М. М. ДЖРБАШЯН

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ АРМЯНСКИМИ МАТЕМАТИКАМИ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ЗА ПОСЛЕДНИЕ 15 ЛЕТ[1]

В настоящем докладе автор приводит лишь весьма беглый обзор ряда результатов, полученных у нас в теории функций.

Традиционным направлением исследовательской работы в области математики с первых же дней основания Института была и остается теория приближений в комплексной области. Но в течение последних 10—15 лет фронт исследовательской работы в области математики, в частности в области теории функций, постепенно, но значительно расширился, охватывая все новые направления в области общей теории функций—теория интегральных преобразований в комплексной области, теория факторизации и представлений различных классов целых и аналитических функций, неванлинновская теория мероморфных функций, теория тригонометрических рядов и вообще ортогональных рядов и базисов, теория ортогональных систем и т. д.

Ввиду ограниченности объема статьи, естественно, мы не могли сделать более или менее полный обзор исследований во всех этих направлениях, а должны ограничиться лишь некоторыми из них. Поэтому заранее отметим, что ряд важных результатов, полученных у нас в теории функций вообще и в теории аналитических функций и в теории приближений в частности, не будет затронут в данном обзоре.

I. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

а) Равномерные приближения

Основной вопрос здесь заключался в том—*какие функции допускают приближение многочленами на произвольном ограниченном множестве E.*

---

[1] Доклад на юбилейной сессии по истории науки, посвященной 50-летнему юбилею Великой Октябрьской социалистической революции.

В этой области имелись фундаментальные результаты М. А. Лаврентьева (1934) и М. В. Келдыша (1945), не исчерпывающие, однако, полное решение проблемы.

Исчерпывающее решение вопроса, притом оригинальным методом, было дано С. Н. Мергеляном (1951). Им доказана теорема: если E—неразделяющее плоскость ограниченное, замкнутое множество, то каждую функцию, непрерывную на E и аналитическую во всех его внутренних точках, можно равномерно аппроксимировать полиномами.

Другой родственный вопрос, получивший полное решение у нас—проблема равномерного и асимптотического приближения целыми функциями.

Здесь задача ставится таким образом: *каким должно быть замкнутое множество* E, чтобы каждую заданную на нем непрерывную (кроме, быть может, точки $z=\infty$) и аналитическую во внутренних точках функцию возможно было равномерно приблизить целыми функциями.

Еще в 1927 году Карлеман показал возможность такого приближения, когда $E=(-\infty, +\infty)$. Затем Келдыш и Лаврентьев (1939) получили необходимое и достаточное условие в том случае, когда E — произвольный, нигде не плотный континуум. Это условие (назовем его K-условием) заключается в следующем.

Существует растущая к $+\infty$ функция $r_E(t)$, такая, что каждую точку $z \in CE$ возможно соединить с бесконечно удаленной точкой некоторой жордановой кривой, целиком лежащей внутри CE и вне круга радиуса $r_E(|z|)$. В дальнейшем Келдыш (1949) установил, что K-условие является достаточным также в том случае, когда множество E содержит внутренние точки, но связное.

Сформулированная весьма общая задача получила свое окончательное решение в работе Н. У. Аракеляна (1963), где доказана следующая теорема.

Для того чтобы заданную на замкнутом множестве всякую непрерывную (кроме, быть может, точки $z=\infty$) и аналитическую во внутренних точках этого множества функцию $f(z)$ можно было равномерно приблизить целыми функциями, необходимо и достаточно, чтобы множество E удовлетворяло K-условию или совпадало со всей плоскостью.

Следует отметить особую оригинальность метода доказательства автора необходимой части этой теоремы, причем достаточная часть также содержит ряд важных моментов развития и усовершенствования методов Гартогса-Розенталя, Келдыша и Мергеляна, примененного ими при доказательстве теорем о полиноминальных приближениях.

Эта теорема получает дальнейшее развитие в задачах асимптотического приближения целыми функциями.

Асимптотическими называются приближения вида

$$|f(z) - G(z)| < re^{-p(|z|)},$$

где

$$p(t) \uparrow \infty \quad \text{при } t \uparrow \infty. \qquad (*)$$

Возможность приближения такого вида впервые установил Карлеман.

В этом направлении существенные результаты были получены Лаврентьевым и Келдышем.

Если множество E имеет внутренние точки, то возможность приближения произвольной функции $f(z)$ вида (*) представляет лишь возрастающая с некоторой скоростью функция $p(t)$. Келдыш показал, что для таких множеств, удовлетворяющих K-условию, возможно брать $p(t) = t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, в то время как нельзя уже положить $\varepsilon = 0$; в случае области угла раствора $\frac{\pi}{\alpha}$ можно брать $p(t) = t^{\alpha - \varepsilon}$.

Впервые автором (1947) была высказана гипотеза, что теоремы Келдыша могут быть усилены и что в отмеченных двух случаях приближение вида (*) возможно, если соответственно

$$\int^{\infty} \frac{p(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt < +\infty \quad \text{или} \quad \int^{\infty} \frac{p(t)}{t^{1+\alpha}} dt < +\infty.$$

Впоследствии им было установлено (1956), что эта формулировка верна, если $\alpha = \pi$.

Наконец, в работах Аракеляна это предположение было полностью доказано.

б) Весовые приближения

Пусть E—произвольное, нигде не плотное, ограниченное множество на плоскости, а $\varphi(z)$ — определенная на E функция, возрастающая быстрее любого многочлена. Обозначим через $C_\varphi(E)$ множество непрерывных на E функций $f(z)$, для которых

$$\lim_{|z| \to \infty} \varphi^{-1}(z) f(z) = 0,$$

и обозначим

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} \varphi^{-1}(z) f(z).$$

Можно ставить вопрос: когда семейство полиномов полно в $C_\varphi(E)$?

Первый результат, относящийся к этой задаче, когда $E = (-\infty, +\infty)$, был получен С. Н. Бернштейном. Им было установлено (1923), что если

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k} \qquad (a_k \geqslant 0),$$

то необходимое и достаточное условие полноты выражается условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \varphi(t)}{1+t^2}\, dt = +\infty.$$

В дальнейшем автором был применен метод интегральных преобразований, позволяющий установить метрические критерии полноты для довольно широких классов неограниченных кривых.

Например, когда E—совокупность лучей

$$\arg z = \pm \frac{\pi}{2\alpha} \qquad \left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right),$$

образующих угол раствора $\frac{\pi}{\alpha}$, то в классе функций $\varphi(t)$, допускающих представление вида

$$\varphi(t) = \exp \int_0^{|t|} \frac{\omega(u)}{u}\, du, \qquad \omega(u) \uparrow \infty,$$

необходимым и достаточным условием полноты является

$$\int_1^{\infty} \frac{\log \varphi(t)}{t^{1+\gamma}}\, dt = +\infty,$$

где

$$\gamma = \max\left\{\alpha, \frac{\alpha}{2\alpha-1}\right\}.$$

В случае, когда E—совокупность параллельных прямых, отстоящих друг от друга на h, это условие уже имеет вид

$$\int_{1}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{h}t} \log \varphi(t)\, dt = +\infty.$$

Вообще общность примененного здесь метода принципиально позволяет указать критерий полноты для каждой индивидуальной неограниченной кривой.

Необходимость же каждого из таких условий полноты можно установить для произвольного веса, применяя общий признак нормальности семейств аналитических функций, установленный А. Л. Шагиняном.

Автор впервые подверг исследованию проблему наилучшего приближения с весом.

Здесь, во-первых, был установлен следующий принципиально новый результат о порядке роста производных полиномов, имеющих мажоранту

$$|P_n(x)| \leqslant e^{p(|x|)} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $p(x) \uparrow +\infty$, $x \uparrow \infty$, а $P_n(x)$ — полином степени n.

В отличие от ставших уже классическими результатов Маркова—Бернштейна здесь было установлено, что

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant A_k e^{-p(|x|)} \left(\int_{1}^{n} \frac{dy}{q(y)} \right)^k \qquad (k \geqslant 1),$$

где $x = q(y)$ — функция, обратная к $y = p(x)$.

Здесь получены прямые и обратные теоремы взвешенно-наилучшего приближения на всей оси $(-\infty, +\infty)$, являющиеся первыми результатами в этом направлении. Эти исследования приводят к существенно новому заключению. В то время как на конечном отрезке наилучшие приближения в теоремах Джексона—Бернштейна измеряются с помощью шкалы степеней от $\frac{1}{n}$, в весовых приближениях шкалой служат степени выражения $1 \Big/ \int_{1}^{n} \frac{dy}{q(y)}$, которое может стремиться к нулю произвольно медленно.

В случае, когда $E = (-\infty, +\infty)$ и $p(x)$—произвольная функция, С. Н. Мергелян и другие дали глубокое условие, эквивалентное полноте. Например, положив

$$\psi(z) = \sup_{z \in \mathfrak{M}} |P(z)|,$$

где $\mathfrak{M}$—множество многочленов, удовлетворяющих условию

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |P(x)| \frac{1}{|x+i|\varphi(x)} \leqslant 1,$$

Мергелян доказывает, что условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \psi(x)}{1+x^2}\, dx = +\infty$$

необходимо и достаточно для полноты.

Обозначим через $C_\varphi^*(E)$ множество функций $f(z)$ из $C_\varphi(E)$, для которых система полиномов полна в принятой выше метрике.

В случае, когда система полиномов не полна, т. е. $C_\varphi^*(E) \subset C_\varphi(E)$, представляет интерес внутреннее описание класса $C_\varphi^*(E)$. В случае, когда $E = (-\infty, \infty)$, это было сделано в работах С. Н. Мергеляна и И. Хачатряна. Из их результатов следует, что если функция φ-типа Бернштейна, то при $C_\varphi^*(-\infty, +\infty) \neq C_\varphi(-\infty, +\infty)$ класс C_φ^* совпадает с множеством целых функций экспоненциального типа нуль.

II. ИССЛЕДОВАНИЯ ПО НЕВАНЛИННОВСКОЙ ТЕОРИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

а) Классы функций и их представление

Началом исследований по общей теории функций и, в частности, по теории представлений классов мероморфных и аналитических в круге функций явились работы автора (1944—1948 гг.).

Важнейшим орудием исследования в этой теории является формула Енсена—Неванлинна и вытекающее оттуда определение характеристической функции, дефекта и т. д.

Пусть $f(z)$ — мероморфна в области $|z| < R \leqslant +\infty$; если ее характеристика — $T(r, f) < K < +\infty$, то в случае $R = +\infty$ нетрудно показать, что $f(z) \equiv \text{const}$. В случае же $R < +\infty$ естественно возникает проблема описания класса N мероморфных функций в $|z| < R$ с ограниченной характеристикой.

Р. Неванлинна в 1924 году дал полное решение этой проблемы, которое стало важной основой нового направления в современной теории функций—теории классов и граничных свойств однозначных аналитических функций (Сеге, Рисс, Смирнов, Привалов и др). Со временем теорема Р. Неванлинна нашла важное применение в теории аппроксимации, в теории ортогональных полиномов и т. д., а также в теории операторов (Колмогоров, Винер, Крейн, Гренандер и др.).

Теорема Неванлинна гласила, что класс N совпадает со множеством функций, допускающих представление вида

$$f(z) = z^{\lambda} \frac{B(z; a_{\mu})}{B(z; b_{\nu})} \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\psi(\theta)\right\}$$

Еще в своей парижской монографии (1929) Неванлинна приводит пример функции

$$\exp\left\{\frac{1}{(1 - z)^{\lambda}}\right\} \qquad (\lambda > 1),$$

для которой характеристика неограничена

$$T(r) \sim \frac{1}{(1 - r)^{\lambda - 1}}, \quad r \to 1 - 0.$$

В связи с тем, что вопросы представления и граничных свойств нашли важные применения в самых различных областях математических исследований, возникла необходимость существенного расширения и уточнения теории классов. Однако до последнего времени не имелось естественных внутренних характеристик, более узких или более широких, чем N, классов мероморфных функций, которые допускали бы полные параметрические представления типа указанной выше теоремы Неванлинна.

В проведенных за последние годы исследованиях по теории мероморфных функций было дано полное решение этой проблемы и установлено параметрическое представление классов, в частности, охватывающих мероморфные в круге

$|z|<1$ функции любого конечного порядка

$$\rho = \limsup_{r \to 1-0} \log T(r) \,/ \log \frac{1}{1-r} < +\infty.$$

Здесь, во-первых, устанавливаются новые, значительно более общие формулы типа известной формулы Енсена—Неванлинна. Эти формулы позволяют ввести новые понятия и определения:

α - характеристической функции $T_\alpha(r)$, произведения типа Бляшке $B_\alpha(z; a_\mu)$, поскольку соответствующие классические соотношения и определения неванлинновской теории были принципиально недостаточными.

Для каждой мероморфной в круге $|z|<1$ функции $f(z)$ с помощью оператора дробного интегро-дифференцирования вводится α - характеристическая функция $T_\alpha(r; f)$, совпадающая с характеристической функцией Неванлинна $T(r; f)$ при $\alpha = 0$.

С помощью новой α - характеристической функции $T_\alpha(r; f)$ определяются существенно новые классы мероморфных функций N_α, зависящих от непрерывного параметра α $(-1<\alpha<\infty)$.

А именно, $f(z) \in N_\alpha$, если

$$\sup_{0<r<1} \{T_\alpha(r; f)\} < +\infty.$$

Основная теорема, установленная автором, гласит: *Класс N_α совпадает со множеством функций, допускающих представление вида*

$$f(z) = z^\lambda \cdot \frac{B_\alpha(z; a_\mu)}{B_\alpha(z, b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z\, d\psi(\theta)\right\},$$

где $\psi(\theta)$ — произвольная функция ограниченной вариации, а сходящие произведения $B_\alpha(z; a_\mu)$ и $B_\alpha(z; b_\nu)$ составляются по формуле

$$B_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-W_\alpha(z; z_k)}$$

$$W_\alpha(z; \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{D^{-\alpha} \log\left|1 - \frac{re^{i\theta}}{\zeta}\right|\right\}_{r=1} S_\alpha(e^{-i\theta} z)\, d\theta,$$

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right\}.$$

Важной особенностью классов N_α является их монотонное расширение вместе с увеличением α $(-1<\alpha<+\infty)$ и совпадение N_0 с известным неванлинновским классом N.

Проводилось исследование граничных свойств классов N_α $(-1<\alpha<0)$ существенно узких, чем неванлинновский класс N.

Здесь удалось уловить тонкую связь между значением параметра α $(-1<\alpha<0)$ и тем исключительным множеством $E \subset [0, 2\pi]$, где для функции $F(z) \in N_\alpha$ радиальный предел

$$\lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta})$$

может и не существует.

В этом направлении дальнейшее исследование продолжается и в настоящее время получен ряд новых тонких результатов (М. М. Джрбашян и В. С. Захарян).

б) Теория дефектных значений

Напомним, что число a называется дефектным для $f(z)$ значением, если

$$\delta(a) = 1 - \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{N(r;a)}{T(r;f)} > 0,$$

где $n(t, a)$ — число a-точек функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant t$

с учетом их кратности, а $N(r;a) = \int\limits_0^r \frac{n(t,a)}{t}\,dt.$

Отметим, что если a является пикаровским исключительным значением, то $N(r;a) \equiv 0$ и $\delta(a) = 1$. Таким образом, понятие деффектного значения является дальнейшим углублением понятия исключительного значения.

Теория дефектных значений является дальнейшим углублением понятия исключительного значения и представляет собой важную составную часть теории Неванлинна.

Из второй основной теоремы теории распределения значений следует известное соотношение дефектов

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant 2.$$

Это соотношение приводит к заключению, что произвольная мероморфная при $|z| < \infty$ функция может иметь не более чем счетное множество дефектных значений (т. е. значений a, для которых $\delta(a) > 0$).

Однако долгое время оставался открытым вопрос: существуют ли мероморфные функции с бесконечными дефектами вообще и, в частности, в классах мероморфных или целых функций конечного порядка? В случае мероморфных функций положительный ответ на этот вопрос был дан в 1954 г. (А. А. Гольдберг).

Что касается целых функций, то здесь в свое время Р. Неванлинна выдвинул гипотезу, что целая функция конечного порядка ρ может иметь лишь конечное число (не более чем $[2\rho]+1$) дефектных значений.

Для случая $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ эта гипотеза подтвердилась в работе Эдрея и Фукса.

В недавней своей работе Н. Аракелян установил, что в случае $\rho > \frac{1}{2}$ гипотеза Р. Неванлинна не верна.

Впервые в кругу этих вопросов автор успешно применил методы и результаты теории приближений целыми функциями и доказал следующую важную теорему:

Для произвольной последовательности комплексных чисел $\{a_k\}_1^\infty$ и для любого $\rho > \frac{1}{2}$ существует целая функция порядка ρ и нормального типа, для которой $\delta(a_k) > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

III. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Уже в течение ряда лет, начиная с 1952 г., в отделе теории функций ведутся исследования по теории интегральных преобразований и представлений функций в комплексной области. Основные результаты, полученные в этом направлении, изложены в недавно вышедшей монографии*.

* *М. М. Джрбашян,* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Л., изд-во «Наука» (1966).

Характерная черта этих результатов заключается в том, что для довольно широких семейств областей и определенных в них классов функций комплексного переменного строится аппарат представления. Как обычно, этот аппарат представляется в виде интегрального преобразования в комплексной области по ассоциированному с данным множеством и классом функций многообразию.

Типичными результатами такого рода являются, например, теорема Планшереля в теории преобразования Фурье, теорема Винера—Пейли в теории целых функций экспоненциального типа и т. д.

В ранних циклах исследований были установлены принципиально новые обобщения указанных классических теорем путем построения своеобразной теории интегральных преобразований на лучах в комплексной области, существенно опирающейся на асимптотические свойства функции типа Миттаг—Леффлера:

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma\left(\mu+\frac{n}{\rho}\right)}.$$

В дальнейшем теория таких преобразований была распространена на ядра, образованные произвольными обобщенными гипергеометрическими функциями (С. А. Акопян). Все результаты о преобразованиях по существу представляют собой совершенный аппарат аппроксимации целыми функциями на соответствующих многообразиях комплексной плоскости. Что касается теорем типа Винера—Пейли, то в общих чертах они носят следующий характер. Определяется некоторый класс $\mathfrak{M}_\rho$ целых функций $f(z)$ порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и нормального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условиям вида

$$\int\limits_{(L_j)} |f(z)|^2 |z|^\omega |dz| < +\infty \quad (-1<\omega<1),$$

где $\{L_j\}$ — некоторая конечная система лучей, исходящих из начала координат.

С множеством $\mathfrak{M}_\rho$ ассоциируется некоторая конечная система отрезков, исходящих из начала $\{l_k\}$. Наконец, после этого устанавливается, что класс $\mathfrak{M}_\rho$ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = \sum_{(k)} \int_{l_k} E_\rho \{ \zeta^{1/\rho} z; \mu \} \varphi_k(\zeta) \zeta^{\mu-1} d\zeta,$$

где $\quad \mu = \dfrac{1 + \omega + \rho}{2\rho}, \quad \varphi_k(\zeta) \in L_2(l_k).$

Отметим, что как сама классическая теорема Винера—Пейли, так и эти общие теоремы представляют собой своеобразные теоремы аппроксимации специальными семействами целых функций. Как и в случае интегральных преобразований на лучах, здесь также недавно было установлено важное дополнение этих результатов. А именно, что в представлении классов $\mathfrak{M}_\rho$ вместо функции Миттаг—Леффлера может быть взята любая обобщенная гипергеометрическая функция (С. А. Акопян).

Даже весьма частный случай последнего результата является новым и представляет самостоятельный интерес.

В недавно выполненных исследованиях были получены новые результаты о представлении так называемых квазицелых функций и об аппроксимации квазицелыми функциями.

Простейшей и важной квазицелой функцией является интеграл

$$\nu_\rho(z; \mu) = \int_0^\infty \frac{z^t}{\Gamma\left(\mu + \frac{t}{\rho}\right)} dt,$$

представляющий континуальный аналог функции Миттаг—Леффлера. Эта функция аналитична на всей римановой поверхности логарифмической функции $G_\infty : \{-\infty < \arg z < +\infty,$ $0 < |z| < \infty\}$ и обладает тонкими асимптотическими свойствами, позволяющими установить, что любая квазицелая функция порядка ρ и нормального типа аппроксимируется с помощью функций $\nu_\rho(z; \mu)$. Точнее, удалось указать широкие классы квазицелых функций, представимых в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_\rho\left(z\varkappa e^{i\theta}; \frac{1}{2}\right) g(\varkappa e^{i\theta}) \, d(\varkappa e^{i\theta}),$$

$$\varkappa > \sigma \frac{1}{\rho}, \qquad z \in G_\infty,$$

где $g(\zeta)$ — ассоциированная с $f(z)$ функция, аналитическая на части $|\zeta| > \sigma^{1/\rho}$ поверхности G_∞.

Другой результат об аппроксимации дается в следующей теореме.

Множество функций, представимых в виде

$$G(w) = \int\limits_0^\infty \nu_\rho \left\{ e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} \tau^{\frac{1}{\rho}} e^w; \frac{1}{2} \right\} \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(-)}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \nu_\rho \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} \tau^{\frac{1}{\rho}} e^w; \frac{1}{2} \right\} \tau^{-\frac{1}{2}} v_{(+)}(\tau)\, dt,$$

$$W \in S(h),$$

где $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{h}$ ($\rho > 0$ — любое) и $v_\pm(\tau) \in L_2(0, +\infty)$, совпадает с классом функций $H_2[h]$, аналитических в полосе

$$S(h): \qquad \left\{ |J_m w| < \frac{\pi}{2h} \right\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|v| < \frac{\pi}{2h}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(u + iv)|^2 du \right\} < +\infty$$

Второй особенностью этого представления является то, что при подходящем выборе функций $v_{(\pm)}(\tau)$ в полуплоскостях

$$J_m w < -\frac{\pi}{\rho} - \frac{\pi}{2h} \quad \text{и} \quad J_m w > \frac{\pi}{\rho} + \frac{\pi}{2h}$$

оно представляет тождественный нуль.

Это свойство позволило написать в замкнутом виде аппарат оператора типа Фурье и Планшереля для любого множества, состоящего из произвольного конечного числа параллельных прямых и полос, в предположении, что функция принадлежит классу $L_2(-\infty, \infty)$ на прямых и классам $H_2[h]$ и в полосах $S(h)$.

Эти результаты могут быть трактованы также как теоремы аппроксимации целыми функциями, поскольку фигурирующее в них ядро

$$\nu_\rho\left(e^w;\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty\frac{et^w}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{\rho}\right)}dt$$

является целой функцией бесконечного роста.

Наконец, свойства функции $\nu_\rho(z;\mu)$ позволили установить принципиально новые результаты типа теоремы Винера—Пейли для целых функций бесконечного роста.

IV. ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И БАЗИСОВ*

Началом исследований по теории ортогональных систем и базисов был ряд работ А. А. Талаляна, опубликованных в 1956—1957 годах. Основным из этих результатов была теорема о том, что если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортогональная система и $f(x)$ — произвольная измеримая функция, то существует ряд по системе $\{\varphi_n(x)\}$, который по мере сходится к функции $f(x)$ (аналогичная теорема для тригонометрической системы $\{\cos nx, \sin nx\}$ была доказана Меньшовым в 1949 г.).

В 1958—1960 гг. А. А. Талаляном был получен ряд общих результатов об универсальных рядах по базисам пространства L_ρ и на ряды по базисам были перенесены все результаты Д. Е. Меньшова о пределах неопределенностей и о предельных функциях тригонометрических рядов. Была также доказана теорема о существовании универсального относительно подрядов тригонометрического ряда, из которой вытекает известная теорема Меньшова о представлении конечных измеримых функций тригонометрическим рядом.

В 1962—1963 годах Ф. Г. Арутюнян и А. А. Талалян доказали, что ряды по системам Хаара и Уолша не могут сходиться к бесконечности на множествах положительной меры. Тем самым было установлено, что нерешенная до сих пор известная проблема Лузина о существовании сходящегося к бесконечности на множестве положительной меры тригонометрического ряда для рядов по системе Уолша имеет отрицательное решение. Был установлен ряд теорем единственности рядов Уолша, аналоги которых для тригонометрических рядов также не известны (А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян).

---

* Данный раздел написан А. А. Талаляном.

Из этих результатов следует отметить доказанную Арутюняном теорему о том, что если ряд по системе Уолша всюду сходится к функции, интегрируемой в широком смысле Данжуа, то этот ряд является рядом Фурье—Данжуа своей суммы.

Ф. Г. Арутюняном были получены интересные результаты о распределении положительных и отрицательных значений функций, образующих полные ортонормированные системы или безусловные базисы пространства L_p. Им была доказана также теорема, представляющая обобщение на ряды по любому базису в L_p [0,1] известной теоремы Ульянова—Олевского о расходимости почти всюду рядов Фурье по полным ортогональным системам.

Р. Осиповым установлена теорема, согласно которой ортогональный ряд $\Sigma a_n \varphi_n(x)$ может сходиться почти всюду к заранее заданной измеримой функции и при этом его коэффициенты могут стремиться к нулю с максимальной допустимой скоростью. Им установлено также, что теорема Д. Е. Меньшова о равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье, после изменения значений разлагаемой функции на множествах малой меры, верна и для рядов Уолша.

Здесь уместно отметить, что все упомянутые результаты о системах Хаара и Уолша, включая и те, аналоги которых для тригонометрической системы ранее были известны, доказываются методами, существенно отличающимися от методов, примененных в теории тригонометрических рядов.

А. Талаляном и Р. Осиповым было установлено существование ряда по ограниченной ортонормированной системе, который сходится к бесконечности почти всюду и коэффициенты которого могут стремиться к нулю с почти максимальной допустимой скоростью.

За последние годы получены также результаты о безусловной и абсолютной сходимости рядов из L_2 по полным ортогональным системам, когда значения разлагаемой функции подходящим образом меняются на множествах сколь угодно малой меры (Талалян, Арутюнян). Исследуются также общие системы $\{f_n(x)\}$ измеримых функций, обладающих тем свойством, что ряды по системе $\{f_n(x)\}$ представляют любые измеримые функции в смысле сходимости по мере.

Установлено, что эти системы обладают всеми свойствами локализации в метрике сходимости по мере, которыми (как было ранее установлено Меньшовым) обладает тригонометрическая система (А. Талалян).

В заключение отметим интересные результаты Г. Мушегяна о структуре множеств единственности рядов по системе Хаара. В этих результатах получен окончательный ответ на вопрос: какие множества являются u- множествами для рядов по системе Хаара.

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԲՆԱԳԱՎԱՌՈՒՄ ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿՈՍՆԵՐԻ ԿՈՂՄԻՑ ՎԵՐՋԻՆ 15 ՏԱՐՈՒՄ ՍՏԱՑՎԱԾ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում տրվում է թռուցիկ ակնարկ Հայաստանում ֆունկցիաների տեսության բնագավառում ստացված արդյունքների մասին։

Մաթեմատիկայի բնագավառում գիտա-հետազոտական աշխատանքների ավանդական ուղղությունը ինստիտուտի հիմնադրման օրից մինչև այսօր եղել և մնում է մոտավորությունների տեսությունը կոմպլեքս հարթության մեջ։ Սակայն վերջին 10—15 տարիների ընթացքում հետազոտական աշխատանքների ասպարեզը մաթեմատիկայի բնագավառում, մասնավորապես ֆունկցիաների տեսության բնագավառում, աստիճանաբար, բայց նշանակալիորեն ընդլայնվեց, ընդգրկելով ֆունկցիաների ընդհանուր տեսության նորանոր ուղղություններ՝ ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսությունը կոմպլեքս հարթության մեջ, ամբողջ և անալիտիկ ֆունկցիաների տարբեր դասերի ներկայացման և ֆակտորիզացիայի տեսությունը, մերոմորֆ ֆունկցիաների Նևանլինյան տեսությունը, եռանկյունաչափական շարքերի և ընդհանրապես օրթոգոնալ շարքերի և բազիսների տեսությունը, օրթոգոնալ սիստեմների տեսությունը և այլն։

Ներկա հոդվածում հնարավորություն չկար ավելի հանգամանորեն կանգ առնել նշված ուղղություններով ստացված բոլոր հիմնական արդյունքների վրա։ Այդ պատճառով նախապես նշենք, որ ֆունկցիաների տեսության բնագավառում ստացված մի շարք կարևոր արդյունքներ մեր կողմից չեն շոշափվում։

Հոդվածը ընդգրկում է հետևյալ ուղղությունները՝ մոտավորությունների տեսություն, մերոմորֆ ֆունկցիաների Նևանլինյան տեսություն, ֆունկցիաների ներկայացումը կոմպլեքս տիրույթում, օրթոգոնալ շարքերի և բազիսների տեսություն։