

# ՆՈՐ ԿՐՈՒԹԻՒՆ ԳՐԱՀԱՇՈՒԱԿԱՆ

## ԳՏՆԵԼՈՒ ԲԱԶՈՒՄ ԱՆԾԱՆՈԹԻՑ ԹՈՒԱԿԱՆ ԶՕՐՈՒԹԻՒՆՍ

### ՏՈՒԵԱԼ ՀԱՌԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ ՄԻ ՄԷՁ

Մանօթ են արդէն Գրահաշուի դասագրոց մէջ աւանգուած զանազան սովորական կերպերն, որո՞վք կարելի է գտնել որ և իցէ բազմանծանօթ հաւասարութեան թուական զօրութիւնը. որոց ամենուն մէջ հիմնական կանոն կը տրուի՝ թէ որչափ որ անծանօթք գտնուին հաւասարութեան մի մէջ՝ նոյնչափ ևս զանազան հաւասարութիւնք հարկ է որ լինին, որոց անծանօթից իրարու հետ բազադարութեամբ միայն՝ կարելի է գտնել առեւալ անծանօթից զօրութիւնները։ Այս զանազան գրութեանց վրայ՝ կը համարձակիմք ներկայացընել թուական ուսմանց պարապողաց՝ նաև այս մեր կերպը, որոյ նմանն մինչև ցոյցած անծանօթ է, գէթ մեզ, ուրիշ հեղինակաց գրութեանց մէջ. զոր և կարելի է ի գործ գնել իւր գիւրին և ամենապարզ յատկութեանց՝ պատճառաւ՝ բազմանծանօթ հաւասարութեանց լուծման մասնաւոր գիպաց մէջ, այսինքն այն տառն միայն՝ երբ հաւասարութեան մէջ անծանօթից զուգահարութիւն տեղի չունենայ, ապա թէ ոչ՝ այս կերպս անհրաժեշտ կը լինի զայնս լուծելու, ինչպէս են հետևեալներն։

$$\frac{u-p}{3q-1} - 3q + \frac{q}{3q-1} = 8. \dots \text{և կամ} \dots \frac{q}{q} + \frac{1}{16} - p = 10, \text{ և այլն, և այլն.}$$

յորս հարկ է՝ որ անծանօթներն իրարու հետ բազմապատկուին, որով և կազմեն զուգահարութիւններ և բազադարութիւններ, զոր օրինակ. ադ, քդ, զգ, գ, և կամ գն, մդ, դնք, և այլն։

Անծանօթից բազադարութեան այս գիպուածներէն գուրս, ահաւաստի մեր գրութիւնն՝ լուծանելու որ և իցէ բազմանծանօթ հաւասարութիւն, առանց կարտուութիւն ունենալու՝ ուրիշ հաւասարութեանց գիմելու։

Որ օրինակ, տուեալ համարելով հաւասարութիւնն  $\frac{4u}{3} + \frac{4p}{3} + \frac{8q}{3} + \frac{q}{6} - \frac{2q}{3} - \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$  գտնել անծանօթից թուական զօրութիւնները։

### ԼՈՒԾՈՒՄՆ

Պարզելով զհաւասարութիւնն՝ կ'ելնէ.  $u + p + \frac{8q}{4} + \frac{q}{8} - \frac{q}{2} - \frac{4}{8} = \frac{8}{16} \dots \dots \dots (Ա)$

Արդ այս հաւասարութեան մէջ համարելով  $p + \frac{8q}{4} + \frac{q}{8} - \frac{q}{2} - \frac{4}{8} = \varphi$ , կ'ելնէ հետևեալն.

(Բ)  $\dots \dots \dots u + \varphi = \frac{8}{16}$ ; Ուստի  $u = \frac{8}{16} - \varphi$ , և  $\varphi = \frac{8}{16} - u$ , որով

$u + \varphi = \frac{8}{16} - \varphi$ ;  $\frac{8}{16} - u$ , յորմէ  $u' = \frac{8u}{16} = \varphi' = \frac{8\varphi}{16}$ .

Արդ լրացընելով քառակուսիները՝ կ'ելնէ.

$u' - \frac{8u}{16} - \left(\frac{8}{32}\right)^2 = \varphi' - \frac{8\varphi}{16} - \left(\frac{8}{32}\right)^2$ , ուստի

$u - \frac{8}{32} = \varphi - \frac{8}{32}$ , որով  $u = \varphi$ .

Արդ լինելով  $u = \varphi$ , հը լինի (R) հաւասարութեան մէջ,

$$2u = \frac{5}{16}, \text{ որով } u = \frac{5}{32}, \varphi = \frac{5}{32}.$$

Բայց որովհետեւ զերը  $\varphi$  հաւասար համարեցանք ընդ  $p + \frac{5q}{4} + \frac{\eta}{8} - \frac{q}{2} - \frac{q}{8}$ ,

$$\text{ուստի } \varphi' \text{ էլնէ } p + \frac{5q}{4} + \frac{\eta}{8} - \frac{q}{2} - \frac{q}{8} = \frac{5}{32},$$

Աւրեմ համարինք գարձեալ  $\frac{5q}{4} + \frac{\eta}{8} - \frac{q}{2} - \frac{q}{8} = \varphi$ , ուստի  $\varphi' \text{ էլնէ}.$

$$p + \varphi = \frac{5}{32}.$$

Այս հաւասարութեան մէջ զերը կատարուած գործողութեամբ՝ կրնայ ցուցուիլ

$$p = \varphi, \text{ որով } և 2p = \frac{5}{32}, \text{ յորմէ } p = \frac{5}{64}, \varphi = \frac{5}{64}.$$

Վերագոյն համարած լինելով  $\varphi = \frac{5q}{4} + \frac{\eta}{8} - \frac{q}{2} - \frac{q}{8} = \frac{5}{64}$ ,  $\varphi' \text{ էլնէ}.$

$$5q + \frac{\eta}{2} - 2q - \frac{q}{2} = \frac{5}{16}, \text{ ուստի } q + \frac{\eta}{10} - \frac{2q}{5} - \frac{q}{10} = \frac{5}{80}.$$

Համարինք արդ  $\frac{\eta}{10} - \frac{2q}{5} - \frac{q}{10} = \varphi$ , ուստի  $\varphi' \text{ էլնէ}.$   $q + \varphi = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}.$

յորում կրնանք ցուցնել ինչպէս 'ի վերոյ՝  $q = \varphi$ ,

$$\text{որով } և 2q = \frac{1}{16}, \text{ յորմէ } q = \frac{1}{32}, \varphi = \frac{1}{32}.$$

Լինելով  $\varphi = \frac{\eta}{10} - \frac{2q}{5} - \frac{q}{10} = \frac{1}{32}$ ,  $\varphi' \text{ էլնէ } \eta - 4q - q = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$

Արդ համարելով՝  $-4q - q = \varphi$ ,  $\varphi' \text{ էլնէ } \eta + \varphi = \frac{5}{16}.$

յորմէ կը գտնուի ինչպէս վերագոյն՝  $\eta = \varphi$ ,

$$\text{որով } 2\eta = \frac{5}{16}, \text{ յորմէ } \eta = \frac{5}{32}, \varphi = \frac{5}{32}.$$

Դարձեալ, լինելով  $\varphi = -4q - q = \frac{5}{32}$ ,  $\varphi' \text{ էլնէ } q + \frac{q}{4} = -\frac{5}{128}.$

Համարելով  $\frac{q}{4} = \varphi$ ,  $\varphi' \text{ էլնէ } q + \varphi = -\frac{5}{128}.$

յորմէ կը գտնուի ինչպէս 'ի վերոյ՝  $q = \varphi$ ,

$$\text{որով } 2q = -\frac{5}{128}, \text{ յորմէ } q = -\frac{5}{256}, \varphi = -\frac{5}{256}.$$

Վերջապէս՝ լինելով  $\varphi = \frac{q}{4} = -\frac{5}{256}$ ,  $\varphi' \text{ էլնէ } q = -\frac{5}{64}.$

Աւստի անծանօթից զգրութիւնքն են հետեւեալներն.

$$u = \frac{5}{32}, p = \frac{5}{64}, q = \frac{1}{32}, \eta = \frac{5}{32}, \varphi = -\frac{5}{256}, \varphi' = -\frac{5}{64}.$$

$$\Phi_{\text{որմ}}. - (II) . . . . . \frac{20}{96} + \frac{20}{192} + \frac{5}{96} + \frac{5}{192} + \frac{10}{768} + \frac{5}{384} = \frac{5}{12}, \frac{320}{768} = \frac{5}{12}, \frac{320}{768 \cdot 64} = \frac{5}{12},$$

ՀԱՄԱՌՈՑ ԳՈՐԾԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆ ՆԱԽԸՆԹԱՅ ԼՈՒԽԾԱՆ

Եթէ հարկ լինէր ամէն անգամ քանի մ'անծանօթ գտնելու համար՝ նախընթաց գործողութեան նման երկայն հաշիւ մի կատարել, պէտք էինք խոստովանել՝ որ այն ժամանակ այս մեր նոր աւանգած զանծանօթս գտնելու հնարքն՝ կը կորուսանէր իւր յատկութեանց ամենակարեւորը, որ է պարզութիւն և զիւրութիւն. վասն զի որչափ անծանօթ քանակութիւնք շատ լինէին՝ այնչափ ալ գործողութիւնն պիտի երկայնէր: Ուստի անգամ մի հաստատուն և յուշեալ ճանաչելով, որ երբ  $u + p = u$ ,  $w$  և  $p$  քանակութիւնք կրնան իրարու հաւասար առնուիլ, կարող էմք որ և իցէ գործողութիւն լուծել հետեւեալ համառօտ կերպիւ:

ՕՐԻՆԱԿ ԱՌԱՋԻՆ

$$u + p + q + r + k + q + r = 10 \dots (Ա)$$

$$\text{Համարինք } u + p + q + r = \psi, \text{ և համարինք } k + q + r = p$$

$$\text{Ուստի } k' \text{ էլնէ. } \psi + p = 10, \text{ յորմէ}$$

$$\psi = 5, \quad p = 5:$$

$$\text{Ուրեմն } u + p + q + r = 5, \text{ ինչպէս նաև } k + q + r = 5$$

$$\text{Համարինք } u + p = u, \text{ և } q + r = p$$

$$\text{Ուստի } k' \text{ էլնէ. } u + p = 5, \text{ յորմէ}$$

$$u = \frac{5}{2}, \quad p = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Որով } u + p = \frac{5}{2}, \text{ և } q + r = \frac{5}{2}, \text{ յորոց}$$

$$u = p, \quad q = r, \text{ որով } k' \text{ էլնէն.}$$

$$u = \frac{5}{4}, \quad p = \frac{5}{4}, \quad q = \frac{5}{4}, \quad r = \frac{5}{4}$$

$$\text{Համարինք } q + r = g$$

$$\text{Ուստի } k' \text{ էլնէ. } k + g = 5, \text{ յորմէ}$$

$$k = \frac{5}{2}, \quad g = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Լինելով } g = q + r = \frac{5}{2}, \text{ } k' \text{ էլնէ.}$$

$$q = \frac{5}{4}, \quad r = \frac{5}{4}, \text{ որով } k' \text{ էլնէն.}$$

$$k = \frac{5}{2}, \quad q = \frac{5}{4}, \quad r = \frac{5}{4}$$

$$\text{Փորձ. — (Ա) } \dots \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = 10, \quad \frac{30}{4} + \frac{5}{2} = 10, \quad \frac{40}{4} = 10, \quad 10 = 10:$$

ՕՐԻՆԱԿ ԵՐԿՐՈՐԴ

Ունենաճաճառօտ և ամենադիւրին լուծումն:

$$\frac{5u}{2} - \frac{2p}{3} - q + \frac{2q}{6} - \frac{5h}{9} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8} \frac{1}{8}} \frac{1}{16} \frac{1}{16}$$

$$\text{Փորձ } \dots \frac{5}{40} + \frac{0}{96} + \frac{1}{16} + \frac{6}{48} + \frac{15}{120} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{30}{120} + \frac{24}{96} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{5u}{2} = \frac{1}{8}, \quad 5u = \frac{1}{4}, \quad u = \frac{1}{20},$$

$$-\frac{2p}{3} = \frac{1}{16}, \quad -2p = \frac{3}{16}, \quad p = -\frac{3}{32},$$

$$-q = \frac{1}{16}, \quad q = -\frac{1}{16},$$

$$\frac{2q}{6} = \frac{1}{8}, \quad 2q = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{3}{8},$$

$$-\frac{5h}{3} = \frac{1}{8}, \quad -5h = \frac{3}{8}, \quad h = -\frac{3}{40}.$$

Մինչև չարդ մէջ բերուած օրինակաց մէջ անծանօթից հնարաւոր զօրութիւններէն մէկը միայն ինդրեցինք, իսկ զիւրսն ինչ ալ ամենագիւրին է գտնել այս վերջին (Որ. 16.) լուծման միջոցաւ:

Ձոր օրինակ, ինդիանքայժմ հետևեալ եռանձանութիւն հնարաւոր զօրութիւնները.

$$\text{Համարինք որ տուեալ լինի հետևեալ հաւասարութիւնն. } \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} + 2q = 12.$$

Այս հաւասարութեան մէջ կրնան գտնուիլ 12 զօրութիւնք անձանութիցն՝ ա, բ, գ, և հաւասարութիւնն միշտ կրնայ ստուգուիլ. զոր օրինակ.

|                                                                                        |                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. . . . . $\frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} + 2q = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$  | } Ա. Ձօրութիւն . . . . . $u = \frac{12}{5}, p = -5, q = \frac{3}{2}$ .<br>Փարձ . . . . . $\frac{12}{2} + \frac{15}{5} + \frac{6}{2} = 12, 6 + 3 + 3 = 12.$ |
| 2. . . . . $\frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} + 2q = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$  |                                                                                                                                                            |
| 3. . . . . $\frac{5u}{2} + 2q - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$  | } Բ. Ձօրութիւն . . . . . $u = \frac{6}{5}, p = -5, q = 3$ .<br>Փարձ . . . . . $\frac{6}{2} + \frac{15}{5} + 6 = 12, 3 + 3 + 6 = 12.$                       |
| 4. . . . . $\frac{5u}{2} + 2q - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$  |                                                                                                                                                            |
| 5. . . . . $\frac{3p}{5} + \frac{5u}{2} + 2q = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$  | } Գ. Ձօրութիւն . . . . . $u = \frac{12}{5}, q = \frac{3}{2}, p = -5$ .<br>(Նոյն ընդ Ա. Ձօրութեան):                                                         |
| 6. . . . . $\frac{3p}{5} + \frac{5u}{2} + 2q = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$  |                                                                                                                                                            |
| 7. . . . . $\frac{3p}{5} + 2q + \frac{5u}{2} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$  | } Դ. Ձօրութիւն . . . . . $u = \frac{6}{5}, q = \frac{3}{2}, p = -10$ .<br>Փարձ . . . . . $\frac{6}{2} + 3 + \frac{30}{5} = 12, 3 + 3 + 6 = 12.$            |
| 8. . . . . $\frac{3p}{5} + 2q + \frac{5u}{2} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$  |                                                                                                                                                            |
| 9. . . . . $\frac{3p}{5} + 2q + \frac{5u}{2} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$  | } Ե. Ձօրութիւն . . . . . $p = -10, u = \frac{6}{5}, q = \frac{3}{2}$ .<br>(Նոյն ընդ Դ. Ձօրութեան):                                                         |
| 10. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ |                                                                                                                                                            |
| 11. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ | } Զ. Ձօրութիւն . . . . . $p = -5, u = \frac{6}{5}, q = 3$ .<br>(Նոյն ընդ Բ. Ձօրութեան):                                                                    |
| 12. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ |                                                                                                                                                            |
| 13. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ | } Է. Ձօրութիւն . . . . . $p = -5, q = \frac{3}{2}, u = \frac{12}{5}$ .<br>(Նոյն ընդ Ա. Ձօրութեան):                                                         |
| 14. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ |                                                                                                                                                            |
| 15. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ | } Ը. Ձօրութիւն . . . . . $p = -10, q = \frac{3}{2}, u = \frac{6}{5}$ .<br>(Նոյն ընդ Դ. Ձօրութեան):                                                         |
| 16. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ |                                                                                                                                                            |
| 17. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ | } Թ. Ձօրութիւն . . . . . $q = 3, u = \frac{6}{5}, p = -5$ .<br>(Նոյն ընդ Բ. Ձօրութեան):                                                                    |
| 18. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ |                                                                                                                                                            |
| 19. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ | } Ժ. Ձօրութիւն . . . . . $q = \frac{3}{2}, u = \frac{6}{5}, p = -10$ .<br>(Նոյն ընդ Դ. Ձօրութեան):                                                         |
| 20. . . . . $2q + \frac{5u}{2} - \frac{3p}{5} = 12$<br>$\frac{6}{3} \quad \frac{6}{3}$ |                                                                                                                                                            |

$$\begin{array}{l}
 11 \dots \dots \dots 2\eta - \frac{3\mu}{5} + \frac{5\omega}{2} = 12 \left\{ \begin{array}{l} \text{ԺԱ. Զօրութիւն.} \dots \dots \dots \eta = 3, \mu = -5, \omega = \frac{6}{5}. \\ \text{(Նոյն ընդ Բ. Զօրութեան),} \end{array} \right. \\
 \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1.5cm}} \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 6 \qquad \qquad 6 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 3 \qquad \qquad 3 \end{array} \\
 \\
 12 \dots \dots \dots 2\eta - \frac{3\mu}{5} + \frac{5\omega}{2} = 12 \left\{ \begin{array}{l} \text{ԺԲ. Զօրութիւն.} \dots \dots \dots \eta = \frac{3}{2}, \mu = -5, \omega = \frac{12}{5}. \\ \text{(Նոյն ընդ Ա. Զօրութեան),} \end{array} \right. \\
 \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1.5cm}} \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 6 \qquad \qquad 6 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 3 \qquad \qquad 3 \end{array}
 \end{array}$$

Ուրեմն յայտնի էր տեսնուի՝ որ այս հաւասարութեան անծանօթից 12 տեսակ տեղափոխութիւններէն՝ կ'ելնեն 12 զօրութիւնք անծանօթից, յորոց սակայն երեքն միայն իրարմէ կը տարբերին, այսինքն՝ Ա, Բ, Դ զօրութիւնքն, իսկ մնացեալներն այս երեքէն մէկուն և կամ միւսին համաձայն կը լինին:

Յայտնի է՝ որ որչափ անծանօթներն բազմաթիւ լինին՝ նոյնչափ ալ համեմատաբար կ'աճին հնարաւոր զօրութիւնքն. վասն զի եթէ այս եռանծանօթ հաւասարութիւնս՝ 12 տեսակ փոփոխութիւն կրէր անծանօթից, քառանծանօթ հաւասարութիւն մի՛ կ'ունենայ 120 տեսակ փոփոխութիւն անծանօթից, որով և մեծագոյն թիւ մի՛ հնարաւոր զօրութեանց. և այսպէս հետզհետէ մնացեալքն:

Եւ յերաւի, եթէ  $\mu + \nu = 1$ , կրնայ գրուիլ նաև  $\mu + \omega = 1$ , անփոփոխ մնալով հաւասարութիւնն՝ երկու անգամ անծանօթից տեղափոխուելովն, հետևանք կ'ելնէ՝ որ սերիշ հաւասարութեան մի մէջ, որ ունենայ 3 անծանօթ, տեղի կ'ունենան  $3 \times 2$  տեղափոխութիւնք անծանօթից, և իւրաքանչիւր տեղափոխութեան մէջ 2 կերպ բաժանումն անծանօթից հաւասարութեանն. ուստի և հնարաւոր զօրութեանց թիւն կը լինի  $3 \times 2 \times 2 = 12$ :

Այսպէս նաև քառանծանօթ հաւասարութեան մի մէջ տեղի կ'ունենան  $3 \times 2 \times 4 = 24$  տեղափոխութիւնք անծանօթից, և 3 կերպ բաժանումն անծանօթից, յորս յաւելեալ նաև իւր մէջ բովանդակեալ եռանծանօթ հաւասարութեան 2 կերպ բաժանումը՝ կը լինին 5 կերպ բաժանմունք. ուստի նաև  $24 \times 5 = 120$  հնարաւոր զօրութիւնք:

Նշեանքանօթ հաւասարութեան մի մէջ տեղի կը գտնեն տեղափոխութիւնք  $24 \times 5 = 120$ , և բաժանմունք անծանօթից՝ 4 կերպ, յորս յաւելեալ նաև 5 կերպ բաժանմունքը՝ իւր մէջ բովանդակեալ քառանծանօթ հաւասարութեան՝ կը լինին 9 կերպ բաժանմունք անծանօթից. ուստի նաև  $120 \times 9 = 1080$  հնարաւոր զօրութիւնք. — Այսպէս կը լինին.

|                            |                           |                     |                               |                  |
|----------------------------|---------------------------|---------------------|-------------------------------|------------------|
| վեցանծանօթ հաւասարութե մէջ | $120 \times 6 = 720$      | տեղափոխութե, որով և | $720 \times 14 = 10080$       | հնար. զօրութիւնք |
| Եօթանծանօթ                 | $720 \times 7 = 5040$     | »                   | $5040 \times 20 = 100800$     | »                |
| Ութանծանօթ                 | $5040 \times 8 = 40320$   | »                   | $40320 \times 27 = 1088640$   | »                |
| Իննանծանօթ                 | $40320 \times 9 = 362880$ | »                   | $362880 \times 35 = 12700800$ | »                |

և այլն.

և այլն.

և այլն:

Եւ այսպէս շարունակ համեմատութեամբ կ'աճին հնարաւոր զօրութիւնք, յորոց շատն՝ յայտնի է՝ իրարու համաձայն կամ նոյն կը լինին:

Մինչև յոյժմ աւանգամ կանոնայ համեմատ լուծելով որ և իցէ թուով անծանօթից հաւասարութիւն մի, միշտ կարող էմք գտնել առաւելագոյն թիւ մի՝ հնարաւոր զօրութեանց, քան ուրիշ որ և է գրութեան միջոցաւ: Զոր օրինակ եթէ առնուիք լուծել հետևեալ քառանծանօթ հաւասարութիւնը, գտնելով անծանօթից ամէն հնարաւոր զօրութիւնքը, որ կարելի են այս մեր գրութեան միջոցաւ ինքզուի, պիտի տեսնենք որ 13 տեսակ թուական զօրութիւն պիտի ընծայէ միջ այս գրութիւնն, մինչդեռ դրաբաշուական գրութեանց լուծմամբ և ոչ իսկ կիսով չափ նոյն թուոյն՝ զօրութիւնք կը գտնուին:

Ուստի տուեալ համարելով հետևեալ հաւասարութիւնն չորս անծանօթով,

$$\frac{5\omega}{2} + \frac{3\mu}{5} + 2\eta - \frac{3\eta}{4} = 16$$

յորում կարելի է 24 կերպով անծանօթից փոփոխումն կատարել, առանց հաւասարութիւնն այլ-

այլեւս, և իւրաքանչիւր փոփոխութեան մէջ 8 կերպով բաժանել անձանթները, կ'ենեն հետեւեալ 13 տեսակ զօրութիւնքն.

|                                                                  |                                                                   |
|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1 . . . $u=3\frac{1}{5}, p=-3\frac{1}{3}, q=-5\frac{1}{3}, r=1$  | 7 . . . $u=1\frac{3}{5}, p=-3\frac{1}{3}, q=-2\frac{2}{3}, r=4$   |
| 2 . . . $u=3\frac{1}{5}, p=-6\frac{2}{3}, q=-2\frac{2}{3}, r=1$  | 8 . . . $u=\frac{4}{5}, p=-3\frac{1}{3}, q=-5\frac{1}{3}, r=4$    |
| 3 . . . $u=1\frac{3}{5}, p=-6\frac{2}{3}, q=-5\frac{1}{3}, r=2$  | 9 . . . $u=\frac{4}{5}, p=-6\frac{2}{3}, q=-10\frac{2}{3}, r=1$   |
| 4 . . . $u=1\frac{3}{5}, p=-3\frac{1}{3}, q=-10\frac{2}{3}, r=1$ | 10 . . . $u=1\frac{3}{5}, p=-13\frac{1}{3}, q=-2\frac{2}{3}, r=1$ |
| 5 . . . $u=\frac{4}{5}, p=-3\frac{1}{3}, q=-10\frac{2}{3}, r=2$  | 11 . . . $u=\frac{4}{5}, p=-13\frac{1}{3}, q=-5\frac{1}{3}, r=1$  |
| 6 . . . $u=3\frac{1}{5}, p=-3\frac{1}{3}, q=-2\frac{2}{3}, r=2$  | 12 . . . $u=\frac{4}{5}, p=-6\frac{2}{3}, q=-2\frac{2}{3}, r=4$   |
| 13 . . . $u=\frac{4}{5}, p=-13\frac{1}{3}, q=-2\frac{2}{3}, r=2$ |                                                                   |

Այսպէս ուրեմն վերոյիշեալ քառանջանթ հաւասարութեան՝ 120 հնարաւոր զօրութիւններէն՝ 13 զօրութիւնք միայն՝ իրարմէ տարբեր են, իսկ մնացածներն այս 13 զօրութեանց միոյն և կամ միւսին համաձայն կ'ենեն: — Իսկ այս մէկմէկէ տարբեր հնարաւոր զօրութեանց թուոց աշման համեմատութիւնն կը պատկանի փոխադրութեան և զուգադրութեան գրահաշուական օրինաց, որք մեր նպատակէն դուրս են:

Հ. Ա. Թ.

# ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹԻՒՆ

## ԲՈՎԱՆԴԱԿ ԱՇԽԱՐՀԻՍ ՄԷՋ ԳՏՆՈՒԱՅ ՀՌՈՎՄԷԱԿԱՆ ՌԻՂԱՓԱՌԱՍՑ

Գերմանիոյ մէջ նորաղանդներէն հրատարակուած նոր վիճակագրութեան մը համեմատ, (յայտ է ոչ այնքան նպաստաւոր ուղղափառ եկեղեցւոյ), կը տեսնուի հետեւեալ համեմատական աճումն ուղղափառաց թուոյն՝ իւրաքանչիւր դարուց մէջ:

|        |            |
|--------|------------|
| Ա. Դար | 500,000    |
| Բ. »   | 2,000,000  |
| Գ. »   | 8,000,000  |
| Դ. »   | 10,000,000 |
| Ե. »   | 15,000,000 |
| Ջ. »   | 20,000,000 |
| Է. »   | 25,000,000 |
| Ը. »   | 30,000,000 |
| Թ. »   | 40,000,000 |
| Ժ. »   | 50,000,000 |

|         |             |
|---------|-------------|
| ԺԱ. Դար | 70,000,000  |
| ԺԲ. »   | 80,000,000  |
| ԺԳ. »   | 85,000,000  |
| ԺԴ. »   | 90,000,000  |
| ԺԵ. »   | 100,000,000 |
| ԺՋ. »   | 125,000,000 |
| ԺԷ. »   | 185,000,000 |
| ԺԸ. »   | 250,000,000 |
| ԺԹ. »   | 260,000,000 |

(ժինէ ցամա 1876)

Այս ցուցակէս կ'երևի Նախ՝ որ ուղղափառաց թիւն երթալով դարէ 'ի դար միշտ զգալի աճումն ունեցեր է, և երկրորդ՝ որ այն դարերու մէջ աւելի մեծագոյն համեմատութեամբ աճումն ստացեր է, որչափ աւելի հալածանաց մէջ զբառուեր է, և որչափ որ բարուց ապականութիւնն ընդհանուր մարդկութեան վերայ զօրացեր է, ինչպէս են վերջին չորս, հինգ դարերն: