

УДК 530.145

ИНДУЦИРОВАННАЯ ГРАНИЦЕЙ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА С КОМПАКТНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

А.А. СААРЯН*, Д.А. СИМОНЯН, А.С. КОТАНДЖЯН

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: saharian@ysu.am

(Поступила в редакцию 19 ноября 2018 г.)

Исследовано вакуумное среднее квадрата комплексного скалярного поля, индуцированное границей в пространстве де Ситтера с произвольным числом тороидально компактифицированных измерений. На границе поле удовлетворяет условию Робина, а вдоль компактных измерений наложены условия квазипериодичности с произвольными фазами. В выражении для вакуумного среднего явно выделена часть, обусловленная наличием границы, и исследовано ее поведение в различных асимптотических областях параметров задачи.

1. Введение

Пространство-время де Ситтера является максимально симметричным решением описывающих гравитационное поле уравнений Эйнштейна с положительной гравитационной постоянной в качестве единственного источника и играет важную роль в современной космологии. Во многих инфляционных моделях, описывающих ускоренное расширение Вселенной в ранних стадиях эволюции, фоновая геометрия принимается квази-де ситтеровской (см., например, [1]). В рамках этих моделей удастся преодолеть ряд трудностей теории горячей Вселенной. Квантовые флуктуации скалярного поля в инфляционной стадии расширения приводят к генерации первичных неоднородностей в распределении вещества в ранней Вселенной, которые хорошо согласуются с наблюдательными данными об анизотропии температуры реликтового излучения. Аналогичным образом квантовые флуктуации электромагнитного поля генерируют космологические магнитные поля [2, 3]. Современные наблюдательные данные о расширении Вселенной свидетельствуют о том, что в настоящую эпоху расширение является ускоренным [4–6]. В рамках общей теории относительности это предполагает наличие гравитационного источника с отрицательным эффективным давлением, энергия которого доминирует в космологических масштабах (темная энергия).

Одной из наиболее простых и популярных моделей такого типа энергии является положительная космологическая постоянная. В этих моделях пространство-время де Ситтера выступает в качестве аттрактора будущего в эволюции Вселенной.

Пространство де Ситтера является одной из наиболее популярных геометрий в квантовой теории поля. Благодаря высокой симметрии, многие задачи теории поля точно решаются на фоне этого многообразия. В настоящей работе исследованы квантовые эффекты для заряженного скалярного поля, обусловленные нетривиальной топологией и наличием границ. Имея в виду приложения к моделям типа Калуцы-Клейна будет рассмотрено пространство де Ситтера произвольной размерности. Последние приводят к эффекту Казимира для вакуумных средних физических величин [7–9]. Вакуумные средние тензора энергии-импульса для скалярных и фермионных полей в пространстве де Ситтера с тороидальными пространственными измерениями ранее рассматривались в [10–13]. Для заряженных полей вакуумные плотности тока вдоль компактных измерений исследованы в работе [14]. Вакуумные плотности в эффекте Казимира на фоне пространства-времени Минковского с компактными измерениями рассмотрены в [15–17]. Вакуумное среднее тензора энергии-импульса заряженного скалярного поля в пространстве де Ситтера с компактными измерениями исследовано в [18].

2. Двухточечная функция Адамара

В рассматриваемой задаче фоновая геометрия описывается $(D + 1)$ -мерным интервалом

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t/\alpha} \sum_{l=1}^D (dx^l)^2. \quad (2.1)$$

В случае тривиальной топологии этот линейный элемент соответствует части пространства-времени де Ситтера, покрытой плоскими координатами x^l . Параметр α выражается через космологическую постоянную Λ как $\Lambda = D(D-1)\alpha^{-2}/2$. Рассматриваемая в настоящей работе топология отличается от топологии пространства-времени де Ситтера. Для координат $\mathbf{x}_p = (x^1, \dots, x^p)$, как обычно, полагаем $-\infty < x^l < \infty$, $l = 1, \dots, p$, в то время как координаты $\mathbf{x}_q = (x^{p+1}, \dots, x^D)$, с $q = D - p$, компактифицированы на окружности с длинами L_l : $0 \leq x^l \leq L_l$, $l = p+1, \dots, D$. Следовательно, рассматривается пространственная топология $R^p \times (S^1)^q$. Ниже, помимо временной координаты t , используется конформное время $\tau = -\alpha e^{-t/\alpha}$ с $-\infty < \tau < 0$. Соответствующий интервал принимает конформно-плоский вид с конформным множителем $(\alpha/\tau)^2$: $ds^2 = (\alpha/\tau)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, где $\eta_{\mu\nu}$ метрический тензор пространства-времени Минковского.

Нас интересует изменение свойств вакуумного состояния для комплексного скалярного поля $\varphi(x)$, индуцированное нетривиальной топологией и наличием плоской границы $x^p = 0$, на которой поле удовлетворяет условию Робина

$$(1 + \beta \partial_{x^p})\varphi = 0, \quad x^p = 0, \quad (2.2)$$

с постоянным коэффициентом β . Рассматриваемая граница может служить простой моделью доменной стенки в теории поля. Вакуумные средние симметричны относительно границы и ниже, для определенности, будем рассматривать область $x^p > 0$. При наличии классического абелевого калибровочного поля A_μ уравнение поля принимает вид

$$(D_\mu D^\mu + m^2 + \xi R)\varphi(x) = 0, \quad (2.3)$$

где ξ – параметр связи с кривизной, R – скаляр Риччи, а $D_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$ – калибровочно-инвариантная ковариантная производная.

В дополнение к уравнению поля и граничному условию (2.2) необходимо также задание условий периодичности вдоль компактных измерений. Ниже рассматриваются квазипериодические условия

$$\varphi(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q + L_l \mathbf{e}_l) = e^{i\alpha_l} \varphi(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q), \quad (2.4)$$

с постоянными фазами α_l , где $\mathbf{e}_l$ – единичный вектор вдоль размерности x^l , $l = p+1, \dots, D$. Наиболее часто обсуждаемые в литературе частные случаи нескрученных и скрученных скалярных полей (периодические и антипериодические условия) соответствуют $\alpha_l = 0$ и $\alpha_l = \pi$, соответственно.

Рассмотрим простейшую конфигурацию калибровочного поля с $A_\mu = \text{const}$. В этом случае это поле можно исключить из уравнения (2.3) калибровочным преобразованием

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega, \quad \varphi'(x) = e^{-ie\omega} \varphi(x), \quad \omega = -A_\mu x^\mu. \quad (2.5)$$

В новой калибровке имеем $A'_\mu = 0$ и $D'_\mu = \nabla_\mu$. Теперь условия квазипериодичности запишутся в виде

$$\varphi'(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q + L_l \mathbf{e}_l) = e^{i\tilde{\alpha}_l} \varphi'(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q), \quad (2.6)$$

где

$$\tilde{\alpha}_l = \alpha_l + eA_l L_l. \quad (2.7)$$

Физические эффекты зависят от фаз в условиях периодичности и от калибровочного потенциала через комбинацию (2.7). Заметим, что если $\mathbf{A}$ – пространственный вектор с D компонентами, соответствующий пространственно-временному вектору A_μ , то $\mathbf{A}_l = -A_l$. Хотя соответствующая напряженность

поля равна нулю, постоянное калибровочное поле сдвигает фазы в условиях периодичности вдоль компактных измерений. Это приводит к аналогу эффекта Ааронова-Бома. Сдвиг, обусловленный калибровочным полем, можно представить в виде $eA_l L_l = -e\mathbf{A}_l L_l = -2\pi\Phi_l / \Phi_0$, где $\Phi_0 = 2\pi / e$ – квант магнитного потока, а Φ_l – поток, охватываемый окружностью, соответствующей l -ой компактной размерности. В дальнейшем мы будем работать с калибровочно-преобразованным полем $\phi'(x)$, опуская штрихи.

Свойства вакуумного состояния определяются двухточечными функциями. Здесь мы рассмотрим функцию Адамара, определенную как вакуумное среднее

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi^+(x') + \phi^+(x') \phi(x) | 0 \rangle, \quad (2.8)$$

где $|0\rangle$ – вакуумное состояние. Пусть $\{\phi_\sigma^{(\pm)}(x)\}$ полный набор решений уравнения поля, удовлетворяющих граничному условию (2.2) и условиям квазипериодичности вдоль компактных измерений. Разлагая оператор поля по этим решениям и воспользовавшись определением вакуумного состояния, функцию Адамара представим в виде суммы по модам:

$$G^{(1)}(x, x') = \sum_{\sigma} \sum_{m=\pm} \phi_\sigma^{(m)}(x) \phi_\sigma^{(m)*}(x'). \quad (2.9)$$

Здесь σ – коллективное обозначение для набора квантовых чисел, определяющих решения. Следовательно, для вычисления функции Адамара необходимо знание мод $\phi_\sigma^{(\pm)}(x)$.

В рассматриваемой задаче моды, реализующие вакуумное состояние Банча-Девиса, имеют вид

$$\phi_\sigma^{(+)}(x) = C_\sigma^{(+)} \eta^{D/2} H_\nu^{(1)}(K\eta) \cos(k_p x^p + \alpha(k_p)) e^{i\mathbf{k}_{p-1} \mathbf{x}_{p-1} + i\mathbf{k}_q \mathbf{x}_q}, \quad (2.10)$$

и $\phi_\sigma^{(-)}(x) = \phi_\sigma^{(+)*}(x)$. Здесь $\eta = |\tau|$, $H_\nu^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля первого рода, $\mathbf{k}_{p-1} = (k_1, \dots, k_{p-1})$, $\mathbf{x}_{p-1} = (x^1, \dots, x^{p-1})$, $\mathbf{k}_q = (k_{p+1}, \dots, k_D)$, $K = \sqrt{\mathbf{k}_{p-1}^2 + k_p^2 + \mathbf{k}_q^2}$,

$$\nu = \sqrt{D^2 / 4 - D(D+1)\xi - m^2 \alpha^2}, \quad (2.11)$$

а функция $\alpha(k_p)$ определяется соотношением

$$e^{2i\alpha(k_p)} = \frac{i\beta k_p - 1}{i\beta k_p + 1}. \quad (2.12)$$

Моды (2.10) удовлетворяют граничному условию (2.2). Для компонент импульса вдоль некомпактных измерений имеем $-\infty < k_l < +\infty$ при $l = 1, \dots, p$, и $0 \leq x^p < +\infty$. Компоненты вдоль компактных измерений квантуются условиями периодичности (2.6):

$$k_l = (2\pi n_l + \tilde{\alpha}_l) / L_l, \quad n_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.13)$$

где $l = p+1, \dots, D$. Следовательно, для набора квантовых чисел σ имеем $\sigma = (\mathbf{k}_p, \mathbf{n}_q)$, где $\mathbf{k}_p = (\mathbf{k}_{p-1}, k_p)$ и $\mathbf{n}_q = (n_{p+1}, \dots, n_D)$.

Коэффициент $C^{(+)}$ определяется из условия ортонормировки

$$\int d^D x \sqrt{|g|} \left[\left(\varphi_{\sigma}^{(+)}(x) \partial_i \varphi_{\sigma'}^{(+)*}(x) - \varphi_{\sigma'}^{(+)*}(x) \partial_i \varphi_{\sigma}^{(+)}(x) \right) \right] = i \delta(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}'_p) \delta_{\mathbf{n}_q, \mathbf{n}'_q}, \quad (2.14)$$

где g — определитель метрического тензора, соответствующего (2.1), $|g| = e^{2Dr/\alpha}$. Подставляя моды из (2.10) и используя Вронскиан функций Ханкеля, можно показать, что

$$|C_{\sigma}^{(+)}|^2 = \frac{e^{(v-v^*)\pi i/2}}{2^p \pi^{p-1} V_q \alpha^{D-1}}, \quad (2.15)$$

где $V_q = \prod_{l=p+1}^D L_l$ — объем компактного подпространства.

Имея полный набор мод, для функции Адамара из (2.9) получим представление

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, x') &= \frac{(\eta \eta')^{D/2} e^{(v-v^*)\pi i/2}}{2^p \pi^{p-1} V_q \alpha^{D-1}} \int d\mathbf{k}_{p-1} e^{i\mathbf{k}_{p-1} \Delta \mathbf{x}_{p-1}} \sum_{\mathbf{n}_q} e^{i\mathbf{k}_q \Delta \mathbf{x}_q} \\ &\times \int_0^\infty dk_p \cos[k_p x^p + \alpha(k_p)] \cos[k_p x'^p + \alpha(k_p)] \\ &\times \left[H_{\mathbf{v}}^{(1)}(K\eta) H_{\mathbf{v}^*}^{(2)}(K\eta') + H_{\mathbf{v}^*}^{(2)}(K\eta) H_{\mathbf{v}}^{(1)}(K\eta') \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Эта функция может быть разделена на две части:

$$G^{(1)}(x, x') = G_0^{(1)}(x, x') + G_b^{(1)}(x, x'), \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} G_0^{(1)}(x, x') &= \frac{(\eta \eta')^{D/2} e^{(v-v^*)\pi i/2}}{2^{p+1} \pi^{p-1} V_q \alpha^{D-1}} \int d\mathbf{k}_{p-1} e^{i\mathbf{k}_{p-1} \Delta \mathbf{x}_{p-1}} \sum_{\mathbf{n}_q} e^{i\mathbf{k}_q \Delta \mathbf{x}_q} \int_0^\infty dk_p \\ &\times \cos(k_p \Delta x^p) \left[H_{\mathbf{v}}^{(1)}(K\eta) H_{\mathbf{v}^*}^{(2)}(K\eta') + H_{\mathbf{v}^*}^{(2)}(K\eta) H_{\mathbf{v}}^{(1)}(K\eta') \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

функция Адамара для локально де-ситтеровского пространства-времени с компактными размерностями при отсутствии границ, а

$$\begin{aligned} G_b^{(1)}(x, x') &= \frac{(\eta \eta')^{D/2} e^{(v-v^*)\pi i/2}}{2^{p+1} \pi^{p-1} V_q \alpha^{D-1}} \int d\mathbf{k}_{p-1} e^{i\mathbf{k}_{p-1} \Delta \mathbf{x}_{p-1}} \sum_{\mathbf{n}_q} e^{i\mathbf{k}_q \Delta \mathbf{x}_q} \int_0^\infty dk_p \\ &\times \cos[k_p (x^p + x'^p) + 2\alpha(k_p)] \\ &\times \left[H_{\mathbf{v}}^{(1)}(K\eta) H_{\mathbf{v}^*}^{(2)}(K\eta') + H_{\mathbf{v}^*}^{(2)}(K\eta) H_{\mathbf{v}}^{(1)}(K\eta') \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

индуцирована наличием границы $x^p = 0$. Здесь нас интересуют эффекты, индуцированные границей и соответствующие вкладу (2.19).

Для дальнейшего преобразования этого вклада, вместо функций Ханкеля удобно ввести модифицированную функцию Бесселя $K_\nu(z)$ (функцию Макдональда). С помощью последней функция (2.19) записывается в виде

$$G_b^{(1)}(x, x') = \frac{2^{1-p}(\eta\eta')^{D/2}}{\pi^{p+1}V_q\alpha^{D-1}} \int d\mathbf{k}_{p-1} e^{i\mathbf{k}_{p-1}\Delta\mathbf{x}_{p-1}} \sum_{\mathbf{n}_q} e^{i\mathbf{k}_q\Delta\mathbf{x}_q} \times \int_0^\infty dk_p \cos[k_p(x^p + x'^p) + 2\alpha(k_p)] \times [K_\nu(K\eta e^{-\pi/2})K_\nu(K\eta' e^{\pi/2}) + K_\nu(K\eta e^{\pi/2})K_\nu(K\eta' e^{-\pi/2})]. \quad (2.20)$$

Из определения функции $\alpha(k_p)$ следует, что

$$2\cos[k_p(x^p + x'^p) + 2\alpha(k_p)] = e^{ik_p(x^p + x'^p)} \frac{i\beta k_p - 1}{i\beta k_p + 1} + e^{-ik_p(x^p + x'^p)} \frac{i\beta k_p + 1}{i\beta k_p - 1}. \quad (2.21)$$

Подставляя это в (2.20), мы вращаем контур интегрирования по k_p в комплексной плоскости на угол $\pi/2$ для слагаемого с $e^{ik_p(x^p + x'^p)}$ и на угол $-\pi/2$ для слагаемого с $e^{-ik_p(x^p + x'^p)}$. При $\beta \leq 0$ соответствующие подынтегральные выражения не имеют полюсов в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Используя соотношение [19]

$$K_\nu(ze^{\pm\pi i}) = e^{\mp\nu\pi i} K_\nu(z) \mp \pi i I_\nu(z) \quad (2.22)$$

с модифицированной функцией Бесселя $I_\nu(z)$, функция (2.20) представляется в виде

$$G_b^{(1)}(x, x') = \frac{(\eta\eta')^{D/2}}{2^p \pi^p V_q \alpha^{D-1}} \int d\mathbf{k}_{p-1} e^{i\mathbf{k}_{p-1}\Delta\mathbf{x}_{p-1}} \sum_{\mathbf{n}_q} e^{i\mathbf{k}_q\Delta\mathbf{x}_q} \int_k^\infty du e^{-u(x^p + x'^p)} \frac{\beta u + 1}{\beta u - 1} \times \{K_\nu(\eta u)[I_{-\nu}(\eta' u) + I_\nu(\eta' u)] + [I_{-\nu}(\eta u) + I_\nu(\eta u)]K_\nu(\eta' u)\}_{y=\sqrt{u^2 - k^2}}, \quad (2.23)$$

где $k = \sqrt{\mathbf{k}_{p-1}^2 + \mathbf{k}_q^2}$. Дальнейшее исследование вакуумного среднего квадрата поля основано на этой формуле.

3. Вакуумное среднее квадрата поля

Одной из важных локальных характеристик вакуумного состояния является среднее значение квадрата поля. Для заданной функции Адамара это среднее можно вычислить с помощью формулы

$$\langle \phi\phi^+ \rangle = \frac{1}{2} \lim_{x' \rightarrow x} G^{(1)}(x, x'). \quad (3.1)$$

Аналогично функции Адамара, вакуумное среднее квадрата поля может быть представлено в виде суммы

$$\langle \phi\phi^+ \rangle = \langle \phi\phi^+ \rangle_0 + \langle \phi\phi^+ \rangle_b, \quad (3.2)$$

где $\langle \phi\phi^+ \rangle_0$ – вакуумное среднее для пространства-времени де Ситтера с компактными измерениями при отсутствии границ, а $\langle \phi\phi^+ \rangle_b$ индуцировано границей $x^p = 0$. Вклад $\langle \phi\phi^+ \rangle_0$ исследован в работе [20]. Здесь нас в основном интересует часть, обусловленная границей. Для точек вне границы расходимости в пределе совпадения аргументов содержатся только в слагаемом $\langle \phi\phi^+ \rangle_0$ и перенормировка требуется только для него. Соответствующее среднее не зависит от пространственных координат.

Для вклада границы из соответствующего выражения (2.23) для функции Адамара получаем

$$\begin{aligned} \langle \phi\phi^+ \rangle_b &= \frac{2^{-p} \eta^D}{\pi^p V_q \alpha^{D-1}} \\ &\times \int d\mathbf{k}_{p-1} \sum_{\mathbf{n}_q} \int_0^\infty du f(u, x^p) K_\nu(\eta y) [I_{-\nu}(\eta y) + I_\nu(\eta y)]_{y=\sqrt{u^2-k^2}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$f(u, x^p) = \frac{e^{-2ux^p}}{u} \frac{\beta u + 1}{\beta u - 1}. \quad (3.4)$$

После интегрирования по угловой части вектора $\mathbf{k}_{p-1}$ вакуумное среднее принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \phi\phi^+ \rangle_b &= \frac{2^{1-p} \pi^{-(p+1)/2} \eta^D}{\Gamma((p-1)/2) V_q \alpha^{D-1}} \int_0^\infty dy y K_\nu(\eta y) [I_{-\nu}(\eta y) + I_\nu(\eta y)] \\ &\times \sum_{\mathbf{n}_q} \int_0^\infty dk_{(p-1)} k_{(p-1)}^{p-2} f(\sqrt{y^2 + k^2}, x^p), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $k_{(p-1)} = |\mathbf{k}_{p-1}|$. Для дальнейшего преобразования введем полярные координаты (r, θ) в плоскости $(k_{(p-1)}, y)$. Переходя к новой переменной интегрирования $z = \cos \theta$, находим

$$\langle \phi\phi^+ \rangle_b = \frac{2^{1-p} \pi^{-(p+1)/2} \eta^D}{\Gamma((p-1)/2) V_q \alpha^{D-1}} \sum_{\mathbf{n}_q} \int_0^\infty dr r^p f(\sqrt{r^2 + k_{\mathbf{n}_q}^2}, x^p) h_\nu(\eta r), \quad (3.6)$$

где введена функция

$$h_\nu(u) = \int_0^1 dz z (1-z^2)^{(p-3)/2} K_\nu(uz) [I_{-\nu}(uz) + I_\nu(uz)], \quad (3.7)$$

и

$$k_{\mathbf{n}_q}^2 = \sum_{l=p+1}^D (2\pi n_l + \tilde{\alpha}_l)^2 / L_l^2. \quad (3.8)$$

Отсюда, в частности, следует, что вакуумное среднее квадрата поля является периодической функцией магнитного потока с периодом, равным кванту магнитного потока. Это среднее зависит от переменных η , L_l , x^p через безразмерные отношения L_l / η и x^p / η , что является следствием максимальной симметрии пространства де Ситтера.

Для конформно связанного безмассового скалярного поля имеем $\nu = 1/2$, и модифицированные функции Бесселя в (3.7) выражаются через элементарные функции: $K_{1/2}(x)[I_{-1/2}(x) + I_{1/2}(x)] = 1/x$. Для функции (3.7) получаем

$$h_{1/2}(u) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma((p-1)/2)}{2\Gamma(p/2)u}, \quad (3.9)$$

и граничная часть вакуумного среднего сводится к

$$\langle \phi\phi^+ \rangle_b = \frac{(\eta/\alpha)^{D-1}}{(4\pi)^{p/2}\Gamma(p/2)V_q} \sum_{\mathbf{n}_q} \int_{k_{\mathbf{n}_q}}^{\infty} dr (r^2 - k_{\mathbf{n}_q}^2)^{p/2-1} e^{-2rx^p} \frac{\beta r + 1}{\beta r - 1}. \quad (3.10)$$

В этом частном случае рассматриваемая задача конформно связана с соответствующей задачей в пространстве-времени Минковского с компактными измерениями. Выражение (3.10) можно было бы непосредственно получить из соответствующего результата, используя конформное соотношение $\langle \phi\phi^+ \rangle_b = (\eta/\alpha)^{D-1} \langle \phi\phi^+ \rangle_b^M$.

Выражение для вакуумного среднего квадрата поля упрощается для частных случаев граничных условий Дирихле и Неймана со значениями коэффициента $\beta = 0$ и $\beta = \infty$, соответственно. В этих случаях интеграл по $k_{(p-1)}$ выражается через функцию Макдональда $K_\nu(x)$ и мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \phi\phi^+ \rangle_b = \mp \frac{2\eta^D (2x^p)^{2-p}}{(2\pi)^{p/2+1} V_q \alpha^{D-1}} \int_0^\infty dy y K_\nu(\eta y) [I_{-\nu}(\eta y) + I_\nu(\eta y)] \\ \times \sum_{\mathbf{n}_q} g_{p/2-1}(2x^p \sqrt{y^2 + k_{\mathbf{n}_q}^2}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют граничным условиям Дирихле и Неймана и введено обозначение

$$g_\nu(x) = x^\nu K_\nu(x). \quad (3.12)$$

Перейдем теперь к исследованию граничной части вакуумного среднего $\langle \phi\phi^+ \rangle_b$ в асимптотических областях значений отношения x^p / η . Последнее представляет собой собственное расстояние от границы $\alpha x^p / \eta$, измеренное в единицах радиуса кривизны α . При малых значениях этого отношения, $x^p / \eta \ll 1$, основной вклад в интеграл (3.6) дает область интегрирования, где

аргументы модифицированных функций Бесселя принимают большие значения. Используя соответствующие асимптотические выражения, можно показать, что $[I_{-\nu}(x) + I_{\nu}(x)]K_{\nu}(x) \approx 1/x$ при $x \gg 1$. Отсюда следует, что в рассматриваемом приближении главный член в асимптотическом разложении для $\langle \phi\phi^+ \rangle_b$ совпадает с соответствующим результатом для конформно связанного безмассового скалярного поля.

При больших значениях x^p / η основной вклад в интеграл (3.6) дает область интегрирования, где аргументы модифицированных функций Бесселя малы. Два случая следует рассматривать отдельно. Для вещественных значений параметра ν имеет место асимптотика

$$[I_{-\nu}(x) + I_{\nu}(x)]K_{\nu}(x) \approx \frac{1}{2} \frac{(2/x)^{2\nu} \Gamma(\nu)}{\Gamma(1-\nu)}, \quad (3.13)$$

при $x \ll 1$. После вычисления интеграла в выражении для функции $h_{\nu}(u)$ вакуумное среднее квадрата поля представится как

$$\begin{aligned} \langle \phi\phi^+ \rangle_b &\approx \frac{2^{2\nu-p-1} \pi^{-(p+1)/2} \Gamma(\nu) \eta^{D-2\nu}}{V_q \Gamma((p+1)/2 - \nu) \alpha^{D-1}} \\ &\times \sum_{\mathbf{n}_q} \int_{k_{\mathbf{n}_q}}^{\infty} dr (r^2 - k_{\mathbf{n}_q}^2)^{(p-1)/2-\nu} e^{-2rx^p} \frac{\beta r + 1}{\beta r - 1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для граничных условий Дирихле и Неймана интеграл выражается через функцию Макдональда:

$$\langle \phi\phi^+ \rangle_b \approx \mp \frac{2^{\nu} \Gamma(\nu) \eta^{D-2\nu} (2x^p)^{\nu+1-p}}{(2\pi)^{p/2+1} V_q \alpha^{D-1}} \sum_{\mathbf{n}_q} k_{\mathbf{n}_q}^{p/2-\nu} K_{p/2-\nu}(2x^p k_{\mathbf{n}_q}). \quad (3.15)$$

Если расстояние от границы намного больше, чем длины компактных измерений, $x^p \gg L_l$, то основной вклад в ряд (3.15) дает слагаемое с наименьшим значением $k_{\mathbf{n}_q}$. При $|\tilde{\alpha}_l| < \pi$ этот член соответствует значениям $n_l = 0$, $l = p+1, \dots, D$. В случае $\tilde{\alpha}_l = 0$, $l = p+1, \dots, D$ получим

$$\langle \phi\phi^+ \rangle_b \approx \mp \frac{2^{2\nu-p} \Gamma(\nu) \Gamma(p/2 - \nu) \eta^{D-2\nu}}{(2\pi)^{p/2+1} V_q \alpha^{D-1} (x^p)^{3p/2-1-2\nu}}. \quad (3.16)$$

Если, по крайней мере, одна из фаз $\tilde{\alpha}_l$ отлична от нуля, то на больших расстояниях от границы главный член разложения принимает вид

$$\langle \phi\phi^+ \rangle_b \approx \mp \frac{2^{2\nu-p} \Gamma(\nu) \eta^{D-2\nu} k_{(0)}^{(p-1)/2-\nu} e^{-2x^p k_{(0)}}}{(2\pi)^{(p+1)/2} V_q \alpha^{D-1} (x^p)^{p-\nu-1/2}}, \quad (3.17)$$

где $k_{(0)}^2 = \sum_{l=p+1}^D (\tilde{\alpha}_l / L_l)^2$. В этом случае граничная часть вакуумного среднего экспоненциально мала.

При больших значениях x^p / η и мнимых v воспользуемся асимптотической формулой

$$[I_{-v}(x) + I_v(x)]K_v(x) \approx \text{Re} \left[\frac{(2/x)^{2i|v|} \Gamma(i|v|)}{\Gamma(1-i|v|)} \right], \quad (3.18)$$

при $x \ll 1$. Для функции $h_v(u)$ получим

$$h_v(u) \approx \frac{1}{2} \Gamma((p-1)/2) \text{Re} \left[\frac{\Gamma(i|v|)(2/u)^{2i|v|}}{\Gamma((p+1)/2-i|v|)} \right]. \quad (3.19)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \langle \phi \phi^+ \rangle_b &\approx \frac{\pi^{-(p+1)/2} \eta^D}{2^p V_q \alpha^{D-1}} \\ &\times \sum_{n_q} \text{Re} \left[\frac{\Gamma(i|v|)(2/\eta)^{2i|v|}}{\Gamma((p+1)/2-i|v|)} \int_0^\infty dr r^{p-2i|v|} f(\sqrt{r^2 + k_{n_q}^2}, x^p) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для граничных условий Дирихле и Неймана после вычисления интеграла находим асимптотическое выражение

$$\begin{aligned} \langle \phi \phi^+ \rangle_b &\approx \mp \frac{\pi^{-p/2-1} \eta^D}{2^p V_q \alpha^{D-1} (x^p)^{p/2}} \\ &\times \sum_{n_q} k_{n_q}^{p/2} \text{Re} \left[\Gamma(i|v|) (4x^p / \eta^2 k_{n_q})^{i|v|} K_{p/2-i|v|}(2x^p k_{n_q}) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Если, дополнительно, $x^p \gg L_l$, при $\tilde{\alpha}_l = 0$, $l = p+1, \dots, D$ получаем

$$\langle \phi \phi^+ \rangle_b \approx \mp \frac{\pi^{-p/2-1} A_p \eta^D}{2^{p+1} V_q \alpha^{D-1} (x^p)^p} \cos[2|v| \ln(2x^p / \eta) + \phi_1], \quad (3.22)$$

где $A_p = |\Gamma(i|v|)\Gamma(p/2-i|v|)|$ и $\phi_1 = \arg(\Gamma(i|v|)\Gamma(p/2-i|v|))$. Заметим, что $|\Gamma(ix)| = [x \sinh(\pi x) / \pi]^{-1/2}$. Если, по крайней мере, одна из фаз $\tilde{\alpha}_l$ отличается от нуля, то для главного члена находим

$$\langle \phi \phi^+ \rangle_b \approx \mp \frac{\pi^{-p/2} \eta^D k_{(0)}^{(p-1)/2} e^{-2x^p k_{(0)}} \cos[|v| \ln(4x^p / \eta^2 k_0) + \phi_2]}{2^{p+1} V_q \alpha^{D-1} (x^p)^{(p+1)/2} \sqrt{|v| \sinh(\pi|v|)}}, \quad (3.23)$$

где $\phi_2 = \arg(\Gamma(i|v|))$. Следовательно, для мнимых v граничная часть вакуумного среднего осциллиционно затухает.

На Рис.1 представлено индуцированное границей вакуумное среднее квадрата поля для конформно связанного скалярного поля ($\xi = (D-1)/4D$) с граничным условием Неймана в модели с $D=4$ с одним компактным измерением длины $L=L_D$. Числа возле кривых соответствуют значениям фазы $\tilde{\alpha}_D / 2\pi$. Численные расчеты проведены для значений $m\alpha = 0.5$, $x^p / \eta = 0.5$. Заметим, что

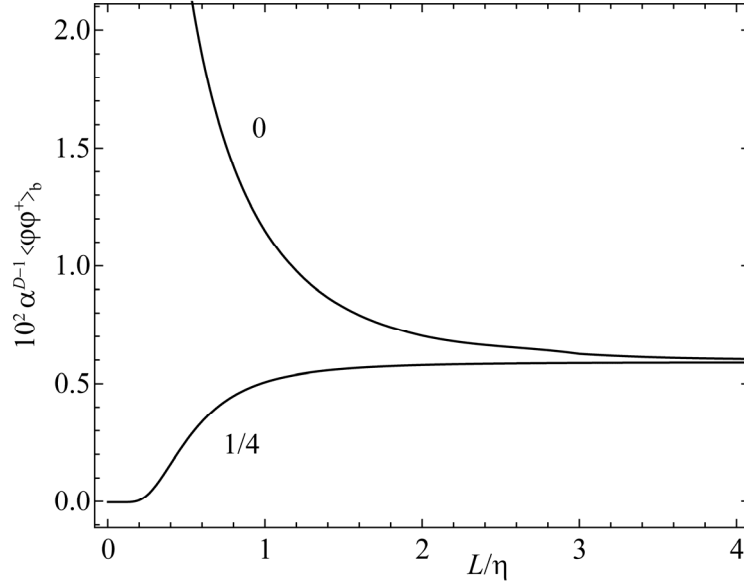


Рис.1. Индуцированное границей вакуумное среднее квадрата поля в зависимости от длины компактного измерения в модели $D = 4$ с одним компактным измерением.

отношение L/η соответствует собственной длине компактной размерности, измеренной в единицах радиуса кривизны α . Как видно из рисунка, поведение вакуумного среднего существенно отличается для периодического ($\tilde{\alpha}_D = 0$) и

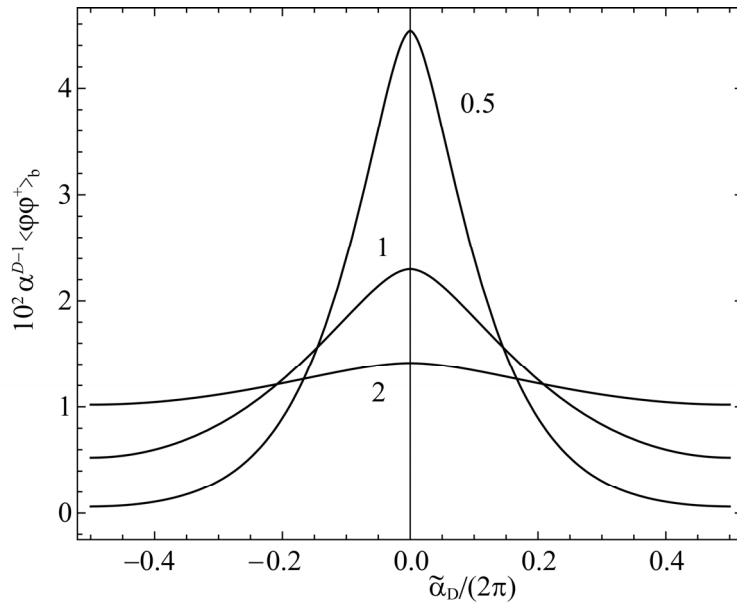


Рис.2. Индуцированное границей вакуумное среднее квадрата поля в зависимости от фазы в условии квазипериодичности.

непериодических условий вдоль компактной размерности. Для той же модели поведение граничной части вакуумного среднего квадрата поля, в зависимости от фазы в условии квазипериодичности, приведено на Рис.2. Числа возле кривых соответствуют значениям отношения L/η . Значения остальных параметров те же, что и на Рис.1.

4. Заключение

В данной работе исследовано воздействие нетривиальной топологии и плоской границы на свойства вакуума заряженного скалярного поля. В рассматриваемой модели эти свойства определяются двухточечными функциями. В качестве таковой была выбрана функция Адамара. Для нее выведено выражение, в котором явно выделена часть, индуцированная границей. Соответствующий вклад в вакуумное среднее квадрата поля дается формулой (3.6). На малых расстояниях от границы эффекты гравитационного поля малы и граничная часть связана с соответствующей величиной на фоне пространства-времени Минковского с нетривиальной топологией простым конформным соотношением. Эффекты гравитационного поля существенны на расстояниях от границы, больших по сравнению с радиусом кривизны пространства-времени. В зависимости от значения параметра ν , поведение граничной части в вакуумном среднем является монотонно или осцилляционно затухающим.

Работа частично выполнена в рамках гранта 18Т-1С355 Комитета по науке Министерства образования и науки РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А.Д. Линде.** Физика элементарных частиц и инфляционная космология. Москва. Наука, 1990.
2. **L. Campanelli.** Phys. Rev. Lett., **111**, 061301 (2013).
3. **L. Campanelli.** Phys. Rev. Lett., **111**, 229002 (2013).
4. **A.G. Riess et al.** Astrophys. J., **659**, 98 (2007).
5. **D.N. Spergel et al.** Astrophys. J. Suppl. Ser., **170**, 377 (2007).
6. **E. Komatsu et al.** Astrophys. J. Suppl. Ser., **180**, 330 (2009).
7. **V.M. Mostepanenko, N.N. Trunov.** The Casimir Effects and Its Applications, Oxford University Press, Oxford, 1997.
8. **K.A. Milton.** The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy, World Scientific, Singapore, 2002.
9. **M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko.** Advances in the Casimir Effect, Oxford University Press, Oxford, 2009.
10. **A.A. Saharian, M.R. Setare.** Phys. Lett. B, **659**, 367 (2008).
11. **S. Bellucci, A.A. Saharian.** Phys. Rev. D, **77**, 124010 (2008).
12. **A.A. Saharian.** Classical Quantum Gravity, **25**, 165012 (2008).

13. **E.R. Bezerra de Mello, A.A. Saharian.** J. High Energy Phys., **04**, 046 (2009).
14. **S. Bellucci, A.A. Saharian, H.A. Nersisyan.** Phys. Rev. D, **88**, 024028 (2013).
15. **T.Sh. Navasardyan, A.A. Saharian.** J. Contemp. Phys. **49**, 1 (2014).
16. **T.Sh. Navasardyan, A.A. Saharian.** J. Contemp. Phys. **49**, 243 (2014).
17. **T.Sh. Navasardyan, A.A. Saharian.** J. Contemp. Phys. **52**, 473 (2017).
18. **E.V. Chubaryan, A.S. Kotanjyan, A.A. Saharian, D.H. Simonyan.** Grav. Cosm., **22**, 187 (2016).
19. **M. Abramowitz, I.A. Stegun.** Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Washington D.C., 1970.
20. **D.H. Simonyan.** Armenian Journal of Physics, **11**(3), 145 (2018).

ՎԱԿՈՒՈՒՄԻ ՄԱՀՄԱՆՈՎ ՄԱԿԱԾՎԱԾ ԲԵՎԵՌԱՑՈՒՄԸ ԿՈՄՊԱԿՏ
ՉԱՓՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԴԵ ՄԻՏՏԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա.Ա. ՄԱՀԱՐՅԱՆ, Դ.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ա.Ս. ԲՈԹԱՆՋՅԱՆ

Հետազոտված է սահմանով մակածված վակուումային միջինը կոմպլեքս սկալյար դաշտի քառակուսու համար կամայական թվով տորոիդալ կոմպակտիֆիկացված չափողականություններով դե Սիտտերի տարածությունում: Սահմանի վրա դաշտը բավարարում է Ռոբինի պայմանին, իսկ կոմպակտ չափողականությունների երկայնքով դրված են կամայական փուլերով քվադիպարբերական պայմաններ: Վակուումային միջինի արտահայտությունում բացահայտ առանձնացված է սահմանով պայմանավորված մասը և հետազոտված է դրա վարքը խնդրի պարամետրերի տարբեր ասիմպտոտական տիրույթներում:

VACUUM POLARIZATION INDUCED BY A BOUNDARY IN DE SITTER SPACE WITH COMPACT DIMENSIONS

A.A. SAHARIAN, D.H. SIMONYAN, A.S. KOTANJYAN

The vacuum expectation value of the field squared is investigated, induced by a planar boundary in de Sitter space-time toroidally compactified dimensions. On the boundary the field obeys Robin condition and along compact dimensions quasiperiodicity conditions are imposed with arbitrary phases. In the expression for the vacuum expectation value the contribution of the boundary is explicitly extracted and its behavior is investigated in various asymptotic regions of the parameters in the problem.