{1-\frac{m+in}{u+iv}\right\}.$$

Уравнение (1.3.7) принимает вид $u^2+v^2-mu-nv=0$. С другой стороны, $w^*=u+iv$ лежит на окружности с центром в точке a, поэтому $(u-m)^2+(v-n)^2=\mathrm{Const}$.

Решая совместно полученные уравнения, найдем на каждой линии L_{-q} не более двух точек, удовлетворяющих уравнению (1.3.7), и там самым последнее утверждение леммы доказано.

Вернемся к доказательству теоремы V. Постановку задачи о доказательстве равенства (1.3.1) можно упростить. Для этого преобразованием $z'=\sqrt{z}$ перейдем на плоскость переменной z'. Функция $f(z)\in N$ перейдет в функцию $f(z'^2)$ непрерывную в некоторой замкнутой Жордановой области Δ'. По теореме J.L.Walsh'a[15] эту функцию можно в замкнутой области $\bar{\Delta}'$ равномерно аппроксимировать полиномами $\{Q_n(z')\}$

$$\sup_{z'\in\bar{\Delta}}|f(z'^2)-Q_n(z')|\to 0$$

или

$$\sup_{z\in\bar{\Delta}}|f(z)-Q_n(\sqrt{z})|\to 0.$$

Отделив в $Q_n(\sqrt{z})$ четные и нечетные степени, мы видим что (1.3.1) будет доказана для любых $f(z)\in N$, если доказать ее для одной функции $f_0(z)=\sqrt{z}$.

[15] См. напр. (3), стр. 36—37.

Из аналогичных, соображений, с применением теоремы о возможности аппроксимации в среднем в Жордановой области[16], следует, что при доказательстве теоремы V достаточно доказать ее для функции $\frac{1}{\sqrt{z}}$.

За полином, аппроксимирующий $\sqrt{z}$ в области Δ, возьмем интерполяционный полином $J_n(z)$ с простыми узлами $z_1, z_2, z_3, \ldots$, на контуре C_1, C'_2 области Δ^α, причем расположим их так, чтобы при отображении $\Delta_\infty^{(\alpha)}$ на $|w|>1$ (1.3.1) они перешли в точки $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ равномерно расположенные на $|w|=1$.

Разность $R_n(z)=\sqrt{z}-J_n(z)$ остаточный член интерполяции представим в виде[17]

$$(1.3.8) \qquad R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{-1/2}}\frac{A_n(z)}{A_n(t)}\,\frac{\sqrt{t}}{t-z}\,dt,$$

где $A_n(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}(z-z_k)$. За контур интегрирования берем при всех α линию уровня $L_{-1/2}$.

Оценим $|R_n(z)|$ в замкнутой области ограниченной контуром $L_{-1/4}$, при $\alpha\to 0$. Предварительно оценим $|A_n(z)|$, $|A_n(t)|$, $\left|\frac{A_n(z)}{A_n(t)}\right|$.

Обозначив $z=\varphi(w)$ функцию, отображающую конформно $|w|>1$ на $\Delta_\infty^{(\alpha)}$ и $\{w_k\}$ равномерно распределенные на $|w|=1$ точки соответствующие точкам $\{z_k\}$, получим, следуя L.Fejer'y[18]

$$\lim_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{|A_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lg|\varphi(w)-\varphi(w_k)|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lg|\varphi(w)-\varphi(e^{i\vartheta}|\,dt=$$

---

[16] См. (2), либо (3), стр. 44-46

[17] См. напр. (3), стр. 50, либо (14) стр. 82—84.

[18] См. (15) либо (3), стр. 72—74.

$$=\mathrm{Reel}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t'|=1} \lg\frac{\varphi(w)-\varphi(t')}{w-t'}\,\frac{dt'}{it'}+\mathrm{Reel}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t'|=1}\lg(w-t')\frac{dt'}{it'},$$

где $$|w|=\rho_{-1/_4}>1,\ t'=e^{i\vartheta},\ d\vartheta=\frac{dt'}{it'};$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{|A_n(z)|}=\mathrm{Reel}\,\{\lg\varphi'(\infty)+\lg w\}=\lg|\varphi'(\infty)\rho_{-1/_4}|.$$

Аналогичным образом получаем

$$\lim_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{|A_n(t)|}=\lg|\varphi'(\infty)|\rho_{-1/_2}.$$

Оценим при фиксированном n близость интегральных сумм $\lg\sqrt[n]{|A_n(z)|}$ и $\lg\sqrt[n]{|A_n(t)|}$ к соответствующим интегралам

$$\lg|\varphi'(\infty)\delta_{-1/_4}|\ \text{и}\ \lg|\varphi'(\infty)\rho_{-1/_2}|.$$

Известно[19], что если f(x) функция ограниченной вариации на [0,1], то

$$\left|\int\limits_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{v}{n}$$

где v—полная вариация функции f(x) на [0,1].

Применяя эту оценку в нашем случае, получим

$$\left|\frac{1}{n}\lg|A_n(z)|-\lg|\varphi'(\infty)\rho_{-1/_4}|\right|<\frac{v_1}{n},$$

$$\left|\frac{1}{n}\lg|A_n(t)-\lg|\varphi'(\infty)\rho_{-1/_4}|\right|<\frac{v_2}{n},$$

где v_1 и v_2 максимумы полных вариаций функций $\lg|z-z'|$ и $\lg|t-z'|$ когда z' пробегает контур (C_1, C_2^1), а z и t соответственно контура $L_{-1/_4}$ и $L_{-1/_2}$. Но, очевидно, при фиксированном z на $L_{-1/_4}$ и переменном t на C_1, C_2^1, $|z-z'|$, а следовательно и $\lg|z-z'|$ достигают на (C_1, C_2^1) не бо-

[19] См. (16), стр. 58 Задача № 9

лее трех раз максимальных и трех раз минимальных значений, поэтому C_1, C'_2 можно разбить на шесть дуг, на которых $\lg|z-z'|$ меняется монотонно. $\operatorname{Var}\log|z-z'|$ на одной дуге монотонности не больше чем $\lg d-\lg\delta_{10}=$ $=\lg\frac{d}{\delta_{10}}$, где d диаметр линии $L_{-1/4}$; поэтому при достаточно малых α, полная вариация по всему контуру

$$V_1=\operatorname{Var}\log|z-z'|<6\lg\frac{3}{\delta_{10}};$$

аналогично

$$V_2<6\lg\frac{3}{\delta_{20}}.$$

Но $\delta_{10}>m\alpha^4$, $\delta_{20}>m\alpha^4$, где m абсолютная постоянная, поэтому окончательно

$$(1.3.9)\qquad \begin{cases} \left|\frac{1}{n}\lg|A_n(z)|-\lg|\rho_{-1/4}\varphi'(\infty)|\right|<\frac{\beta}{n}\lg\frac{1}{\alpha} \\ \left|\frac{1}{n}\lg|A_n(t)|-\lg|\rho_{-1/2}\varphi'(\infty)|\right|<\frac{\beta}{n}\lg\frac{1}{\alpha}, \end{cases}$$

здесь β некоторая постоянная не зависящая от α и n.

Из (1.3.9) $\left|\frac{A_n(z)}{A_n(t)}\right|<\left(\frac{\rho_{-1/4}}{\rho_{-1/2}}\right)^n e^{2\beta\lg\frac{1}{\alpha}}$

Учитывая равенство (1.2.4), при достаточно малом α, получим

$$\left|\frac{A_n(z)}{A_n(t)}\right|<\frac{(1-\alpha^2)^n}{\alpha^{2\beta}}=\frac{e^{n\lg(1-\alpha^2)}}{\alpha^{2\beta}};$$

но $\lg(1-\alpha^2(<-\alpha^2$, поэтому

$$(1.3.10)\qquad \left|\frac{A_n(z)}{A_n(t)}\right|<\frac{e^{-n\alpha^2}}{\alpha^{2\beta}}$$

Для $z \in L_{-1/4}$ и $t \in L_{-1/2}$ получаем из (1.3.8)

$$|R_n(z)| < \frac{e^{-n\alpha^2}}{\alpha^{2\beta}} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{\text{длина}\, L_{-1/2}}{m\alpha^4}$$

Но путем перехода на плоскости $z^* = \dfrac{1}{z-\dfrac{1}{2}}$ и $w^* = \dfrac{1}{w}$ и применением теоремы G. H. Hardy о возрастании средних значений аналитических функций[20] не трудно доказать ограниченность длин $L_{-1/2} = \int\limits_{|w|=\rho_{-1/2}} |\varphi'(w)|\; |dw| < \text{const.}$.

Окончательно

$$(1.3.11) \qquad |R_n(z)| < \frac{e^{-n\alpha^2}}{\alpha^{2\beta+2}}, \quad z \in L_{-1/4}.$$

Выберем теперь n настолько большим чтобы в замкнутой области ограниченной линией $L_{-1/4}$

$$(1.3.12) \qquad e^{-n\alpha^2-(2\beta+2)\lg\alpha}\cdot \text{const} < \alpha;$$

фиксировав это значение n, оценим разность $|R_n(z)| = |\sqrt{z} - P_n(z)|$ вне $L_{-1/4}$. Для наших целей достаточно оценить $|R_n(z)|$ лишь внутри L_{-1}.

Из (1.3.12) при малом α следует $|P_n(z)| < 2$ на совокупности $\Delta^{(\alpha)}$. Тогда на линии уровня L_{-1} по известному следствию из принципа максимума[21] будет

$$|P_n(z)| < 2\rho^n_{-1}(\alpha).$$

Подставляя оценку для $\rho_{-1}(\alpha)$ из (1.2.5), получим для точек замкнутого круга $|z| \leqslant 1$, при малых α

$$(1.3.13) \qquad |P_n(z)| < 2(1+\alpha)^n < 2e^{n\alpha}.$$

Заменив n ее значением, удовлетворяющим неравенству (1.3.12), получим

[20] См. (16) том I, отд. 3, задача 308.

[21] См. (16) „ „ задачи 268, 269.

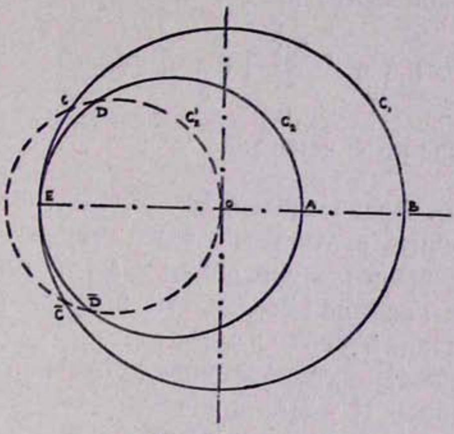
$$|P_n(z)| < 2e^{\frac{p_1}{\alpha} \lg \frac{1}{\alpha}} \tag{1.3.14}$$

где p_1 постоянное независящее от α.

Итак, мы построили для любого малого α полином $P_n(z)$, удовлетворяющий внутри $L_{-1/4}$ неравенству

$$|\sqrt{z} - P_n(z)| < \alpha \tag{1.3.15}$$

и оценке (1.3.14) в $|z| \leqslant 1$.



черт 6

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы V. Из уравнений окружностей C_1, C_2, C'_2 следует, что $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{ED}{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (черт. 6). При достаточно малом α

$$ED < 2\alpha. \tag{1.3.16}$$

Пусть p любое число $> 2p_1$. Возьмем α настолько малым, чтобы

$$e^{-\frac{p}{2\alpha} \lg \frac{1}{2\alpha}} \cdot e^{\frac{p_1}{\alpha} \lg \frac{1}{\alpha}} < \alpha$$

тогда из (1.3.16) следует для точек z в CDE и $\bar{C}E\bar{D}$ неравенство

$$(1.3.17) \qquad e^{-\frac{p}{\rho}\lg\frac{1}{\rho}} e^{\frac{p_1}{\alpha}\lg\frac{1}{\alpha}} < \alpha.$$

Учитывая неравенства (1.3.14), (1.3.15) и (1.3.17), получим во всей области Δ_0, а следовательно и в Δ

$$\underset{n\to\infty}{e^{-\frac{p}{\rho}\lg\frac{1}{\rho}}} |\sqrt{z}-P_n(z)| \to \alpha,$$

но α произвольно малое число, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{p}{\rho}\lg\frac{1}{\rho}} |\sqrt{z}-P_n(z)|=0$$

тем самым теорема V доказана.

Замечание. Преобразованием $w=(z+1)^{\frac{\beta}{\pi}}$ из теоремы V можно получить соответствующую теорему для области топологически эквивалетной области Δ_0, в случае, когда касательные к границе составляют в кратной граничной точке произвольный угол β, $0<\beta<\pi$.

Невозможность существенного уточнения теоремы V следует из теорем II и III.

Доказательство теоремы VI.[22]

Как уже указывалось, для доказательства теоремы VI достаточно доказать равенство (1.3.2) для функции $f_0(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}$.

Так как $f_0(z)\in N(\Delta)$, то к ней можно применить теорему V.

Определим последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ так, чтобы

$$(1.3.18) \qquad \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{p}{\rho}\lg\frac{1}{\rho}} |f_0(z)-P_n(z)|=0$$

при $z \in \Delta$.

Оценим при этих же полиномах

[22] При доказательстве пользуемся обозначениями § 1. 1.

$$\iint\limits_{\Delta} |f_0(z)-P_n(z)|^2 \, dxdy.$$

Представим этот интеграл в виде

$$\iint\limits_{\Delta} |f_0(z)-P_n(z)|^2 dxdy = \iint\limits_{D'_{1,-1}} \cdots\cdots +$$

$$+\iint\limits_{D''_{1,-1}} \cdots\cdots + \iint\limits_{\Delta-(D'_{1,-1}+D''_{1,-1})} \cdots\cdots$$

Из (1.3.18) следует, что при $n \to \infty$

$$\iint\limits_{\Delta-(D'_{1,-1}+D''_{1,-1})} |f_0-P_n|^2 \, dxdy = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Перейдя в остальных двух интегралах к переменым ρ и k получим[28]

$$\iint\limits_{\Delta} |f_0(z)-P_n(z)|^2 \, dxdy = \iint\limits_{D'_{1,-1}} |f_0(z)-P_n(z)|^2 \, T(\rho) d\rho dk +$$

$$+\iint\limits_{D''_{1,-1}} |f_0(z)-P_n(z)|^2 \, T(\rho) d\rho dk + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Учитывая равенство (1.3.18) и условие $T(\rho) < e^{-\frac{p}{\rho} \lg \frac{1}{\rho}}$ теоремы VI, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Delta} |f_0(z)-P_n(z)|^2 \, dxdy = 0.$$

Этим и доказана теорема VI.

---

[28] См аналогичные преобразования на стр. 11—12.

Невозможность существенного обобщения этой теоремы следует из теорем I и III[24]

§ 1. 4.

Наметим здесь исследование основных задач полноты в оганиченных областях, которые лежат в плоскости с прямолинейным разрезом.

Так как последовательность вычислений та же самая, что в § 1. 3., мы приведем лишь результаты отдельных этапов вычислений.

Обозначения. D односвязная ограниченная область в плоскости с разрезом $-\infty \leqslant x \leqslant 0$, переходящая при преобразовании $w=\sqrt{z}$ в область со связным дополнением.

$N(D)$ класс функций регулярных внутри D и непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$.

D_2 класс функций $f(z)$ регулярных внутри D и удовлетворяющих условию

$$\iint |f(z)|^2 \, dxdy < \infty.$$

δ—расстояние точки z до разреза $-\infty \leqslant x \leqslant 0$.

Проведем с обеих сторон от разреза $-\infty \leqslant x \leqslant 0$ две прямые параллельные оси ox на расстоянии δ от него и замкнем их концы полуокружностью радиуса δ с центром в начале координат. $T(\delta)$ линейная мера отрезков, которые отсекаются на построенной кривой данной областью.

Доказываем следующие две теоремы.

Теорема VII. Для любой функции $f(z) \in N(D)$ ***возможна аппроксимация полиномами*** $\{P_n(z)\}$

$$(1.4.1) \qquad \operatorname{Sup} \exp\left(-e^{\frac{p}{\rho} \lg \frac{1}{\rho}}\right) \cdot |f(z) - P_n(z)| \to 0,$$

где p ***некоторая абсолютная постоянная.***

Теорема VIII. Если область D ***удовлетворяет условию***

[24] Мы не формулируем здесь для области Δ теорему аналогичную теореме III, так как она получается из III простым дробным преобразованием.

$$(1.4.2) \qquad T(\delta) < \exp\left(-e^{\frac{p}{\delta}\lg\frac{1}{\delta}}\right),$$

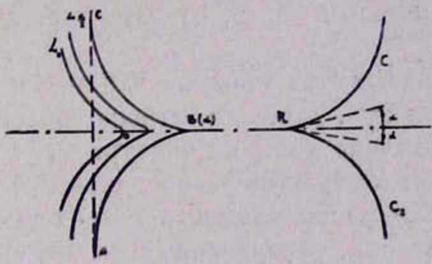
то для любой $f(z) \in D_2$ ***возможна аппроксимация***

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D} |f(z)-P_n(z)|^2 \, dxdy = 0.$$

Теоремы VII и VIII в первом приближении предельно точные. Их существенно уточнить нельзя.

Доказательство теоремы VII.

Проведем через точки $z=\alpha>0$ и $z=R>\alpha$ две окружности C_1 и C_2 равных радиусов, которые лежали бы в верхней и в нижней полуплоскостях и составляли бы угол 2α (черт. 7).



Черт 7.

а) Функция, отображающая область внешнюю относительно C_1+C_2 будет

$$(1.4.3) \qquad w = \frac{\left(\dfrac{z-R}{z-\alpha}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}+1}{\left(\dfrac{z-R}{z-\alpha}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}-1}, \quad (w(\infty)=\infty).$$

Линию уровня функции Грина, внешней области, относительно C_1+C_2, проходящую через точку с абсциссой q на оси ox [вне отрезка (α, R)] обозначим через L_q.

δ_{12} расстояние между L_0 и $L_{\frac{\alpha}{2}}$. δ-расстояние между любой линией уровня и контуром C_1+C_2.

в) Соответствующими вычислениями доказывется

Лемма. При $\alpha \to 0$

$$(1.4.4) \qquad \delta_{12} > e^{-\frac{c}{\alpha}\lg\frac{1}{\alpha}}, \quad \delta > e^{-\frac{c}{\alpha}\lg\frac{1}{\alpha}},$$

где c *постоянная, не зависящая от* α.

Эта лемма следует из формулы (1.4.3)[25].

с) При фиксированном z *на* $L_{\frac{\alpha}{2}}$ *и переменном* t *на*

C_1+C_2

$$(1.4.5) \qquad \operatorname{var} \lg|z-t| < \frac{h}{\alpha},$$

где h*—постоянное число, не зависящее от* α.

Из утвержденний а), в), с) следует доказательство теоремы VII.[26]

Для доказательства теоремы VIII достаточно доказать ее для функции $z^{-1/2}$. Для $z^{-1/2}$ строим интерполяционный полином, расположив узлы на контуре C_1+C_2 так, чтобы при конформном отображении внешней к C_1+C_2 области на $|w|>1$ их образы распределялись равномерно на $|w|=1$.

Из вычислений, аналогичных вычислениям на стр. 31—34, получаем для интерполяционного полинома $P_n(z)$ оценку

$$(1.4.6) \qquad |P_n(z)| < \exp\left[\exp\frac{\text{const.}}{\alpha}\lg\frac{1}{\alpha}\right]$$

везде в области D. Const. зависит только от D.

В части области D, лежащей внутри дуг C_1 и C_2, по построению

$$|z^{-\frac{1}{2}} - P_n(z)| < \alpha.$$

Таким образом полиномы $P_n(z)$ с максимальной скоростью, в зависимости от α, могут расти лишь в той части

---

[25] См. аналогичние вычисления на стр. 28—30.

[26] См. стр. 34—39.

области D, которая находится между разрезом $(-\infty,0)$ и линией уровня $L_{\frac{\alpha}{2}}$. Тогда не трудно заметить, что весовая функция $\exp\left[-\exp\frac{p}{\alpha}\lg\frac{1}{\alpha}\right]$ достаточна для того, чтобы тушить этот рост.[27]

Легко заметить также возможность замены α расстоянием δ. Или точнее, при любых δ можно подобрать α так, чтобы для соответствующих интерполяционных полиномов выполнялось

$$(1.4.7) \qquad \operatorname{Sup}_{n\to\infty} \exp\left[-e^{\frac{p}{\delta}\lg\frac{1}{\delta}}\right] \left|z^{-1/2}-P_n(z)\right| \to 0.$$

С другой стороны, разбиваем D на две части D_1+D_2, D_1 часть между полупрямыми $|y|=\pm a$ и полуокружностью $|z|=a$, замыкающей их концы, а D_2 остальная часть. Тогда для построенного интерполяционного полинома

$$\iint\limits_{D} |z^{-1/2}-P_n(z)|^2\,dxdy = \iint\limits_{D_1}\cdots + \iint\limits_{D_2}\cdots =$$

$$= \int\limits_0^a dy \int\limits_{L_\delta} |z^{-1/2}-P_n(z)|^2\,dx + \iint\limits_{D_2} |z^{-1/2}-P_n(z)|^2\,dxdy,$$

L_δ совокупность точек на расстоянии δ от $(-\infty;\,0)$. Из (1.4.7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_2} |z^{-1/2}-P_n(z)|^2\,dxdy = 0.$$

Тогда, отбрасывая часть интеграла в полукруге $|z|\leqslant a$, которая согласно (1.4.2) и (1.4.7) явно стремится к нулю, получим

$$\iint\limits_{D} |z^{-1/2}-P_n(z)|^2\,dxdy \leqslant \int\limits_0^a T(\delta)\max|z^{-1/2}-P_n(z)|^2\,d\delta + 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

[27] Ср. с аналогичными оценками на стр. 38.

учитывая (1.4.2), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \iint_D |z^{-1/2}-P_n(z)|^2\, dxdy=0,$$

что и нужно было доказать.

Докажем теперь, что теоремы VII и VIII существенно уточнить нельзя. Предварительно приведем некоторые определения и формулировку одного результата S. Warschawski, которым мы пользуемся при доказательстве.

Пусть R есть область, ограниченная замкнутой кривой Жордана Γ на z—плоскости и $z=0$ находится на границе Γ.

Допустим, что в некоторой окрестности $|z|\leqslant a$ точки $z=0$, Γ состоит из двух дуг Γ_+ и Γ_-, представимых уравнениями в полярных координатах

$$\varphi=\Phi_+(\rho) \text{ и } \varphi=\Phi_-(\rho),$$

$$\text{при } 0\leqslant\rho\leqslant a, \text{ и } \Phi_+(\rho)<\Phi_-(\rho);$$

функции $\Phi_+(\rho)$ и $\Phi_-(\rho)$ абсолютно непрерывны в том же интервале $0\leqslant\rho\leqslant a$. Допускаем также существование пределов

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\frac{d\Phi_+(\rho)}{d\rho} \text{ и } \lim_{\rho\to 0} \rho\frac{d\Phi_-(\rho)}{d\rho}.$$

Обозначим $\Theta(\rho)=\Phi_-(\rho)-\Phi_+(\rho)$.

Пусть $w=w(z)$ отоброжает конформно облась R на $|w-1|<1$ так, что $z=0$ переходит в $w=0$.

Теорема IX. (S. Warschawski)[28]. Если кривая, описанная выше, удовлетворяет дополнительно условиям

$$\int_0^a \rho\left(\frac{d\Phi_+(\rho)}{d\rho}\right)^2\frac{d\rho}{\Theta(\rho)}<\infty,\ \int_0^a \rho\left(\frac{d\Phi_-(\rho)}{d\rho}\right)^2\frac{d\rho}{\Theta(\rho)}<\infty, \tag{1.4.8}$$

то в окрестности точки $z=0$

---

[28] Это является следствием теоремы XI (10) в работе S. Warschawski ([10]. p 328) и выражена у него равенством (19.5)

$$(1.4.9) \qquad |w(z)| = C' \exp\left\{-\pi \int_{\rho}^{a} \frac{dr}{r\Theta(r)} + 0(1)\right\},$$

при $z \to 0$ в R ($C' = \text{const.}$).

Обозночим через τ_+ (соответственно τ_-) угол между касательной к кривой $\varphi = \Phi_+(\rho)$ (соотв. $\varphi = \Phi_-(\rho)$) и полярным радиусом в точке кривой $\varphi = \Phi_+(\rho)$ (соотв. $\varphi = \Phi_-(\rho)$) на расстоянии ρ от начала. $r\Theta(r)$ есть длина дуги, отсекаемой областью R на окружности $|z| = r$.

Мы через $\delta(r)$ будем обозначать просто эту дугу и тогда, очевидно, (1.4.8) и (1.4.9) можно придать вид

$$(1.4.8) \qquad \int_{0}^{a} \frac{\tau^2_+}{\rho} d\rho < \infty, \quad \int_{0}^{a} \frac{\tau^2_-}{\rho} d\rho < \infty$$

$$(1.4.9) \qquad |w(z)| = C' \exp\left\{-\pi \int_{\rho}^{a} \frac{dr}{\delta(r)} + 0(1)\right\},$$

при $z \to 0$ в R ($C' = \text{conct}$).

Теперь переходим к доказательству нашего утверждения.

Построим в круге $|w-1| < 1$ ограниченную функцию $F(w)$, которая убывала бы возможно быстро в окрестности точки $w = 0$ на $|w-1| = 1$. Если охарактеризовать убывание функции $F(w)$, на $|w-1|$, при $w \to 0$, неравенством вида

$$(1.4.10) \qquad |F(\rho e^{i\varphi})| < \text{const.}\, e^{-\gamma(\rho)},$$

где $\gamma(\rho) \to \infty$ при $\rho \to 0$, то необходимое и достаточное условие существования такой функции $F(\rho e^{i\varphi})$ будет неравенство[29]

$$(1.4.11) \qquad \int_{0}^{\rho} \gamma(\rho) d\rho < \infty.$$

[29] См. напр. [17] либо [17]* (стр. 150—154). Неравенство (1.4.10) эквивалентно неравенству (8) в [17]* (стр. 154).

Из (1.4.9) и (1.4.11) следует

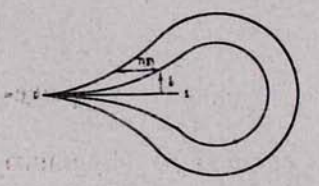
Теорема X. Существует аналитическая и ограниченная внутри Γ *функция* $\varphi(z)$, *которая в окрестности точки* $z=0$, *на кривой* Γ, *удовлетворяет ассимптотическому соотношению*

$$(1.4.12)\qquad |\varphi(z)|=\text{const}\cdot e^{-\gamma\left[\exp\left(-\pi\int\limits_0^{\rho}\frac{dr}{\delta(r)}+0(1)\right)\right]}.$$

Возможная быстрота убывания функции $|\varphi(z)|$ на Γ ограничивается неравенством (1.4.11), т. е. при

$$\int\limits_0^{\rho}\gamma(z)\,dr=\infty$$

невозможно построить ограниченную внутри Γ *аналитическую функцию, которая отличалась бы от тождественного нуля и удовлетворяла бы неравенству (1.4.10).*



Черт. 8.

Пусть теперь область D (черт. 8), топологически эквивалентная области ограниченной двумя соприкасающимися окружностями, охватывает отрезок (0,1) и $z=0$ двойная граничная точка этой области.

В некоторой окрестности точки $z=0$ пусть D симметрична относительно оси ox. Допустим область D содержит замкнутую кривую Γ (черт. 8), которая проходит через $z=0$, удовлетворяет условиям теоремы IX и дополнительному условию

$$(1.4.13)\qquad \liminf_{\rho\to 0}\frac{\lg\dfrac{1}{\delta'(\rho)}}{\lg\dfrac{1}{\delta(\rho)}}>1,$$

$\delta(\rho)$ монотонная функция.

Пусть теперь $f(z)\in N(D)$ и допустим существуют полиномы $\{P_n(z)\}$ такие, что

$$(1.4.14) \qquad \operatorname{Sup} \exp[\exp(-\rho^{-1+\varepsilon})]|f(z)-P_n(z)|\to 0$$

во всей области D. Докажем, что в этом случае ф-ия $f(z)$ регулярна везде внутри внешней границы L_1 (черт. 8).

Из (1.4.14), в часности, следует

$$(1.4.15) \qquad \exp[\exp(-\rho^{-1+\varepsilon})]|P_n(z)|<\text{const.}$$

на кривой Г.

Построим для Г функцию $\varphi(z)$, ограниченную и регулярную внутри Г и имеющее в окрестности точки $z=0$ ассимптотическое прдставление (1.4.12). Беря для определенности $\gamma(\rho)=\rho^{-1+\varepsilon}(\varepsilon>0)$, заметим, что при условии (1.4.13)

$$\liminf_{\rho\to 0} \frac{\delta^{1-\varepsilon}(\rho)\int\limits_{\rho}^{a}\dots}{\delta(\rho)}>1$$

и поэтому в окрестности точки $z=0$

$$|\varphi(z)|<\exp[-\exp(\text{const.}\ \rho^{-1+\varepsilon})].$$

Сопоставляя с неравенством (1.4.15), получаем

$$|\varphi(z)\cdot P_n(z)|<\text{const.}$$

на Г. Но $|\varphi(z)|$ на любой замкнутой совокупности внутри Г ограничена снизу положительной константой и поэтому $|P_n(z)|<\text{Const}$ для. всех $\{P_n(z)\}$. С другой стороны, из (1.4.14) следует равномерная сходимость полиномов $\{P_n(z)\}$ в некоторой подобласти внутри Г; по теореме Стильтеса $\{P_n(z)\}$ будет равномерно сходиться на всякой замкнутой совокупности внутри Г. Отсюда следует аналитичность функции $f(z)$ везде внутри L_1 (черт. 8).

Следовательно для функции $\left(z-\frac{1}{2}\right)^{1/2}$, явно принадлежащей классу N(D), аппроксимация вида (1.4.14) невозможна в области D. Тем самым доказана точность теоремы (VII) в первом приближении.

Теперь наметим доказательство точности теоремы VIII в первом приближении.

В окрестности начала координат от кривой (черт. 8), описанной выше, отложим от каждой точки отрезок длиной[30]

$$T(\delta) > e^{-\gamma\left[\exp\left(-\pi\int\limits_{\rho}^{a}\frac{dr}{\delta(r)}\right)\right]}$$

паралельно оси ох. В часности можно брать

$$T(\delta) > \exp[-\exp \delta^{-1+\varepsilon}].$$

Замкнув концы построенных дуг кривой охватывающей Г, мы получим некоторую область типа D (черт. 8). Почти без всяких изменений повторив доказательство теоремы I, мы увидим, что

если совокупность функций $\{g_n(z)\}$ *регулярна внутри* L_1 *и удовлетворяет условиям*

1°. $$\iint\limits_{D} |g_n(z)|^2 dxdy < \infty$$

2°. *в окрестности точки* $z=0$

$$|g_n(z)| < e^{\gamma\left[\exp \pi\int\limits_{\rho}^{a}\frac{dr}{\delta(r)}\right]}$$

то из равенства

$$\inf \iint\limits_{D} |f(z)-g_n(z)|^2 dxdy = 0,$$

где $f(z)$ *регулярна внутри* D *и* $\iint\limits_{D} |f(z)|^2\, dxdy < \infty$, *следует регулярность* $f(z)$ *везде внутри* L_1.

Отсюда следует, в частности, невозможность равенства

$$\inf \iint\limits_{D} \left|\sqrt{z-\frac{1}{2}} - P_n(z)\right|^2 dxdy = 0$$

[30] Обозначения теоремы X.

в классе полиномов. Этим и доказывается точность теоремы VIII в первом приближении.

ГЛАВА II

Здесь мы исследуем вопрос об аппроксимации в некоторых классах неограниченных областей.

§ 2. 1. Пусть E односвязная область со связным дополнением внутри некоторой параболы $y^2=ax$ $(a>0)$;

$T(\rho)$—линейная мера дуг, отсекаемых областью E на $|z|=\rho$;

N(E) класс функций регулярных внутри E и непрерывных вплоть до контура;

E_2 класс функций f(z) регулярных в E и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_E |f(z)|^2\, dxdy<\infty.$$

Допускаем существование интегралов $\iint\limits_E |z|^n dxdy$ $(n=0,1,2\ldots)$.

Теорема XI. Для любой $f(z)\in N(E)$ *можно подобрать полиномы* $\{P_n(z)\}$ *так, чтобы*

$$\sup_{n\to\infty}\left\{e^{-c|z|^{1/2}\lg^2|z|}\,|f(z)-P_n(z)|\right\}\to 0, \tag{2.1.1}$$

где c=const.

А при весе $\exp\left\{-\dfrac{|z|^{1/2}}{\lg|z|\cdots\cdots(\lg_p|z|)^m}\right\}$, *где* p *любое натуральное число, а* $m>1$, *равенство* (2.1.1), *вообще говоря, неверно.*

Последнее утверждение следует из теоремы IV. Для этого достаточно взять область E такой, чтобы при преобразовании типа $\sqrt{z-a}$ область E, с некоторым разрезом, делящим $T(\rho)$ на равные отрезки, перешла в область типа полос описанных в теореме II. Докажем первую часть теоремы.

Рассмотрим эллипс

$$(2.1.2)\qquad y^2=2px-\frac{px^2}{a}$$

имеющий вершину в начале координат и диаметр, равный $2a$. При фиксирвованном параметре p и $a\to\infty$ эллипс переходит в параболу $y^2=2px$. Пусть это и будет парабола, о которой идет речь в теореме.

Функция, отображающая внешнюю к эллипсу область на $(w)>1$, будет

$$(2.1.3)\qquad z=a+\frac{1}{2}\left\{(a+\sqrt{ap})\,w+\frac{a-\sqrt{ap}}{w}\right\}.$$

Обратная к ней функция

$$(2.1.4)\qquad w=\frac{z-a+\sqrt{z^2-2az+ap}}{2(a+\sqrt{ap})}.$$

Обозначим через L_q линию уровня $|w(z)|=\text{const.}$, проходящей через фиксированную точку $q<0$ оси ох на z—плоскости.

Пусть $\rho_q(a)$ радиус окружности $|w|=\rho_q(a)$ соответствующей L_q.

Обозначим через δ_1, δ_2 и δ_0 соответственно расстояния между линиями L_q и L_0, L_{2q}, и L_0 и L_q и L_{2q}. При $a\to\infty$ из (2.1.4) получаются следующие оценки.

$$(2.1.5)\qquad \rho_q(a)=1+\frac{\sqrt{2q+p}-\sqrt{p}}{\sqrt{a}}\,(1+0(1)),$$

где $0(1)\to 0$ при $a\to\infty$.

$$(2.1.6)\qquad \delta_i>\frac{\text{const.}}{\sqrt{a}};\ (i=0,\ 1,\ 2,).$$

Теперь преобразованием $w=\frac{1}{z+1}$ переводим E в конечную область E'. Аппроксимируем $f(z)=f\left(\frac{1}{w}-1\right)$ в E'

равномерно сходящейся последовательностью полиномов [18]. Вернувшись обратно на z—плскость, замечаем, что доказательство теоремы приводится к доказательству равенства (2.1.1) для функций $(z+1)^{-m}$, где m произвольное натуральное число.

При любом фиксированном m интерполируем функцию $(z+1)^{-m}$ полиномами $P_n(z)$ с узлами в точках $z_1, z_2, \dots z_n$ на L_0. $z_1, z_2, \dots, z_n$ выбираем так, чтобы при отображении (2.1.4) они переходили в точки равномерно распределенные на $|w|=1$.

Оценив остаточный член интерполяции $R_n(z)$ по формуле (1.3.8), получим при $a \to \infty$ и $z \in L_0$

$$(2.1.7) \qquad |R_n(z)| < \text{const} \cdot \left(\frac{\rho_n}{\rho_{2n}}\right)^n a^s,$$

где $S = \text{const}$.

Требуя выполнения неравенства

$$(2.1.8) \qquad |(z+1)^{-m} - P_n(z)| = |R_n(z)| < \varepsilon$$

внутри L_0, оцениваем по (2.1.5) и (2.1.7) достаточное для этого значение n получаем

$$(2.1.9) \qquad n = O(\sqrt{a}\ \lg a).$$

С другой стороны, из (2.1.8) следует равномерная ограниченность интерполяционных полиномов $\{P_n(z_n)\}$ внутри эллипсов L_0 и, в частности, внутри некоторого фиксированного круга. Это позволяет, по принципу максимума, оценить интерполяционные полиномы вне эллипса L_0. Получаем

$$|P_n(z)| < \text{const} \cdot |z-\gamma|^n = \text{const. } e^{n \lg |z-\gamma|},$$

где γ фиксированная точка на $x>0$.

Из всех предыдущих оценок легко вытекает оценка полиномов $\{R_n(z)\}$ вне всевозможных эллипсов. Получаем—

$$|P_n(z)| < \exp\{\text{const} \sqrt{|z|}\ (\lg |z|)^2\}.$$

Из этого неравенства и (2.1.8) следует (2.1.1).

Теорема XII*. *В области* E, *при условии

$$(2.1.10) \qquad T(\rho) < e^{-c\rho^{1/2}(\lg \rho)^2}$$

имеет место равенство

$$\text{(2.1.11)} \qquad \inf \iint_E |f(z)-P_n(z)|^2\, dxdy=0,$$

для любых $f(z)\in E_2$.

При

$$T(\rho)>\exp\left\{-\frac{\rho^{1/2}}{\lg\rho\cdot\ldots\cdot(\lg_s\rho)^{1+\varepsilon}}\right\}$$

где $\varepsilon>0$, *а* S *натуральное число, равенство (2.1.11), вообще говоря, не выполняется.*

Достаточно, очевидно, доказать равенство (2.1.11) только для функций $(z+1)^{-m}$, $m>0$.

Определим полином $P_n(z)$, удовлетворяющий неравенству (2.1.1) и оценим интеграл

$$\iint_D |(z+1)^{-m}-P_n(z)|^2 dxdy.$$

Очевидно

$$\iint_D |(z+1)^{-m}-P_n(z)|^2\, dxdy \leqslant \int_{\rho_0}^{\infty} \max_{|z|\leqslant\rho} |(z+1)^{-m}-P_n(z)|^2 T(\rho)d\rho.$$

Беря $c'>2c$, отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \iint_D |(z+1)^{-m}-P_n(z)|^2\, dxdy=0.$$

Вторая часть теоремы следует из теоремы III[31].

Приведем теперь, без доказательств, аналогичные результаты для других классов неограниченных областей.

Эти результаты получены таким же путем, что и предыдущие, поэтому их подробное изложение не добавило бы существенно нового к изложенному выше.

§ 2. 2. Пусть E произвольная односвязная область со связным дополнением внутри угла $|\arg z|<\frac{\alpha}{2}$.

---

[31] Достаточно совершить преобразование типа $\sqrt{z-\gamma}$ (см. замечание на стр. 20).

Сохраним обозначения § 2. 1. Допустим существование интегралов

$$\iint_E |z|^n dxdy \qquad (n=0, 1, 2,...).$$

Теорема XIII. При условии

$$T(\rho)<\exp\left\{-c|z|^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}\lg^2|z|\right\} \qquad (c=\mathrm{const})$$

в области E

$$(*) \qquad \inf\iint_E |f(z)-P_n(z)|^2\, dxdy=0$$

для любых $f(z)\in E_2$.

При

$$T(\rho)>\exp\left\{-\frac{\rho^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}{\lg\rho\cdot\ldots\cdot(\lg_s\rho)^{1+\varepsilon}}\right\};\ \varepsilon>0$$

s—*натуральное число, равенство (*), вообще говоря, нарушается.*

Теорема XIV[32]. *В области* E *для любых* $f(z)\in N(E)$

$$\inf \operatorname{Sup}\left\{\exp[-c|z|^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}(\lg|z|)^2]\ |f(z)-P_n(z)|\right\}=0$$

а при весе $\exp\left\{-\frac{|z|^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}{\lg|z|\cdot\ldots\cdot(\lg_s|z|)^{1+\varepsilon}}\right\}$

это равенство, вообще говоря, не имеет место.

§. 2. 3. Теорема XV. Если E произвольная односвязная область со связным дополнением внутри полосы $|Jmz|<a$ *то для любых* $f(z)\in N(E)$

[32] Здесь, как и везде, в последующем мы предполагаем существование интегралов $\iint_E |z|^n\, dxdy$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ в рассматриваемых областях.

$$\inf \operatorname{Sup}\{\exp\,[-c|z|\lg^2|z|]\;|f(z)-P_n(z)|\}=0,\ c>0.$$

А при весе[31] $\exp\left[-\dfrac{|z|}{\lg|z|\cdots\cdots(\lg_s|z|)^{1+\varepsilon}}\right]$

такая аппроксимация, вообще говоря, невозможна.

Теорема XVI. В области E теорема XV, при условии

$$T(\rho)<\exp\{-c\rho\lg^2\rho\}$$

для $f(z)\in E_2$

$$(*)\qquad \inf \iint_E |f(z)-P_n(z)|^2\,dxdy=0$$

а при

$$T(\rho)>\exp\left\{-\frac{\rho}{\lg\rho\cdots\cdots\cdots(\lg_s\rho)^{1+\varepsilon}}\right\},\ \varepsilon>0$$

s*—натуральное число, равенство* (*) *вообще нарушается.*

§ 2.4. Теорема XVII. Если E произвольная односвязная область со связным дополнением между углами

$$|\arg z|<\frac{\alpha}{2}\ \text{ и }\ |\arg(z-1)|<\frac{\beta}{2},\ \beta<\alpha,$$

то при $f(z)\in N(E)$

$$\inf \max\{\exp[-|z|^{\delta}\lg^2|z|]\;|f(z)-P_n(z)|\}=0$$

где δ *число, равное меньшему из чисел*

$$\frac{\pi}{2\pi-\alpha}\ \text{ и }\ \frac{\pi}{\beta}.$$

При весовой функции

$$\exp\left\{-\frac{|z|^{\delta}}{\lg|z|\cdots\cdots(\lg_s|z|)^{1+\varepsilon}}\right\}$$

это равенство вообще не выполняется.

Теорема XVIII. В области теоремы XVII, при

---

[31] Можно предположить, что $z=0$ находится вне E.

$$T(\rho) < \exp\left\{-|z|^{\delta}\lg^2|z|\right\},$$

$$\delta = \min\left\{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}, \frac{\pi}{\beta}\right\}$$

для $f(z) \in E_2$

$$\inf \iint\limits_{E_2} |f(z)-P_n(z)|^2\, dxdy = 0.$$

А при $$T(\rho) > \exp\left\{-\frac{|z|^{\delta}}{\lg|z| \ldots\ldots (\lg_s|z|)^{1+\varepsilon}}\right\}$$

это равенство вообще нарушается.

ГЛАВА III

Результаты, изложенные выше, тесно связаны с другими задачами теории аналитических функций и дают возможность существенно обобщить некоторые ранее известные результаты, а также ставить новые задачи.

§ 3.1. Для совокупностей Q, ограниченных, замкнутых, нигде не плотных и не разбивающих плоскость М. А. Лаврентьевым доказано [19], что любую непрерыную на Q функцию можно равномерно аппроксимировать полиномами на Q. Наши предыдущие результаты позволяют считать теорему М. А. Лаврентьева доказанной и для некоторых практически интересных совокупностей, разбивающих плоскость либо неограниченных. Сформулируем для примера одну из таких теорем.

Если E нигде не плотная совершенная совокупность, не разбивающая плоскость внутри угла $|\arg z| < \frac{\alpha}{2}$, *то любую непрерывную на E финкцию* $f(z)$ *можно аппроксимировать в смысле*

$$\operatorname{Sup}\left\{\exp\left[-|z|^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}(\lg|z|)^2\right] |f(z)-P_n(z)|\right\} \to 0$$

а при весе $$\exp\left[-\frac{|z|^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}{\lg|z|\cdots\cdots(\lg_s|z|)^{1+\varepsilon}}\right]$$

$\varepsilon>0$, s—*натуральное число, такая аппроксимациа, вообще говоря, невозможна, например для сторон угла* $|\arg z|=\frac{\alpha}{2}$.

Как мы уже отмечали раньше, для доказательства такого типа теорем достаточно доказать ее для функций вида $(z+1)^{-m}$, $(m=1, 2,\ldots)$.

Это замечание приводит доказательство теоремы к теореме XIV.

З а м е ч а н и е. Из сформулированной выше теоремы, при $\alpha=\pi$, следует, что на любых кривых линиях в верхней полуплоскости, при условии, чтобы они не разбивали плоскость, можно любую непрерывную и ограниченную в бесконечности функцию равномерно аппроксимировать полиномами при весе

$$\exp\{-|z|\lg^2|z|\}.$$

Эта задача решена для вещественной оси акад. С. Н. Бернштейном [28], (стр. 149). Вес, необходимый для такой аппроксимации, равен в первом приближении $e^{-|x|}$,

§ 3. 2. Пусть E произвольная односвязная область, удовлетворяющая единственно условиям

$$\iint\limits_E |z|^n dxdy<\infty \qquad (n=0, 1, 2,\ldots)$$

известно, что среди всех функций $f(z)\in E_2$ и удовлетворяющих дополнительно условию $f(z')=1$, где z' внутри E, минимум интеграла

$$\iint\limits_E |f(z)|^2 dxdy$$

реализует функция $\varphi'(z)$, где $\varphi(z)$ $(\varphi'(z')=1)$ отображает E на круг [2].

Решив ту же задачу для полиномов степени не выше n, мы получаем последовательность экстремальных полиномов $\{P_n(z)\}$ $(P_n(z')=1$.

Доказано, что полиномы $\{P_n(z)\}$ сходятся в среднем в E к некоторой функции $\psi(z)\in E$ (см. напр. [24]).

Известно, что в случае ограниченных областей со связным дополнением $\psi(z)=\varphi'(z)$ и потому

$$(*)\qquad \inf_{n\to\infty}\iint_E|\varphi'(z)-P_n(z)|^2dxdy=0.$$

Это позволяет в указанном случае считать экстремальные полиномы приближениями функции $\varphi'(z)$.

Наши результаты позволяют решить этот вопрос для некоторых классов неограниченных областей, а также для областей с неодносвязным дополнением. Например, в случае областей внутри угла $|\arg z|<\frac{\alpha}{2}$.

При условии

$$T(\rho)<\exp\{-c\cdot\rho^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}\lg^2\rho\}$$

$$\psi(z)\equiv\varphi'(z)$$

а при $$T(\rho)>\exp\left\{-\frac{\rho^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}{\lg\rho\cdots\cdots\cdots(\lg_s\rho)^{1+\varepsilon}}\right\}$$

вообще говоря

$$\psi(z)\not\equiv\varphi'(z).$$

Замечание. В случае конечных областей со связным дополнением, всегда имеем замкнутость полиномов. В теоремах главы II даже в случае когда эти области имеют односвязное дополнение, замкнутость зависит от метрических свойств этих областей.

Мы уже отмечали [5], что аппроксимация полиномами в случае конечных областей существенно отличается от аппроксимации в неограниченных областях тем, что в последнем полиномы являются функциями, имеющими особенность на границе области. Этим и надо объяснить отмеченную метрическую зависимость.

§ 3.3. Наконец, последняя группа следствий.

Нами доказано [5], что если две области B_1 и B_2 ограничены, имеют связные дополнения и единственную общую граничную точку, то в такой паре областей возможна одновременная аппроксимация полиномами как в среднем к двум произвольным функциям $f_1(z) \in E_2(B_1)$ и $f_2(z) \in E_2(B_2)$, также и равномерно для $f_1 \in N(B_1)$ и $f_2 \in N(B_2)$. В случае более чем двух общих граничных точек, одновременная равномерная аппроксимация в B_1 и B_2 вообще, очевидно, невозможна, а аппроксимация в среднем зависит от метрических свойств совокупности областей B_1 и B_2 [5]. Теорема V позволяет решить эту задачу для частного класса пары областей.

Пусть B_1 и B_2 области внутри области ограниченной двумя окружностями с общей точкой касания в $z=-1$ (см. § 1.3). Допустим $z=-1$ является общей граничной точкой областей B_1 и B_2, которые имеют и вторую общую граничную точку в луночке, а в отдельности каждая из них имеет связное дополнение.

Пусть $T(\rho)$ сумма длин дуг, отсекаемых двумя областями на $|z+1|=\rho$.

Теорема XVII. Если

$$T(\rho)<e^{-\frac{c}{\rho}\lg\frac{1}{\rho}}$$

то B_1 ***и*** B_2 ***возможна одновременная аппроксимация в среднем полиномами.***

При
$$T(\rho)>\exp\left\{-\frac{c}{\rho\lg\frac{1}{\rho}\cdots\cdots\left(\lg_k\frac{1}{\rho}\right)^{1+\varepsilon}}\right\}$$

такая аппроксимация вообще невозможна.

Замечание 1. Теоремы I—IV позволяют уточнить все отрицательные результаты, полученные нами в гл. I—III, т. е. каждый раз мы могли бы метрически охарактеризовать класс областей, где нарушается основное утверждение данной теоремы.

Мы ограничиваемся каждый раз утверждением, что при соответствующих метрических условиях теорема, „вообще говоря, неверна".

Уточнение некоторых классов областей, для которых верны отрицательные результаты приведенных нами теорем, производится без особого труда, помощью теорем I—IV.

Замечание 2. Во всех предыдущих теоремах, относящихся к неограниченным областям, совершая преобразование $w = \frac{1}{z}$ мы можем получить аналогичные результаты об аппроксимации рациональными функциями с полюсом на границе (см. 6 б).

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Bochner* Über Orthogonale Systeme Analyt. Funkt. (Math. Zeit. Bd. 15, 1922).
2. *T. Carleman* Über die Approximation analyt. Funkt. durch lineare Aggregate von vorgegb. Potenzen. (Arkiv för Math. Astr. och Fysik, vol 17, № 9, 1922).
3. *I. L. Walsh* Interpolation and Approx. by rat. Funktions in the compl. domain. (American math. Soc. Colloq. publ. vol. XX, 1935).
4. *М. В. Келдыш* Sur l' approximation en moyenne quadratique des fonct. analyt. (Мат. Сборн. т. 5 (47): 2, 1939. стр. 391—400).
5. *А. Л. Шагинян* К вопросу об апроксимации в среднем в компл. обл. (Изв. АН СССР, серия мат. т. 5, 1941. 285—296).
6. *А. Л. Шагинян* Заметки по исследованию приближений рац. функциями в компл. обл.
   а) (ДАН СССР, 1944, т. XLIV № 2).
   б) там же 1945, т. XLVIII № 1
   в)* ДАН Арм. ССР, 1944, т. I № 1—2.
7. *А. Л. Шагинян* Об экстремальных полиномах апроксим. функцию, реализующ. конформн. отобр. области. на круг. (ДАН СССР, 1944, т. XLV № 2).
8. *А. Л. Шагинян* Об одном признаке нормальности семейства аналитических функций (ДАН Арм. ССР, 1945, т. III № 2).

---

* При корректуре этой заметки допущены ошибки, которые исправлены в [9].

9. *А. Л. Шагинян* Об одном признаке неполноты системы аналитич. функ. (там же, 1946, т. V № 4).

10. *S. Warschawski* On conformal mapping of infinte strips. (Trans. Am. M. Soc., 51, № 2, 1942, pp. 280—335).

11. *И. И. Привалов* Граничные свойства однозначных аналит. функций. (Изд. МГУ 1941. Москва),

12. *М. В. Келдыш* Sur l' approximation en moyenne par polynomes des fonctions d' une variable compl. (Мат. Сб. т. 16 (58), № 1, стр. 1—18).

13. *K. Löwner* (Mathemat. Zeitschr. Bd. III 1919).

14. *В. Л. Гончаров* Теория интерполирования и прибл. функций (Гос. Техн. теор. изд. М.—Л. 1934).

15. *L. Fejer* Interpolation und Konforme Abbildung. (Göttinger Nach. 1918, S. 319—331)

16. *Г. Полия и Г. Сеге* Задачи и теоремы анализа. Т. 1-й М.—Л. 1937.

17. *Ch. de. la Vallée Poussin* Quatre Lesons sur les fonctions quasi-analyt. de variab. réele (Bull. d. Soc. Math. de Fr., v. 55, pp. 175—203, 1924)*

18. *М. В. Келдыш* Опредставлении функций компл. пер. рядами полиномов в замкн. обл. (Мат. Сб. т. 16 (58), № 3 1945, стр. 249—2 59)

19. *М. А. Лаврентьев* К теории конформных отображений (Труды физ. мат. инст. им. В. А. Стеклова, т. 5, 1934, стр. 159—245, см. стр. 218—245).

20. *С.Н.Бернштейн* Экстремальные свойства полиномов ч. 1 (ОНТИ, 1937, М.—Л.).

21. *Л.В.Канторович и В.И. Крылов* Приближенные методы высшего анализа (ОГИЗ, М.—Л. 1941, стр. 340—343).

17* Русский перевод в „Успехи мат. наук" вып. 5, 1938. стр 150—170.

Ա. Լ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐԻ ԼՐԻՎՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Ներկա աշխատության մեջ մենք լրացնում և մանրամասնորեն շարադրում ենք նախկինում հրապարակված մեր մի քանի հաղորդումների արդյունքները (տես գրական ցանկ [4]—[9])։

SHAHINIAN, A. L.

ABOUT COMPLETE SYSTEMS OF ANALYTIC FUNCTIONS

(Summary)

This paper deals with the approximation in the complex unbounded regions and in those wich are known as non Caratheodory type. All these results have already been enunciated in several notes [6—9].