

УДК 539.145

ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛА СУПЕРПОЗИЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХУРОВНЕВОГО АТОМА И БОЛЬШОГО ЧИСЛА ВСТРЕЧНЫХ ФОТОНОВ

Г.А. МУРАДЯН, Л.Р. АРЗУМАНЯН, А.Ж. МУРАДЯН*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: muradyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 18 декабря 2018 г.)

Выведена приближенная формула, описывающая временную эволюцию состояния двухуровневого атома и взаимодействующего с ним большого числа встречных фотонов. Она является естественным обобщением формулы амплитуды дифракционного рассеяния в резонансном эффекте Капицы-Дирака в приближении Рамана-Ната. Применимость выведенной формулы предполагает более $n_{1,2} \approx 20$ -ти фотонов в каждом из встречных пучков.

1. Введение

Электромагнитное поле в квантовом резонаторе может быть квантовано как на базе стоячих волн, так и бегущих встречных волн [1–2]. В настоящей работе будет выбран второй способ. Взаимодействие атома с таким полем приводит к переизлучению фотонов между встречными волнами и одновременному формированию суперпозиционного состояния поступательного движения атома [3–6]. При этом эволюция происходит с сохранением энергии и импульса полной системы «атом+поле фотонов». Искомыми величинами являются вероятностные амплитуды, которые в режиме когерентного взаимодействия обеспечивают возможно полную информацию о состоянии системы.

В настоящей работе ограничиваемся относительно простым режимом Рамана-Ната [7–10] с адиабатическим следованием [11], когда соответственно оператором кинетической энергии и возбужденным состоянием атома можно пренебречь. Будет показано, что функция Бесселя, будучи решением задачи для амплитуды импульсного состояния атома при классическом описании поля, при квантованном поле становится приближением неучета бозонного характера фотонов. При этом вне области коротких времен нарушается и условие нормировки. Потому в схему расчета включен дополнительный член, вытекающий из вида уравнения, и введен зависящий от времени нормировочный коэффициент. В результате получена достаточно простая аналитическая форма описания

импульсных состояний атома с согласованным с ним распределением фотонов в квантованных встречных волнах. Ее можно воспринять и как своего рода квазиклассическое описание воздействия поля встречных потоков фотонов на поступательное движение атома в режиме адиабатического следования.

2. Двухуровневый атом в поле квантованных встречных волн

Рассмотрим взаимодействие двухуровневого атома массой M и разностью энергий между уровнями $\hbar\omega_0$ с квантованным монохроматическим электромагнитным полем с частотой ω . Квантование поля проводится на базе встречных волн e^{ikz} и e^{-ikz} , где $k = \omega/c$. Тогда гамильтониан системы «атом–квантованное поле встречных волн» в приближении вращающейся волны записывается в виде [3]

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{\hbar\omega_0}{2}(1 + \sigma_3) + \hbar\omega(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \\ & - \sqrt{2}\hbar\beta\sigma^+ (\hat{a}_1 e^{ikz} + \hat{a}_2 e^{-ikz}) - \sqrt{2}\hbar\beta\sigma^- (\hat{a}_1^\dagger e^{-ikz} + \hat{a}_2^\dagger e^{ikz}), \end{aligned} \quad (1)$$

где первые два слагаемых – операторы кинетической энергии центра тяжести и внутренней энергии атома, соответственно, третье слагаемое – оператор энергии свободного электромагнитного поля, β – постоянная взаимодействия, связанная с матричным элементом дипольного оптического перехода d соотношением $\beta = 2\sqrt{\pi\omega/\hbar L}d$, L – произвольная длина резонатора, вводимая для выполнения процедуры квантования поля, $\sigma^\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$, σ_j – матрица Паули, действующая на внутреннее состояние атома, $j=1,2,3$, \hat{a}_1^\dagger и \hat{a}_1 – операторы рождения и уничтожения в e^{ikz} -моду, а \hat{a}_2^\dagger и \hat{a}_2 – в e^{-ikz} -моду, соответственно.

Волновая функция системы ищется в виде разложения по всем степеням свободы: внутреннего и поступательного движения атома и двум модам встречных волн. При этом учитывается, что атом до взаимодействия находится на нижнем энергетическом уровне, а во встречных волнах находятся n_1 и n_2 фотонов, соответственно:

$$\begin{aligned} |\Psi(z,t)\rangle = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{m=-n_2}^{n_1} a_m(z,t) |n_1 - m\rangle |n_2 + m\rangle e^{i2mkz - iN\omega t} \\ & + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{m=-n_2}^{n_1-1} b_m(z,t) |n_1 - m\rangle |n_2 + m - 1\rangle e^{i(2m-1)kz - iN\omega t}, \end{aligned} \quad (2)$$

где основное и возбужденное состояния атома представляются столбцами $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^\top$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^\top$, соответственно, $N = n_1 + n_2$, а для фотонных состояний Фока использовано кет-обозначение Дирака. Первое из них относится к e^{ikz} -моду, второе – к e^{-ikz} -моду.

Из уравнения Шредингера с гамильтонианом (1) с помощью стандартных вычислений для неизвестных амплитуд суперпозиционного состояния $a_m(z, t)$ в приближении Рамана–Ната ($\hat{p}^2 / 2M \rightarrow 0$) получаем систему рекуррентных дифференциальных уравнений

$$i \frac{da_m(z, t)}{dt} = -\sqrt{2} \beta \left(\sqrt{n_1 - m} b_{m-1}(z, t) + \sqrt{n_2 + m} b_{m+1}(z, t) \right), \quad (3)$$

$$i \frac{db_m(z, t)}{dt} + \Delta b_m(z, t) = -\sqrt{2} \beta \left(\sqrt{n_1 - m + 1} b_{m-1}(z, t) + \sqrt{n_2 + m} b_{m+1}(z, t) \right), \quad (4)$$

где $\Delta = \omega - \omega_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$ до N для первого рекуррентного уравнения и до $N-1$ – для второго уравнения. В начинающих и замыкающих уравнениях системы (3), (4) следует подставить $a_{-1}(z, t) = b_{-1}(z, t) = 0$ и $a_{N+1}(z, t) = b_N(z, t) = 0$, соответственно, а возможная z -зависимость амплитуд связана с начальным распределением атомной волновой функции поступательного движения. Оно факторизуется в выражении амплитуды и может быть упущено из рассмотрения.

В дальнейшем ограничимся режимом адиабатического следования, т. е. относительно большими значениями расстройки резонанса Δ , когда первым слагаемым в правой части уравнения (4) можно пренебречь. Тогда

$$b_m(t) = -\sqrt{2} \frac{\beta}{\Delta} \left(\sqrt{n_1 - m + 1} b_{m-1}(t) + \sqrt{n_2 + m} b_{m+1}(t) \right)$$

и после прямой подстановки для амплитуды $\bar{a}_m(t) = i^m a_m(t)$ основного состояния получаем

$$\frac{d\bar{a}_m(t)}{dt} = \xi \left(\sqrt{(n_1 - m + 1)(n_2 + m)} \bar{a}_{m-1}(t) - \sqrt{(n_1 - m)(n_2 + m + 1)} \bar{a}_{m+1}(t) \right), \quad (5)$$

где $\xi = \beta^2 / \Delta$. Полная волновая функция нормируется в каждой пространственной точке z и для амплитуд $\bar{a}_m(t)$ резюмируется в соотношении $\sum_{m=-n_2}^{n_1} |\bar{a}_m(t)|^2 = 1$.

3. Эволюция импульсного состояния атома и перераспределение фотонов во встречных волнах

Рассмотрим временную эволюцию амплитуд \bar{a}_m в случае больших чисел фотонов во встречных волнах: $n_{1,2} \gg 1$. Для ориентации сперва заметим, что коэффициенты с правой стороны уравнения (5) медленно зависят от числа переизлученных фотонов m ($n_{1,2} \gg 1$) и потому перепишем уравнение (5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}_m(\tau)}{d\tau} = & \frac{p_m + p_{m+1}}{2} (\bar{a}_{m-1}(\tau) - \bar{a}_{m+1}(\tau)) \\ & + \frac{p_m - p_{m+1}}{2} (\bar{a}_{m-1}(\tau) + \bar{a}_{m+1}(\tau)), \end{aligned} \quad (6)$$

где $p_m = \sqrt{(n_1 - m + 1)(n_2 + m)}$, $p_{m+1} = \sqrt{(n_1 - m)(n_2 + m + 1)}$, $\tau = \xi t$.

Вне непосредственной близости граничных точек $m = -n_2$ и $m = n_1$ коэффициент второй скобки намного меньше коэффициента первой скобки (см. Рис.1). С учетом того, что решением уравнения без второго члена

$$\frac{d\bar{a}_m(\tau)}{d\tau} = \frac{p_m + p_{m+1}}{2} (\bar{a}_{m-1}(\tau) - \bar{a}_{m+1}(\tau)). \quad (7)$$

Оно, как и следовало ожидать, в пределе классического поля $m/n_{1,2} \rightarrow 0$ и, соответственно, $p_m - p_{m+1} \rightarrow 0$, $\bar{p}_m \rightarrow \sqrt{n_1 n_2}$, приводит к широко известному выражению $P_m(\tau) = J_m^2(\Omega t)$ вероятности дифракции m -го порядка в резонансном эффекте Капицы-Дирака [6, 12–15]. Здесь Ω -частота переизлучения фотонов из одной волны в другую, пропорциональная глубине модуляции интенсивности поля встречных волн.

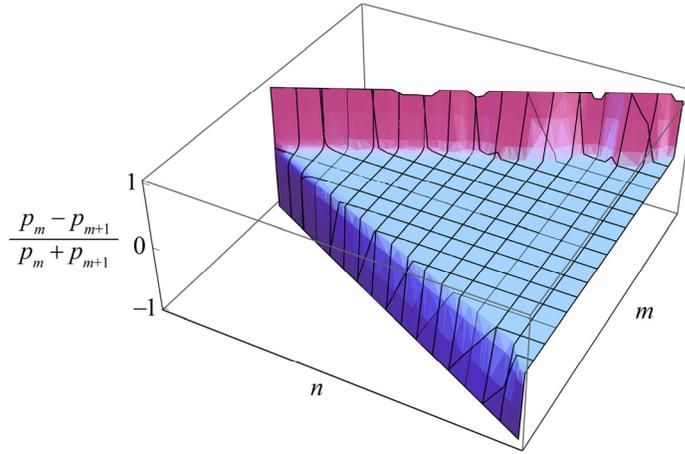


Рис.1. Отношение коэффициента второй скобки $(p_m - p_{m+1})/2$ к коэффициенту первой скобки $(p_m + p_{m+1})/2$ в зависимости от числа переизлученных фотонов m при разных значениях начального числа фотонов n во встречных волнах.

Приближенный характер решения (7) нарушает, к сожалению, условие нормировки волновой функции при относительно больших временах взаимодействия. Если, например, сохранить только первый член, который является полным аналогом случая классического описания поля встречных волн, то сумма вероятностей со временем в среднем монотонно уменьшается, как это показано на Рис.2

в случае $n_1 = n_2 = 100$. Для сравнения аналогичный график построен также с помощью амплитуд при классическом описании поля. Он проходит ниже и показывает, что уже «нулевое» приближение формулы (7) правильно учитывает квантовый характер поля.

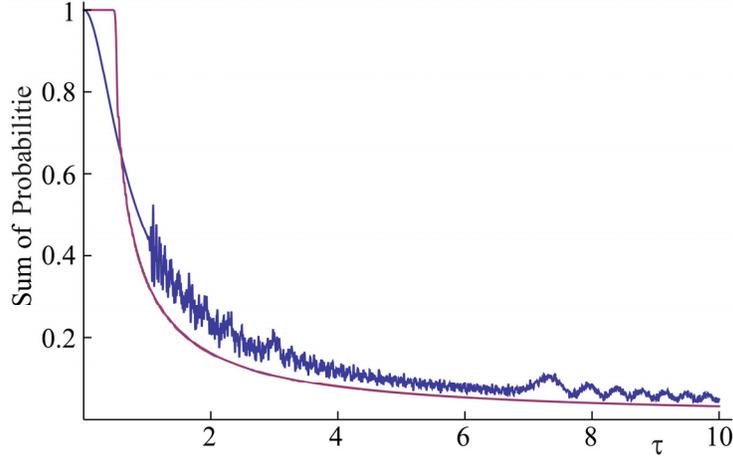


Рис.2. Сумма вероятностей всех импульсных состояний атома в поле квантованных встречных волн. Нижняя кривая соответствует классическому аналогу в рекуррентном уравнении (5).

Второе слагаемое в выражении (7) увеличивает сумму вероятностей для умеренных времен взаимодействия до среднего значения примерно два, которое затем очень медленно уменьшается, оставаясь больше единицы. Такое поведение, во первых, обосновывает целесообразность включения второго члена в приближенное выражение амплитуды $\bar{a}_m(\tau)$, а, во вторых, дает возможность увеличить точность формулы введением нормировочного коэффициента $S(\tau)$ согласно соотношению $S(\tau) = \left(\sum_m \bar{a}_m^2(\tau) \right)^{-1/2}$. В результате для амплитуды $a_m(z, t)$ перекачки m фотонов между встречными волнами большого числа фотонов с одновременным изменением импульса атома на $2m\hbar k$ получаем выражение

$$a_m(\tau) = (-i)^m S(\tau) \left[J_m(2\bar{p}_m\tau) + \frac{p_m - p_{m+1}}{2} \times \int_0^\tau (J_{m-1}(2\bar{p}_m\tau) + J_{m+1}(2\bar{p}_m\tau)) d\tau \right]. \quad (8)$$

Для расчетных целей удобно с помощью известной формулы

$$\int J_n(x) dx = 2 \sum_{s=0}^{\infty} J_{n+2s+1}(x)$$

перейти от неопределенного интеграла к ряду от бесселевых функций. Тогда искомая амплитуда представится в виде

$$a_m(\tau) = (-i)^m S(\tau) \left[J_m(2\bar{p}_m\tau) + \frac{p_m - p_{m+1}}{p_m + p_{m+1}} \right. \\ \left. \times \left(J_m(2\bar{p}_m\tau) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (J_{m+2s}(2\bar{p}_m\tau) - \delta_{m+2s,0}) - \delta_{m,0} \right) \right].$$

Рис.2 указывает, что сильного отклонения результатов полученных приближенных формул от точных значений следует ожидать только при приближении к границам $m = -n_2$ и $m = n_1$. Что касается представляющих основной интерес промежуточной области значений m , то отклонение от точных численных решений уравнения (5) при фиксированных значениях n_1 и n_2 зависит от времени взаимодействия. Отклонение при $n_{1,2} = 20$ мало вплоть до значения аргумента функции Бесселя $2\bar{p}_m\tau \approx 5$, а потом медленно увеличивается. При увеличении числа фотонов $n_{1,2}$ граница применимости выведенных формул смещается в сторону больших времен.

4. О роли некоммутативности операторов рождения и уничтожения фотона

В полученных представлениях амплитуд состояний можно явным образом проследить различие между двумя понятиями квантования поля. Первое – как появление дискретности, при котором, однако, не постулируется некоммутативность между операторами рождения и уничтожения фотонов. Второе – истинная процедура квантования. Первый является воображаемой ситуацией того, что мы имели бы, если фотоны не обладали бы бозонным характером, подчинились бы не статистике Бозе-Эйнштейна, а статистике Больцмана. В математической формулировке это привело бы к отсутствию единиц в выражениях p_m и p_{m+1} и, соответственно, к исчезновению второго слагаемого в выражении (8). Назвав такую амплитуду больцмановской, будем иметь

$$a_{B,m}(\tau) = S_B(\tau) J_m(2p_{B,m}\tau), \quad (9)$$

где $p_{B,m} = \sqrt{(n_1 - m)(n_2 + m)}$.

На Рис.3 совместно построены истинная и больцмановская амплитуды при числе переведенных между встречными волнами фотонов $m = 10$. Отличие, значительное уже в области умеренных времен, легко может быть экспериментально обнаружено и может служить отличным от ранее известных методов обоснованием бозонного характера фотонов.

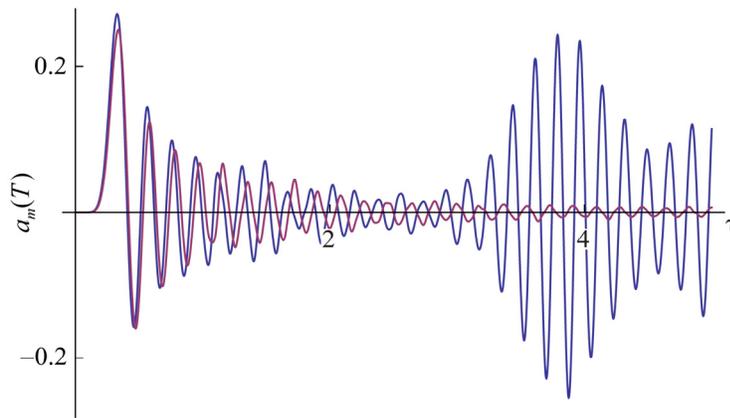


Рис.3. Временная эволюция вероятности переброса $m = 10$ фотонов между встречными квантованными волнами при взаимодействии с атомом с учетом и без учета бозонного характера фотонов. Начальные числа фотонов во встречных волнах $n_1 = 20$ и $n_2 = 20$, соответственно.

5. Заключение

Вторичное квантование плоского монохроматического электромагнитного поля проведено на базисе бегущих волн. Для изучения временной эволюции возможных заполнений базисных встречных мод при взаимодействии с атомом выведена формула в приближении Рамана-Ната, которое в гамильтониане пренебрегает оператором кинетической энергии атома. Показано, что из выражения можно исключить бозонный характер фотонов. Отличие оказывается значимым, его экспериментальное обнаружение может служить дополнительным и независимым подтверждением бозонного характера фотонного поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН Армении в Лаборатории исследования и моделирования квантовых явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **D.F. Walls, G.J. Milburn.** Quantum Optics. Berlin, Springer-Verlag, 2008.
2. **Г.А. Мурадян, Л.Р. Арзуманян, А.Ж. Мурадян.** Изв. НАН Армении, Физика, **53**, 251 (2018).
3. **B.W. Shore, P. Meystre, S. Stenholm.** J. Opt. Soc. Am. B, **8**, 903 (1991).
4. **P. Domokos, P. Adam, J. Janszky, A. Zeilinger.** Phys. Rev. Lett., **77**, 1663 (1996).
5. **C.J. Hood, M.S. Chapman, T.W. Lynn, H.J. Kimble.** Phys. Rev. Lett., **80**, 4157 (1998).
6. **А.Ж. Мурадян.** Изв. АН Арм. ССР, Физика, **10**, 361 (1975).
7. **G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre.** Introduction to Quantum Optics. Cambridge, Cambridge University Press, 2010.

8. **A.M. Herkommer, V.M. Akulin, W.P. Schleich.** Phys. Rev. Lett., **69**, 3298 (1992).
9. **B. Macke.** Opt. Commun., **28**, 131 (1979).
10. **А.Ж. Мурадян.** Изв. АН Арм.ССР, Физика, **20**, 206 (1985).
11. **C. Gardiner, P. Zoller.** The Quantum World of Ultra-Cold Atoms and Light. Book II: The Physics of Quantum-Optical Devices. London, Imperial College Press, 2015.
12. **A.F. Bernhardt, B.W. Shore.** Phys. Rev. A, **23**, 1290 (1981).
13. **E. Arimondo, A. Bambini, S. Stenholm.** Phys. Rev. A, **24**, 898 (1981).
14. **M.O. Scully, M.S. Zubairy.** Quantum Optics. Cambridge, Cambridge University Press, 2001.
15. **A.D. Cronin, J. Schmiedmayer, D.E. Pritchard.** Rev. Mod. Phys., **81**, 1051 (2009).

ԵՐԿՄԱԿԱՐԴԱԿ ԱՏՈՄԻ ԵՎ ՄԵԾ ԹՎՈՎ ՀԱՆԴԻՊԱԿԱՑ ՖՈՏՈՆՆԵՐԻ
ՍՈՒՊԵՐՊՈԶԻՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԲԱՆԱԶԵՎ

Գ.Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, Լ.Ռ. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, Ա.Շ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Դուրս է բերված երկմակարդակ ատոմի և նրա հետ փոխազդող հանդիպակաց մեծաթիվ ֆոտոնների ժամանակային էվոլյուցիան նկարագրող մոտավոր բանաձև: Այն հանդիսանում է Կապիցա-Դիրակի էֆեկտում դիֆրակցիոն ցրման ամպլիտուդի բանաձևի Ռաման-Նաթի մոտավորության բնական ընդհանրացումը: Դուրս բերված բանաձևի կիրառելիությունը ենթադրում է $n_{1,2} \approx 20$ -ից ավելի թվով ֆոտոններ հանդիպակաց փնջերից յուրաքանչյուրում:

APPROXIMATE FORMULA FOR SUPERPOSITION STATE OF TWO LEVEL ATOM AND LARGE NUMBER OF COUNTERPROPAGATING PHOTONS

G.A. MURADYAN, L.R. ARZUMANYAN, A.ZH. MURADYAN

An approximate formula is derived describing time evolution of the state of two level atom and interacting with him large number of counterpropagating photons. It is a natural generalization of the diffraction scattering amplitude formula in resonant Kapitza-Dirac effect in the Raman-Nath approximation. The applicability of derived formula assumes more than $n_{1,2} \approx 20$ photons in the each of counterpropagating beams.