Известия НАН Армении, Физика, т.54, №1, с.24–35 (2019)

УДК 539.196; 517.589

ВЫРОЖДЕННО-ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОЧНО РЕШАЕМАЯ ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ С ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ УРОВНЕЙ ПО ЗАКОНУ, ЗАДАВАЕМОГО W-ФУНКЦИЕЙ ЛАМБЕРТА

Т.А. ИШХАНЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения
Université de Bourgogne Franche-Comté, Dijon, France
e-mail: tishkhanyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 21 декабря 2018 г.)

Представлена точно решаемая модель с пересечениями уровней для полуклассической квантовой временной двухуровневой задачи, решение которой записывается в вырожденных гипергеометрических функциях. Для этой амплитудно-постоянной модели с асимметричным во времени пересечением уровней расстройка частоты лазерного поля задается W-функцией Ламберта. Общее решение задачи записывается как линейная комбинация с постоянными коэффициентами двух фундаментальных решений, каждое из которых задается неупрощаемой линейной комбинацией двух вырожденных гипергеометрических функций. Представлены фундаментальные решения и проанализировано поведение системы во внешнем лазерном поле с указанной конфигурацией поля.

1. Введение

Точные аналитические решения квантовой двухуровневой задачи редки [1–16]. Особенно важны те случаи, когда аналитические решения получены для таких конфигураций поля, для которых вовлеченные параметры могут варьироваться независимо друг от друга. Такие модели называются безусловно точно решаемыми моделями, чтобы различить их от условно точно решаемых моделей, для которых на входные параметры поля наложены некоторые ограничения (например, некий параметр задается как фиксированная постоянная). Наиболее известными и, вероятно, самыми полезными безусловно точно решаемыми моделями являются те, которые получены сведением задачи к вырожденному гипергеометрическому уравнению Куммера или обычному гипергеометрическому уравнению Гаусса [2–16]. Все точно решаемые случаи, для которых такое сведение возможно, были классифицированы в [14–16], где было показано, что существует только три независимых класса двухуровневой задачи, решаемых в функциях Куммера [14], и только четыре класса, решаемых в функциях Гаусса [15,16]. Вырожденные гипергеометрические классы включают в себя широкоизвестные модели Ландау-Зинера-Майораны-Штукелберга [2–5], Никитина [6] и Кротерса-Гюгса [7], а обычные гипергеометрические классы включают в себя известные модели Розена-Зинера [8], Демкова-Кунике [9], Бамбини-Бермана [10], Хью-Кэррола [11] и т.д.

Недавно было показано, что список аналитических решений двухуровневой задачи существенно расширяется, если рассматривать сведение этой задачи к пяти уравнениям класса Гойна [17,18]. Общий результат такой: существует 61 бесконечных классов моделей, решаемых в пяти функциях Гойна [19–21]. Однако, эти функции представляют собой намного более сложные математические объекты по сравнению с их предшественниками – функциями гипергеометрического класса. По этой причине, особый интерес представляют те частные случаи, когда функции Гойна могут быть написаны через более простые гипергеометрические функции. Важно отметить, что прямое сведение функций Гойна к гипергеометрическим функциям [22,23] не дает новых точно решаемых моделей. И поэтому более интересны разложения функций Гойна в бесконечные ряды по более простым специальным функциям гипергеометрического класса [24–30]. При обрывании этих рядов такие разложения генерируют большой набор замкнутых аналитических решений уравнений Гойна.

В работе [31] были получены безусловно и условно решаемые двухуровневые модели в том случае, когда рассматриваются разложения общей функции Гойна в ряды по неполным бета-функциям [32]: мы привели пошаговый вывод этих моделей и их дальнейшую классификацию, а также для единственной безусловно решаемой модели в рассматриваемом классе моделей вывели точное аналитическое решение квантовой двухуровневой задачи и провели анализ поведения системы во внешнем лазерном поле.

В данной работе мы применяем вышеупомянутые математические разложения к пятнадцати классам двухуровневых моделей единожды-конфлюэнтной функции Гойна. В результате, мы получаем, по-видимому, бесконечный набор решаемых моделей, которые в общем случае только условно точно решаемые (во многих случаях эти условно решаемые модели описывают диссипативные процессы). Мы показываем, что в этом списке есть единственная новая модель, которая безусловно точно интегрируемая. Это – трехпараметрическая амплитудно-постоянная модель с пересечением уровней. Модель представляет конфигурацию поля, для которой функция расстройки лазерного поля задается W-функцией Ламберта [33,34]. Она описывает асимметричный во времени процесс пересечения уровней. Общее решение задачи для этой модели записывается в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами двух фундаментальных решений, каждое из которых в свою очередь представляется неупрощаемой суммой двух вырожденных функций Куммера. Мы представляем подробный вывод этих фундаментальных решений и анализируем поведение системы в лазерном поле, которое задается описанной конфигурацией. Заметим, что каждое из этих фундаментальных решений имеет также альтернативное представление в виде одной обобщённой вырожденной функции Гурса [35].

2. Модели класса единожды-конфлюэнтной функции Гойна

Рассматривается полуклассическая временная квантовая двухуровневая задача возбуждения атома внешним оптическим полем. Пусть $a_1(t)$ и $a_2(t)$ – амплитуды вероятностей основного и возбужденного уровней, а пара функций $U(t), \delta(t)$ задает функции амплитудной и частотной модуляции, определяя конфигурацию внешнего поля (производная $\delta_t = d\delta / dt$ есть расстройка частоты лазерного поля от частоты перехода между двумя вовлеченными уровнями). Временная динамика двухуровневой системы описывается двумя связанными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка для амплитуд вероятностей [1]

$$i\frac{da_1(t)}{dt} = U(t)e^{-i\delta(t)}\, a_2(t)\,, \tag{1}$$

$$i\frac{da_2(t)}{dt} = U(t)e^{+i\delta(t)}\, a_1(t)\,, \tag{2}$$

Исключая $a_1(t)$, эту систему можно свести к следующему дифференциальному уравнению второго порядка для второго, возбужденного уровня:

$$\frac{d^2 a_2}{dt^2} + \left(-i\delta_t - \frac{U_t}{U}\right)\frac{da_2}{dt} + U^2 a_2 = 0\,. \tag{3}$$

Модели класса единожды-конфлюэнтной функции Гойна получаются сведением этого уравнения к единожды-конфлюэнтному уравнению Гойна, каноническая форма которого следующая [17,18]:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \varepsilon\right)\frac{du}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)}u = 0\,. \tag{4}$$

Это уравнение – одно из пяти уравнений класса Гойна. Оно имеет две регулярные сингулярные точки $z = 0$, $z = 1$ на комплексной z-плоскости и иррегулярную сингулярную точку в бесконечности. Уравнение (3) преобразовывается к уравнению (4) за меной (в общем случае комплексной) как зависимой, так и независимой переменных:

$$a_2(t) = \varphi(z)u(z)\,,\ z = z(t)\,. \tag{5}$$

Эта процедура приводит к пятнадцати классам конфигураций поля [20]

$$U(t) = U_0^* z^{k_1}(z-1)^{k_2}\frac{dz}{dt}\,, \tag{6}$$

$$\delta_t(t) = \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{z-1}\right)\frac{dz}{dt}\,, \tag{7}$$

где степени $k_{1,2}$ могут быть целыми или полуцелыми числами, удовлетворяющими неравенствам $-1 \le k_{1,2}$ и $k_1 + k_2 \le 0$. Для всех пятнадцати классов одно из фундаментальных решений двухуровневой задачи записывается в единожды-конфлюэнтных функциях Гойна [20]:

$$a_2 = C \cdot e^{\alpha_0 z} z^{\alpha_1}(z-1)^{\alpha_2} H_C(\gamma, \delta, \varepsilon; \alpha, q; z)\,, \tag{8}$$

где C – произвольная постоянная, параметры $q, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon$ единожды-конфлюэнтной функции Гойна H_C, а также показатели $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ определяются (в общем случае комплексными) входными параметрами U_0^* и $\delta_{0,1,2}$ как [20]:

$$\gamma = 2\alpha_1 - i\delta_1 - k_1\,,\ \delta = 2\alpha_2 - i\delta_2 - k_2\,,\ \varepsilon = 2\alpha_0 - i\delta_0\,, \tag{9}$$

$$\alpha = -i\delta_0(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0) + \alpha_0(\gamma + \delta - \varepsilon) + Q^{(3)}(0)/6\,, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} q = {} & \alpha_0(\alpha_0 - i\delta_0 - k_1 - i\delta_1) + \alpha_2(1 - \alpha_2 + k_1 + i\delta_1 + k_2 + i\delta_2) \\ & + \alpha_1(1 - \gamma - \delta + \varepsilon + \alpha_1) - Q''(0)/2 - Q'''(0)/6, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$Q(z) = U_0^{*2} z^{2k_1+2}(z-1)^{2k_2+2}\,, \tag{12}$$

и

$$\alpha_0^2 - i\alpha_0\delta_0 = -Q^{(4)}(1)/4!\,, \tag{13}$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_1(1 + k_1 + i\delta_1) = -Q(0)\,, \tag{14}$$

$$\alpha_2^2 - \alpha_2(1 + k_2 + i\delta_2) = -Q(1)\,. \tag{15}$$

3. Безусловно и условно точно решаемые модели класса единожды-конфлюэнтной функции Гойна

Безусловно точно, а также условно точно решаемые двухуровневые модели класса единожды-конфлюэнтной функции Гойна получаются обрыванием рядов для разложений единожды-конфлюэнтной функции Гойна по вырожденным функциям Куммера [29,30]. Для применения этого подхода выясним, могут ли условия обрывания удовлетворяться параметрами, которые задаются уравнениями (9)–(15). Начальное наблюдение тут такое: условия обрывания рядов всегда накладывают два ограничения на параметры вовлеченной единожды-конфлюэнтной функции Гойна. Одно из этих ограничений накладывается на характеристический показатель (конечной или бесконечной) сингулярной точки единожды-конфлюэнтного уравнения Гойна, а второе ограничение приводит к полиномиальному уравнению для вспомогательного параметра этого уравнения.

Можно показать, что первое ограничение, накладываемое на характеристический показатель, в общем случае ведет к условно решаемым конфигурациям поля, для которых вовлеченные параметры поля не меняются независимо. Однако, есть четыре важных исключения, которые приводят к безусловно точно решаемым моделям. Первые три случая воспроизводят известные конфлюэнтные модели Ландау-Зинера-Майорана-Штукелберга, Никитина и Кротерса-Гюгса в то время, как четвертая модель новая, ранее не встреченная в литературе. И эта последняя модель определяется через W-функцию Ламберта [33,34].

Для того, чтобы показать, как получаются условно или безусловно точно решаемые конфигурации поля и для того, чтобы идентифицировать безусловно точно решаемую Ламберт-W модель, рассмотрим, например, разложение единожды-конфлюэнтной функции Гойна по вырожденным гипергеометрическим функциям Куммера [29,30]:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot {}_1F_1((\alpha/\varepsilon)+n; \gamma+\delta+n; -\varepsilon z), \tag{16}$$

где коэффициенты разложения удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$R_n c_n + Q_{n-1} c_{n-1} + P_{n-2} c_{n-2} = 0 \tag{17}$$

с коэффициентами, которые задаются уравнениями

$$R_n = -n(\gamma+\delta+n-1), \tag{18}$$

$$Q_n = n(\gamma+\delta+n-1) + (\varepsilon n+\alpha) - q, \tag{19}$$

$$P_n = -\frac{(\delta+n)(\varepsilon n+\alpha)}{\gamma+\delta+n}. \tag{20}$$

Условие обрывания ряда для некоторого целого числа $N = 0,1,2,...$ сводится к уравнению $P_N = 0$. Следовательно, нужно взять $\alpha/\varepsilon = -N$ или $\delta = -N$. Из уравнения (16) видно, что функции разложения для первого случая дают полиномиальные решения единожды-конфлюэнтного уравнения Гойна. Для анализа более сложного неполиномиального решения рассмотрим второй вариант:

$$\delta = -N, \tag{21}$$

что есть ограничение, накладываемое на характеристический показатель сингулярности единожды-конфлюэнтного уравнения Гойна в точке $z=1$. Наряду с этим, проанализируем уравнение для показателя α_2 пре-факторной функции $\varphi(z)$ решения (8), то есть второе уравнение (9) и уравнение (15):

$$\delta = 2\alpha_2 - i\delta_2 - k_2 , \tag{22}$$

$$\alpha_2^2 - \alpha_2(1+k_2+i\delta_2) = -Q(1) . \tag{23}$$

Исключая α_2, получаем одно уравнение

$$\left(\delta + k_2 + i\delta_2\right)\left(\delta - k_2 - 2 - i\delta_2\right) = -4Q(1) . \tag{24}$$

Анализируя это уравнение, заметим, что функция $Q(z)$ зависит только от амплитудного параметра U_0^*: $Q(z) = U_0^{*2} z^{2k_1+2}(z-1)^{2k_2+2}$, так что $Q(1)$ есть функция только от U_0^*. Понятно, что если δ – фиксированная константа, мы получаем уравнение, левая часть которого зависит от параметра расстройки δ_2, в то время как правая часть уравнения зависит от амплитудного параметра U_0^*. Таким образом, в общем случае параметры δ_2 и U_0^* не меняются независимо, эти параметры связаны уравнением (24). Именно поэтому модели, решаемые в вырожденных гипергеометрических функциях, в общем случае условно точно решаемые.

Интересное исключение – когда обе части уравнения (24) одновременно исчезают. В этом случае условие $Q(1)=0$ дает $k_2 \neq -1$. Более того, из уравнения (24) мы делаем вывод, что параметр расстройки в этом случае либо фиксированная постоянная, либо также исчезает. В первом случае мы получаем диссипативные условно точно решаемые двухуровневые модели, в то время как второй случай, когда $\delta_2 = 0$, приводит к безусловно точно решаемым моделям. Заметим, что при этом возможные безусловно решаемые модели могут быть не более трехпараметрическими, так как они вовлекают только три параметра U_0^*, δ_0 и δ_1.

Для точно решаемых моделей, для которых $\delta_2 = 0 \cup Q(1) = 0$, уравнение (24) записывается как

$$\left(\delta + k_2\right)\left(\delta - k_2 - 2\right) = 0 . \tag{25}$$

Тут есть ограничение на δ (неположительное целое число), а также k_2 может иметь только четыре значения (целые или полуцелые): $k_2 = -1/2, 0, 1/2, 1$ (не забываем, что $k_2 \neq -1$). С этими ограничениями выясняем, что точно решаемые модели могут быть конструированы только для наборов $\delta = k_2 = 0$ или $\delta = -1 \cup k_2 = 1$. Случай $\delta = 0$ и $\delta_2 = k_2 = 0$ сразу же ведет к известным моделям Ландау-Зинера [2–5], Никитина [6] и Кротерса-Гюгса [7]. Мы же ниже проанализируем второй, другой набор.

4. Вырожденная гипергеометрическая точно решаемая двухуровневая модель, пересечение уровней которой задается W-функцией Ламберта

Итак, мы рассматриваем тот случай, когда разложение в ряд по вырожденным гипергеометрическим функциям Куммера решения единожды-вырожденного уравнения Гойна, вовлеченного в решение (8), обрывается на втором члене, то есть в этом случае $\delta = -1$. Как было показано выше, для точно решаемых моделей должно быть $\delta_2 = 0$ и $k_2 = 1$. Используя это ограничение, из второго уравнения (9) мы опять получаем $\alpha_2 = 0$. Теперь, для $\delta = -1$, второе условие обрывания ряда (16) (так называемое q -уравнение) записывается как [29,30]:

$$q^2 - q\left(2\alpha - 1 + \gamma + \varepsilon\right) + \alpha\left(\alpha + \gamma + \varepsilon\right) = 0 . \qquad (26)$$

Подставляя сюда уравнения (9)–(15), видим, что это уравнение удовлетворяется только если $k_1 = -1$. Таким образом, мы делаем вывод, что есть только одна безусловно точно решаемая конфигурация.

Это класс № 5 ($k_{1,2} = -1,1$) с $\delta_2 = 0$. Конфигурация поля задается формулами

$$U(t) = U_0^* \frac{z-1}{z}\frac{dz}{dt}, \quad \delta_t(t) = \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{z}\right)\frac{dz}{dt} \qquad (27)$$

с произвольными (действительными или комплексными) U_0^*, δ_0 and δ_1. Из первого уравнения (27) следует, что амплитудно-постоянная модель из этого класса определяется уравнением

$$\int \frac{z-1}{z} dz = -\frac{t}{\sigma} + C_0 , \qquad (28)$$

где параметры σ и C_0 определяют временную шкалу и константу интегрирования, а знак минус в правой части уравнения выбран для удобства. С выбором $C_0 = t_0 / \sigma + i\pi$, данный интеграл приводит к замене

$$z(t) = -W\left(e^{(t-t_0)/\sigma}\right), \qquad (29)$$

где W есть W-функция Ламберта: элементарная функция, которая решает уравнение $z = We^W$ [33,34]. Таким образом, мы получаем безусловно точно решаемую конфигурацию

$$U(t) = U_0 , \quad \Delta(t) = \Delta_R + \frac{\Delta_L - \Delta_R}{1 + W(e^{(t-t_0)/\sigma})} , \qquad (30)$$

где $U_0^* = -U_0\sigma$, $\delta_0 = -\Delta_R\sigma$ и $\delta_1 = \Delta_L\sigma$. Эта модель описывает асимметричный во времени процесс пересечения уровней (см. рис.1). Нужно отметить, что именно эта асимметрия отличает эту модель от хорошо известной модели Демкова-Кунике [9]. Расстройка начинается с $\delta_t(t) = \Delta_L$ при $t = -\infty$ и заканчивается

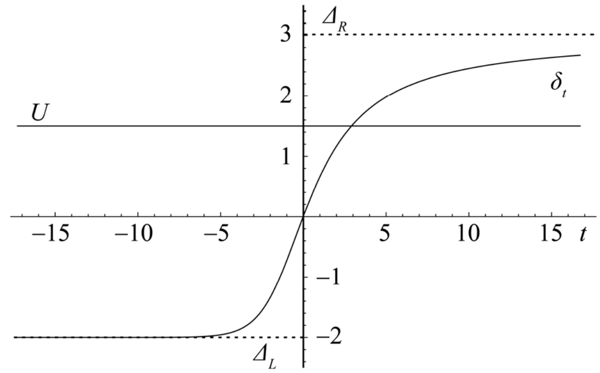

Рис.1. Точно решаемая вырожденная гипергеометрическая двухуровневая Ламберт-W модель (30) для $U_0 = 1.5$, $\Delta_L = -2$, $\Delta_R = 3$, $\sigma = 1$.

значением $\delta_t(t) = \Delta_R$ при $t = +\infty$.

Для того, чтобы пересечение резонанса происходило в точке $t = 0$, нужно выбрать

$$t_0 = \sigma\left(\frac{\Delta_L}{\Delta_R} + \ln\left(-\frac{\Delta_R}{\Delta_L}\right)\right). \tag{31}$$

Заметим, что фундаментальное решение единожды- конфлюэнтного уравнения Гойна для $\delta = -1$ и для вспомогательного параметра, удовлетворяющего уравнению (26) в явном виде записывается как [29,30]

$$H_c = {}_1F_1\left(\frac{\alpha}{\varepsilon};\gamma-1;-\varepsilon z\right) + \frac{q - q\gamma + \alpha\gamma}{(\gamma-1)(q-\alpha-\varepsilon)}\,{}_1F_1\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}+1;\gamma;-\varepsilon z\right). \tag{32}$$

Альтернативно это решение можно написать в более компактной форме, используя обобщенную вырожденную гипергеометрическую функцию Гурса ${}_2F_2$ [30]

$$H_c = {}_2F_2\left(\frac{\alpha}{\varepsilon},\frac{q}{q-\alpha};\gamma,\frac{\alpha}{q-\alpha};-\varepsilon z\right). \tag{33}$$

С учетом этих решений фундаментальное решение двухуровневой системы для модели (27), (28), согласно (8), записывается в вырожденных гипергеометрических функциях Куммера как ($\alpha_2 = 0$)

$$a_2 = e^{\alpha_0 z} z^{\alpha_1} H_C(\gamma,\delta,\varepsilon;\alpha,q;z)\,. \tag{34}$$

Для обсуждения поведения этого решения удобнее переписывать общее решение двухуровневой задачи в следующей эквивалентной форме

$$a_2 = z^{i\sigma\lambda_L} e^{-i\sigma\lambda_R z}\left(F + A\frac{dF}{dz}\right), \tag{35}$$

$$F(z)=C_1\cdot {}_1F_1\left(a;c;-\varepsilon z\right)+C_2 z^{1-c}\,{}_1F_1\left(a+1-c;2-c;-\varepsilon z\right), \tag{36}$$

где $C_{1,2}$ произвольные постоянные,

$$(a,c,\varepsilon)=\left(\frac{i\sigma\left(2U_0^2+\Delta_R\lambda_L+\left(\Delta_L-2\lambda_L\right)\lambda_R\right)}{\Delta_R-2\lambda_R},\, i\sigma\left(2\lambda_L-\Delta_L\right),\, i\sigma\left(\Delta_R-2\lambda_R\right)\right), \tag{37}$$

и

$$A=\frac{2U_0^2+\left(\Delta_L+\Delta_R-2\lambda_L\right)\lambda_L}{a\left(\Delta_R-\lambda_L-\lambda_R\right)\left(\Delta_R-2\lambda_R\right)}. \tag{38}$$

Здесь $\lambda_{L,R}$ – квази-энергии при $t\to\mp\infty$:

$$\lambda_L=\frac{1}{2}\left(\Delta_L\mp\sqrt{\Delta_L^2+4U_0{}^2}\right),\quad \lambda_R=\frac{1}{2}\left(\Delta_R\mp\sqrt{\Delta_R^2+4U_0{}^2}\right). \tag{39}$$

Заметим, что здесь применимы все комбинации знаков $\lambda_{L,R}$, и при этом каждая возможная пара производит независимое фундаментальное решение. Для определенности, мы берем знак минус для обеих квази-энергий.

Далее, рассмотрим асимптоты $a_2(t)$ при $t\to\mp\infty$. Для этого исследуем поведение замены независимой переменной $z(t)$ на бесконечности. Пользуясь свойствами W-функции Ламберта [18], можно получить следующие асимптоты:

$$z\big|_{t\to-\infty}\sim -e^{(t-t_0)/\sigma}, \tag{40}$$

$$z\big|_{t\to+\infty}\sim -\frac{t-t_0}{\sigma}+\left(1-\frac{\sigma}{t-t_0}\right)\ln\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right). \tag{41}$$

Как видно, асимптота при $t\to-\infty$ экспоненциальная, в то время, как асимптота при $t\to+\infty$ становится линейной на больших временах (см. рис.2).

Далее, пользуясь стандартными асимптотами для функций Куммера [18], мы находим

$$a_2\big|_{t\to-\infty}\approx C_1\left(1-\frac{aA\varepsilon}{c}\right)e^{i\lambda_{1L}\left(t-t_0+i\pi\sigma\right)}+C_2A\left(1-c\right)e^{i\lambda_{2L}\left(t-t_0+i\pi\sigma\right)}, \tag{42}$$

где

$$\lambda_{1L}=\frac{1}{2}\left(\Delta_L-\sqrt{\Delta_L^2+4U_0{}^2}\right), \tag{43}$$

$$\lambda_{2L}=\frac{1}{2}\left(\Delta_L+\sqrt{\Delta_L^2+4U_0{}^2}\right). \tag{44}$$

Из условия, что при $t\to-\infty$ система начинает с *первой* квази-энергии λ_{1L}, мы находим $C_2=0$, и, следовательно,

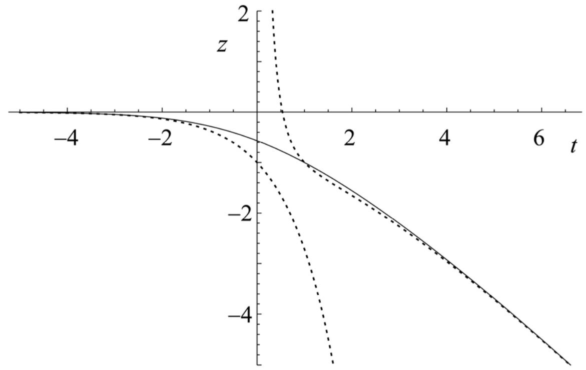

Рис.2. Замена переменной (29) (сплошная линия) и ее асимптоты (40) и (41) (пунктирные линии), σ = 1.

$$a_2\big|_{t\to-\infty} \sim C_1\left(1-\frac{aA\varepsilon}{c}\right)e^{i\lambda_{1L}\cdot t}, \tag{45}$$

$$a_1\big|_{t\to-\infty} = \frac{ia_2'}{Ue^{-i\Delta_L t}}\bigg|_{t\to-\infty} \sim \frac{i\lambda_{1L}}{U_0}C_1\left(1-\frac{aA\varepsilon}{c}\right)e^{i(\Delta_L+\lambda_{1L})t}. \tag{46}$$

Условие нормировки $|a_1|^2+|a_2|^2=1$ дает

$$|C_1|^2 = \frac{c^2e^{2\pi\lambda_{1L}}U_0^2}{(c-aA\varepsilon)^2\left(U_0^2+\lambda_{1L}^2\right)}. \tag{47}$$

Теперь, для того, чтобы понять поведение системы в конце процесса взаимодействия $t\to+\infty$, применим асимптоту (41) и получим

$$\begin{aligned} a_2\big|_{t\to+\infty} &\approx C_1\left(-\frac{t\varepsilon}{\sigma}\right)^{-a}\left(-\frac{t}{\sigma}\right)^{i\sigma\lambda_{1L}}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-i\sigma\lambda_{1R}} \\ &\times\left(\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}e^{i\lambda_{1R}(t-t_0)}+(1-A\varepsilon)(-\varepsilon)^a\,\varepsilon^{a-c}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{2a-c-\varepsilon}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^{i\lambda_{2R}(t-t_0)}\right), \end{aligned} \tag{48}$$

где

$$\lambda_{1R} = \frac{1}{2}\left(\Delta_R-\sqrt{\Delta_R^2+4U_0{}^2}\right), \tag{49}$$

$$\lambda_{2R} = \frac{1}{2}\left(\Delta_R+\sqrt{\Delta_R^2+4U_0{}^2}\right). \tag{50}$$

Выражение для вероятности того, что населенность при $t\to+\infty$ останется на первом квази-энергетическом уровне, а также выражение для вероятности перехода на второй квази-энергетический уровень довольно сложны и поэтому мы их тут не приводим.

5. Заключение

Для временной квантовой двухуровневой задачи мы представили точно решаемую вырожденную гипергеометрическую амплитудно-постоянную модель с пересечениями уровней, когда функция расстройки задается W-функцией Ламберта. Эта модель принадлежит к единожды-конфлюэнтному классу Гойна с $k_{1,2} = (-1, +1)$. Модель описывает асимметричное во времени возбуждение квантовой двухуровневой системы внешним оптическим лазерным излучением. Мы представили подробный вывод общего решения задачи для этой модели, которое записывается комбинацией двух фундаментальных решений, каждое из которых задается неупрощаемой суммой двух функций Куммера.

Исследование поддержано Российско-армянским (Славянским) университетом в рамках гранта от Министерства образования и науки РФ, а также ГКН МОН Армении (грант № 18RF-139 и 18T-1C276) и Армянским национальным фондом науки и образования (грант ANSEF №PS-4986). Автор благодарит Фонд армянской науки и технологий (FAST) за аспирантский грант а также посольство Франции в Армении за докторский грант.

ЛИТЕРАТУРА

1. **B.W. Shore**. The Theory of Coherent Atomic Excitation. New York, Wiley, 1990.
2. **L.D. Landau**. Phys. Z. Sowjetunion, **2**, 46 (1932).
3. **C. Zener**. Proc. R. Soc. London, Ser. A, **137**, 696 (1932).
4. **E. Majorana**. Nuovo Cimento, **9**, 43 (1932).
5. **E.C.G. Stückelberg**. Helv. Phys. Acta., **5**, 369 (1932).
6. **E.E. Nikitin**. Discuss. Faraday Soc., **33**, 14 (1962).
7. **D.S.F. Crothers, J.G. Hughes**. J. Phys. B, **10**, L557 (1977).
8. **N. Rosen, C. Zener**. Phys. Rev., **40**, 502 (1932).
9. **Ю. Демков, М. Кунике.** Вестник ЛГУ, физ.-хим., **16**, 39 (1969).
10. **A. Bambini, P.R. Berman**. Phys. Rev. A, **23**, 2496 (1981).
11. **F.T. Hioe, C.E. Carroll**. Phys. Rev. A, **32**, 1541 (1985).
12. **F.T. Hioe, C.E. Carroll**. J. Opt. Soc. Am. B, **3**(2), 497 (1985).
13. **C.E. Carroll, F.T. Hioe**. J. Phys. A, **19**, 3579 (1986).
14. **A.M. Ishkhanyan**. J. Phys. A, **30**, 1203 (1997).
15. **A.M. Ishkhanyan**. Optics Communications, **176**, 155 (2000).
16. **A.M. Ishkhanyan**. J. Phys. A, **33**, 5539 (2000).
17. **A. Ronveaux**. Heun’s Differential Equations, London, Oxford University Press, 1995.
18. NIST Handbook of Mathematical Functions. F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (eds.). New York, Cambridge University Press, 2010.
19. **A.M. Ishkhanyan, T.A. Shahverdyan, T.A. Ishkhanyan**. Eur. Phys. J. D, **69**, 10 (2015).
20. **A.M. Ishkhanyan, A.E. Grigoryan**. J. Phys. A, **47**, 465205 (2014).
21. **T.A. Shahverdyan, T.A. Ishkhanyan, A.E. Grigoryan, A.M. Ishkhanyan.** J. Contemp.

Phys. (Armenian Ac. Sci.), **50**, 211 (2015).
22. **R. Vidunas, G. Filipuk.** Funkcialaj Ekvacioj, **56**, 271 (2013).
23. **R.S. Maier**. J. Differential Equations, **213**, 171 (2005).
24. **N. Svartholm**. Math. Ann., **116**, 413 (1939).
25. **A. Erdélyi**. Q. J. Math. (Oxford), **15**, 62 (1944).
26. **D. Schmidt**. J. Reine Angew. Math., **309**, 127 (1979).
27. **L.J. El-Jaick, B.D.B. Figueiredo**. J. Math. Phys., **49**, 083508 (2008).
28. **T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan**. Ann. Phys., **383**, 79 (2017).
29. **T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan**. AIP Advances, **4**, 087132 (2014).
30. **T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan**. Appl. Math. Comput., **338**, 624 (2018).
31. **G. Saget, A.M. Ishkhanyan, C. Leroy, T.A. Ishkhanyan.** J. Contemp. Phys. (Armenian Ac. Sci.), **52**, 324 (2017).
32. **A.M. Manukyan, T.A. Ishkhanyan, M.V. Hakobyan, A.M. Ishkhanyan.** IJDEA, **13**, 231 (2014).
33. **J.H. Lambert**. Acta Helvitica, **3**, 128 (1758).
34. **L. Euler**. Acta Acad. Scient. Petropol., **2**, 29 (1783).
35. **L.J. Slater**. Generalized hypergeometric functions, Cambridge, Cambridge University Press, 1966.

A LAMBERT-W EXACTLY SOLVABLE LEVEL-CROSSING CONFLUENT HYPERGEOMETRIC TWO-STATE MODEL

T.A. ISHKHANYAN

We introduce a new exactly integrable level-crossing model of quantum semiclassical two-state problem for which the analytic solution is written in terms of the Kummer confluent hypergeometric functions. This is a constant-amplitude field-configuration describing an asymmetric-in-time level-crossing process for which the laser field frequency detuning is given in terms of the Lambert-W function. The general solution of the problem for this model is written as a linear combination, with arbitrary constant coefficients, of two fundamental solutions each of which presents an irreducible linear combination of two confluent hypergeometric functions. We present the fundamental solutions and analyze the behavior of the system in the external field defined by the specific field configuration.