УДК 539.182

ДВУХКОНФЛЮЭНТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ГОЙНА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ БЕССПИНОВОЙ ЧАСТИЦЫ

Г.Г. АЗИЗБЕКЯН^{1,2}, А.М. МАНУКЯН^{1,2},
В.М. МЫХИТАРЯН^{1,2}, А.М. ИШХАНЯН^{1,2, 3*}

¹Российско–Армянский университет, Ереван, Армения

²Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

³Армянский государственный педагогический университет, Ереван, Армения

* e-mail: aishkhanyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 22 августа 2018 г.)

Представлены различные двухконфлюэнтные потенциалы Гойна для стационарного релятивистского волнового уравнения бесспиновой частицы. Физические потенциалы и энергетический спектр этого волнового уравнения связаны с уравнением Шредингера в том смысле, что все потенциалы, полученные для последнего, оказываются пригодными также и в случае рассматриваемого волнового уравнения. Показано, что в отличие от шредингеровского уравнения, характерный пространственный размер потенциала накладывает ограничение на энергетический спектр, что является непосредственным отражением принципа неопределённости. При изучении двухконфлюэнтного гойновского потенциала в виде обратного квадратного корня показано, что принцип неопределённости для связанных состояний ограничивает значение главного квантового числа снизу, т. е. физически реализуемые состояния имеют инфимальный срез и основному состоянию приписывается более высокое значение квантового числа по сравнению со шредингеровским случаем.

1. Введение

Рассматриваются двухконфлюэнтные потенциалы Гойна, допускающие решение стационарного релятивистского волнового уравнения (РВУ) для бесспиновой частицы [1]. Это уравнение, которое получено обобщением принципа инвариантного представления четырёхмерного обобщённого импульса системы «поле + частица», имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с известными аналогичными уравнениями такими, как уравнения Клейна–Гордона и Дирака [2, 3]. Например, в случае задачи водородоподобного атома, РВУ имеет решение при произвольных значениях постоянной взаимодействия, не ограниченной каким-либо порядковым номером атомного ядра (напомним, что для

уравнения Дирака ограничение атомного номера $Z < 137$ [4]). В отличие от шредингеровского уравнения в рассматриваемом уравнении энергетический спектр основного состояния оказывается ограниченным характерным пространственным размером. Это свойство напрямую отражает принцип неопределённости, показывая, что вне зависимости от глубины потенциальной ямы частица может иметь связанное состояние только, если ширина ямы превосходит половину длины волны частицы. Уравнение применимо для различных типов частиц и взаимодействий. Анализ решений показывает полное согласие с принципами релятивистской и квантовой механики, а решения лишены каких-либо ограничений на природу и величину взаимодействий.

В настоящей работе сведением РВУ к двухконфлюэнтному уравнению Гойна [5] посредством соответствующих преобразований независимой и зависимой переменных [6] рассмотрены свойства решений данного волнового уравнения. В результате получены точные решения для потенциалов в виде 5 независимых шестипараметрических двухконфлюэнтных функций Гойна [7, 8]. Среди них есть такой субпотенциал, точное решение для которого записывается через сумму пары функций Эрмита, которые являются намного более изученными функциями по сравнению с двухконфлюэнтными функциями Гойна. Это потенциал с обратным квадратным корнем, определенный в широком интервале и допускающий бесконечное количество связанных состояний [9]. При обсуждении свойств спектра этого потенциала показано, что спектр рассматриваемого РВУ имеет инфимальный срез, то есть главное квантовое число в основном состоянии принимает большее значение по сравнению со шредингеровским случаем.

2. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим одномерное стационарное РВУ для бесспиновой частицы с массой m и энергией E в потенциальном поле $V(x)$ [1]:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{W^2 - (mc^2 + q_0\phi(x))^2 + q_0^2\mathbf{A}^2(x)}{\hbar^2 c^2} \psi = 0, \quad (1)$$

где $\hbar$ – приведенная постоянная Планка, c – скорость света, W – энергия частицы, q_0 – заряд частицы, а функции ϕ и $\mathbf{A}$, соответственно, скалярный и векторный потенциалы. Введем обозначений

$$\frac{W^2 - m^2 c^4}{2mc^2} = E, \quad (2)$$

$$q_0\phi(x) + \frac{q_0^2}{2mc^2} (\phi^2(x) - \mathbf{A}^2(x)) = V(x) \quad (3)$$

уравнение удобнее переписать в привычной форме уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0. \quad (4)$$

Уравнение (3) показывает, что одному и тому же шредингеровскому потенциалу $V(x)$ могут соответствовать различные комбинации скалярного ϕ и векторного $\mathbf{A}$ потенциалов. В случае рассмотрения одного лишь вектор-потенциала уравнение (3) представляется как

$$q_0^2 \mathbf{A}^2(x) = -2mc^2 V(x), \quad V(x) < 0. \quad (5)$$

Разрешая уравнение (3) относительно ϕ , скалярный потенциал представляется в виде

$$q_0\phi(x) = \left(V(x) + \frac{q_0^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2(x) \right) \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{mc^2} \left(V(x) + \frac{q_0^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2(x) \right)}}. \quad (6)$$

Следовательно, если вектор-потенциал не фигурирует в рассматриваемой задаче, то скалярный потенциал $\phi(x)$ будет определяться шредингеровским потенциалом $V(x)$ согласно выражению

$$q_0\phi(x) = V(x) \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2V(x)}{mc^2}}}, \quad V(x) > -\frac{mc^2}{2}. \quad (7)$$

3. ДВУХКОНФЛЮЭНТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ГОЙНА

Есть пять шестипараметрических потенциалов, для которых общее решение одномерного стационарного уравнения Шредингера записывается в виде суммы двухконфлюэнтных функций Гойна [6–8]. Эти потенциалы получаются следующим образом. Применяя преобразование независимой переменной $z = z(x)$, последующим преобразованием зависимой переменной $\psi = \theta(z)u(z)$ уравнение Шредингера приводится к уравнению для новой зависимой переменной $u(z)$, записываемому в виде

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(2\frac{\theta_z}{\theta} + \frac{\rho_z}{\rho} \right) \frac{du}{dz} + \left(\frac{\theta_{zz}}{\theta} + \frac{\rho_z}{\rho} \frac{\theta_z}{\theta} + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{E - V(z)}{\rho^2} \right) u = 0, \quad (8)$$

где $\rho = dz/dx$. Требуя, чтобы уравнение соответствовало канонической форме двухконфлюэнтного уравнения Гойна [5]

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \delta + \varepsilon z \right) \frac{du}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z} u = 0, \quad (9)$$

мы приходим к следующей системе двух связанных уравнений:

$$2 \frac{\theta_z}{\theta} + \frac{\rho_z}{\rho} = \frac{\gamma}{z} + \delta + \varepsilon z, \quad (10)$$

$$\frac{\theta_{zz}}{\theta} + \frac{\rho_z}{\rho} \frac{\theta_z}{\theta} + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{E - V(z)}{\rho^2} = \frac{\alpha z - q}{z}. \quad (11)$$

Согласно рекомендациям работы [8], решение последних уравнений строится путем подстановки $\rho = z^{m_1}$ с целым или полуцелым m_1 . Тогда, решая уравнение (10) относительно θ и подставляя θ в уравнение (11), приходим к пяти независимым двухконфлюэнтным потенциалам Гойна, впервые представленным Лемье и Бозе [7]. Для удобства читателя эти потенциалы приведены в табл.1. Заметим, что все пять потенциалов шестипараметрические, поскольку $V_{0,1,2,3,4}$ являются произвольными и координату x можно заменить на $x - x_0$ с произвольным x_0 . Более того, все параметры потенциала могут быть выбраны комплексными. Это – полезное свойство, поскольку в этом случае можно построить PT -симметричные неэрмитовские потенциалы [10, 11]. В настоящей работе, однако, мы считаем параметры $V_{0,1,2,3,4}$ вещественными и для удобства полагаем $x_0 = 0$.

Решение стационарного шредингеровского уравнения (4) для двухконфлюэнтных гойновских потенциалов явно записывается в виде выражения с двухконфлюэнтной функцией Гойна H_B

$$\psi = z^{\alpha_0} e^{\alpha_1 z + \alpha_2 z^2} H_B(\gamma, \delta, \varepsilon; \alpha, q; z). \quad (12)$$

Выбирая определенный потенциал из табл.1 и используя уравнения, представленные в [8], можно вычислить параметры $\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha, q$, входящие в H_B и

Табл.1. Пять шестипараметрических двухконфлюэнтных потенциалов Гойна ($V_{0,1,2,3,4}$ являются произвольными) и соответствующие координатные преобразования $z = z(x)$ [6–8]

m_1	Двухконфлюэнтный потенциал Гойна $V(x)$	Преобразование координат
-1	$V_0 + V_1/x^{1/2} + V_2/x + V_3/x^{3/2} + V_4/x^2$	$z = (2x)^{1/2}$
-1/2	$V_0 + V_1 x^{2/3} + V_2/x^{2/3} + V_3/x^{4/3} + V_4/x^2$	$z = (3x/2)^{2/3}$
0	$V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + V_3/x + V_4/x^2$	$z = x$
1/2	$V_0 + V_1 x^2 + V_2 x^4 + V_3/x^6 + V_4/x^2$	$z = x^2/4$
1	$V_0 + V_1 e^x + V_2 e^{2x} + V_3 e^{3x} + V_4 e^{4x}$	$z = e^x$

параметры $\alpha_{0,1,2}$ сомножителей решения (12). Однако следует подчеркнуть, что двухконфлюэнтная функция Гойна является довольно сложным в обращении математическим объектом [12,13]. Для преодоления упомянутой сложности можно использовать недавно разработанную технику разложения двухконфлюэнтной функции Гойна в ряд по известным функциям Эрмита [8]. Этим путем можно выявить определенный точно решаемый субпотенциал, для которого разложение содержит только две функции Эрмита нецелого порядка с масштабированным и смещенным аргументом. Это потенциал обратного квадратного корня [9]

$$V = V_0/\sqrt{x} \quad (13)$$

с произвольной силой взаимодействия V_0 (вещественной или комплексной).

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ПОТЕНЦИАЛА ОБРАТНОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Потенциал обратного квадратного корня является дальнедействующим, следовательно его тяготеющий вариант (при $V_0 < 0$) имеет бесконечное количество связанных состояний [9]. Обсуждая энергетический спектр этих состояний, заметим, что согласно уравнению (2), найденный для уравнения Шредингера спектр можно отобразить на соответствующий спектр для уравнения (1) следующим образом

$$W_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{2E_n}{mc^2}}. \quad (14)$$

Точный вид шредингеровского спектра определяется граничными условиями, введенными специально для рассматриваемой задачи. Если волновые функции связанного состояния не стремятся к нулю в начале координат, то можно использовать стандартный набор связанных квазиполиномиальных решений. И хотя подобные решения не применимы в трехмерной квантовой механике [14], все же они могут оказаться полезными в некоторых приложениях (например, [15]). В этом случае, функции Эрмита, участвующие в разложении двухконфлюэнтной функции Гойна, становятся полиномами Эрмита и шредингеровский спектр задается (точно) формулой [9]

$$E_n = \frac{V_0}{2} \left(\frac{-mV_0}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{1}{n^{2/3}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

(напомним, что $V_0 < 0$).

В случае, когда требуется обнуление волновой функции как в начале координат, так и в бесконечности [14], т. е., если $\psi(0) = 0$ и $\psi(+\infty) = 0$, то, как показано в работе [9], шредингеровский спектр с высокой точностью

аппроксимируется следующим выражением

$$E_n \approx \frac{V_0}{2} \left(\frac{-mV_0}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(n - \frac{1}{6} \right)^{-2/3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

с поправочным индексом Маслова $\approx -1/6$ [16, 17].

Обсуждая свойства соответствующего энергетического спектра для РВУ (1), заметим, что потенциал обратного квадратного корня может быть представлен определенной пространственной характерной длиной d в виде

$$V(x) = -mc^2 \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (17)$$

где $\tilde{\lambda} = \hbar/(mc)$ – дебройлевская длина волны частицы и $d \equiv (-mc^2 \tilde{\lambda} / V_0)^2$. В случае нулевого вектор-потенциала два физически реализуемые скалярные потенциала есть

$$q_0 \varphi(x) = -mc^2 \frac{2\tilde{\lambda}/\sqrt{xd}}{1 \pm \sqrt{1 - 2\tilde{\lambda}/\sqrt{xd}}}. \quad (18)$$

Из шредингеровского спектра (15) для квазиполиномиальных волновых функций связанных состояний формулой (14) получаем энергетический спектр для уравнения (1) в виде

$$W_n = -mc^2 \sqrt{1 + \frac{2E_n}{mc^2}} = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}}{nd} \right)^{2/3}}. \quad (19)$$

Как видно из этой формулы, связанные состояния существуют только, если

$$nd > \tilde{\lambda}. \quad (20)$$

Понятно, что это соотношение – прямое отражение принципа неопределенности, который утверждает, что частица не может локализоваться в пространстве размерами меньше дебройлевской длины волны частицы. Далее замечаем, что $n \geq n_0$, где n_0 – это положительное целое число, определяемое как

$$n_0 = \lceil \tilde{\lambda} / d \rceil, \quad (21)$$

в котором загнутые сверху скобки обозначают потолочную функцию. Это ограничение показывает, что волновая функция основного состояния уравнения (1) в общем случае имеет не единственный пик. Действительно, согласно известной осцилляционной теореме [18], у волновой функции n_0 -ого связанного состояния уравнения Шредингера имеется $n_0 - 1$ узлов (если основное состояние рассматривать как первое связанное состояние). Поскольку волновая функция n_0 -ого связанного состояния уравнения Шредингера соответствует волновой функции

основного состояния уравнения (1), можно заключить, что количество экстремумов u волновой функции основного состояния уравнения (1) определяется пространственным характерным размером d . Мы имеем инфимальный срез (отсечка снизу). Это интересное свойство, не встречающееся в других известных релятивистских и нерелятивистских волновых уравнениях (заметим, что в шредингеровском случае волновая функция основного состояния для монотонных сингулярных потенциалов всегда характеризуется единственным пиком).

Определяя спектр для уравнения (1) в случае с волновыми функциями, обнуляющимися как в начале координат, так и в бесконечности, подставляя (16) в (14) и учитывая физическое представление (17) потенциала обратного квадратного корня, получаем

$$W_n \approx -mc^2 \sqrt{1 + \frac{2E_n}{mc^2}} = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\hat{\lambda}}{d(n-1/6)} \right)^{2/3}}. \quad (22)$$

Таким образом, в данном случае инфимальный срез происходит при

$$n_0 = \left\lceil \frac{\hat{\lambda}}{d} + \frac{1}{6} \right\rceil, \quad n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots \quad (23)$$

В заключение отметим, что возможны иные физические задачи с отличными граничными условиями в начале координат. В этих случаях ограничение нижнего значения квантового числа основного состояния изменится на $n > n_0 = \lceil \hat{\lambda}/d - i_M \rceil$, где i_M – соответствующий индекс Маслова для рассматриваемой задачи.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Таким образом, осуществлено преобразование стационарного РВУ для бесспиновой частицы (1) в одномерное стационарное уравнение Шредингера, и надлежащим преобразованием независимой и зависимой переменных последнее уравнение приведено к виду двухконфлюэнтного уравнения Гойна. Физические потенциалы φ , $\mathbf{A}$ и энергетический спектр W_n рассматриваемого волнового уравнения связаны с двухконфлюэнтным потенциалом Гойна V и с соответствующим дискретным спектром E_n .

Показано, что все потенциалы $V(x)$ для одномерного стационарного уравнения Шредингера также пригодны для рассматриваемого уравнения. Соотношение (3) показывает, что многообразие физических потенциалов φ и $\mathbf{A}$ данного уравнения богаче по сравнению с шредингеровским случаем. Также отмечено, что при отсутствии вектор-потенциала $\mathbf{A}$, каждому шредингеровскому потенциалу V всегда соответствуют два скалярных потенциала φ .

Представлены пять двухконфлюэнтных потенциалов Гойна, примечательные тем, что они обобщают все классические гипергеометрические потенциалы (а именно, потенциалы гармонического осциллятора [19], Кулона [20], Кратцера [21] и Морзе [22]), которые широко использовались при становлении и развитии квантовой механики. Рассмотрен потенциал обратного квадратного корня двухконфлюэнтного Гойна $V = V_0/\sqrt{r}$ и представлен соответствующий вид физически реализуемых потенциалов. Обсуждены свойства энергетического спектра связанных состояний волновых функций, обнуляющихся как исключительно в бесконечности, так и в бесконечности и в начале координат одновременно. Заметим, что пространственные параметры и параметры взаимодействия в шредингеровском случае не налагают каких-либо ограничений на энергетический спектр, включая основное состояние. В отличие от этого, как видно из уравнения (14), основное состояние для уравнения (1) ограничивается пространственной характерной длиной. Данное наблюдение напрямую отражает принцип неопределенности Гейзенберга.

Показано, что условие ограничения по пространственному параметру есть $nd > \lambda$. Как следствие, возможные квантовые числа для связанных состояний оказываются ограничены (снизу) значениями, превосходящими типичные значения из уравнения Шредингера, т. е. номер основного состояния начинается с $n_0 = \lceil \lambda/d \rceil$. Этот инфимальный срез физически реализуемых состояний – интересное свойство, не встречающееся в других известных релятивистских и нерелятивистских волновых уравнениях.

Работа выполнена при поддержке Армянского государственного комитета по науке (SCS Grants no. 18RF-139 и no. 18T-1C276), Армянского национального фонда по науке и образованию (ANSEF Grant no. PS-4986), а также Российско–Армянского университета в рамках финансирования со стороны Министерства образования и науки Российской Федерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **В.М. Мыхитарян.** Известия НАН Армении, Физика, **53**, 3 (2018).
2. **Н. Kragh.** Am. J. Phys., **52**, 1024 (1984).
3. **W. Greiner.** Relativistic Quantum Mechanics. Wave equations. Springer, Berlin, 2000.
4. **T. Ohlsson.** Relativistic Quantum Physics – From Advanced Quantum Mechanics to Introductory Quantum Field Theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
5. Heun’s Differential Equations. A. Ronveaux (Ed.). Oxford University Press, London, 1995.
6. **A. Ishkhanyan, V. Krainov.** Eur. Phys. J. Plus, **131**, 342 (2016).
7. **A. Lemieux, A.K. Bose.** Ann. Inst. Henri Poincaré A, **10**, 259 (1969).
8. **T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan.** Ann. Phys., **383**, 79 (2017).
9. **A.M. Ishkhanyan.** EPL, **112**, 10006 (2015).

10. **C.M. Bender, S. Boettcher.** Phys. Rev. Lett., **80**, 5243 (1998).
11. **C.M. Bender.** J. Phys. Conf. Ser., **631**, 012002 (2015).
12. NIST Handbook of Mathematical Functions. F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (Eds.). Cambridge University Press, New York, 2010.
13. **S.Yu. Slavyanov, W. Lay.** Special Functions. Oxford, Oxford University Press, 2000.
14. **M. Znojil.** Phys. Rev. A, **61**, 066101 (2000).
15. **P.G. Silvestrov, K.B. Efetov.** Phys. Rev. B, **77**, 155436 (2008).
16. **C. Quigg, J.L. Rosner.** Phys. Rep., **56**, 167 (1979).
17. **A.M. Ishkhanyan, V.P. Krainov.** JETP Lett., **105**, 43 (2017).
18. **R. Courant, D. Hilbert.** Methods of Mathematical Physics, Vol. 1. New York, Wiley-Interscience, 1989.
19. **E. Schrödinger.** Annalen der Physik, **79**, 489 (1926).
20. **E. Schrödinger.** Annalen der Physik, **76**, 361 (1926).
21. **A. Kratzer.** Z. Phys., **3**, 289 (1920).
22. **P.M. Morse.** Phys. Rev., **34**, 57 (1929).

BI-CONFLUENT HEUN POTENTIALS FOR A STATIONARY RELATIVISTIC
WAVE EQUATION FOR A SPINLESS PARTICLE

H.H. AZIZBEKYAN, A.M. MANUKYAN, V.M. MEKHITARIAN, A.M. ISHKHANYAN

The variety of bi-confluent Heun potentials for a stationary relativistic wave equation for a spinless particle is presented. The physical potentials and energy spectrum of this wave equation are related to those for a corresponding Schrödinger equation in the sense that all the potentials derived for the latter equation are also applicable for the wave equation under consideration. We show that, in contrast to the Schrödinger equation, the characteristic spatial length of the potential imposes a restriction on the energy spectrum that directly reflects the uncertainty principle. Studying the inverse-square-root bi-confluent Heun potential, it is shown that the uncertainty principle limits, from below, the principal quantum number for the bound states, i.e., physically feasible states have an infimum cut so that the ground state adopts a higher quantum number as compared to the Schrödinger case.