Известия НАН Армении, Физика, т.53, №3, с.251–256 (2018)

УДК 539.145

ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ КВАНТОВАННЫМИ СТОЯЧИМИ ВОЛНАМИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С АТОМОМ В РЕЖИМЕ РАМАНА–НАТА

Г.А. МУРАДЯН, Л.Р. АРЗУМАНЯН, А.Ж. МУРАДЯН*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: muradyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 20 марта 2018 г.)

Взаимодействие атома с электромагнитным полем индуцирует переходы между его квантованными модами, в которых базисом для квантования выбраны cos- и sin-стоячие волны. Число фотонов в модах вычислено в режиме Рамана–Ната в приближении адиабатического следования. Показано, что в ходе переходов начально заселенная мода в общем случае не полностью опустошается, а осциллирующая доля фотонов увеличивается с ростом их общего числа в системе.

1. Введение

Квантование электромагнитного поля производится, как правило, на базисе бегущих волн [1]: e^{ikz} и e^{-ikz} в случае одномерной задачи. Взаимодействие поля с атомом приводит к переизлучению фотонов между этими базисными состояниями. При этом через законы сохранения определяется и состояние поступательного движения атома [2–6].

Возможной альтернативой для квантования является базис стоячих волн [7] $\cos(kz)$ и $\sin(kz)$, удобный для физики линейных оптических резонаторов. Граничные условия плоского резонатора, как правило, оставляют лишь одну из мод стоячих волн [7, 8].

В настоящей работе рассмотрена система «атом+квантованное поле» в свободном пространстве, что дает возможность учитывать наличие обеих мод и ставить вопрос об эволюции числа фотонов в них, точнее вероятности нахождения фотонов в этих модах. В расчетах мы ограничиваемся относительно простым режимом Рамана–Ната [9–11] с адиабатическим следованием [12], когда поступательной степенью свободы и возбужденным состоянием атома можно пренебречь. Показано, что осцилляции населенности мод стоячих волн гармонические только для однофотонного состояния поля. В общем случае населенность из начально заселенной моды не полностью переходит в начально незаселенную моду, причем доля остающейся в начальном состоянии населенности уменьшается при росте числа фотонов в поле.

2. Двухуровневый атом в поле квантованных стоячих волн

Рассмотрим взаимодействие двухуровневого атома массой M и разностью энергий между уровнями $\hbar\omega_0$ с квантованным монохроматическим электромагнитным полем с частотой ω. Квантование поля проводится на базисе стоячих волн $\cos(kz)$ и $\sin(kz)$, где $k=\omega/c$. Тогда гамильтониан системы «атом–квантованное поле стоячих волн» в приближении вращающейся волны запишется в виде

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\frac{\hat{p}^2}{2M}+\frac{\hbar\omega_0}{2}\left(1+\sigma_3\right)+\hbar\omega\left(\hat{a}_c^+\hat{a}_c+\hat{a}_s^+\hat{a}_s\right)\\&-\beta\left(\sigma^+\hat{a}_c+\sigma^-\hat{a}_c^+\right)\cos(kz)-\beta\left(\sigma^+\hat{a}_s+\sigma^-\hat{a}_s^+\right)\sin(kz),\end{aligned}\tag{1}$$

где первые два слагаемых – операторы кинетической энергии центра тяжести и внутренней энергии атома, соответственно, третье слагаемое – оператор энергии свободного электромагнитного поля. Постоянная взаимодействия β связана с матричным элементом дипольного оптического перехода d соотношением $\beta=2\sqrt{\pi\hbar\omega/L}\,d$, где L – произвольная длина, вводимая для выполнения процедуры квантования поля, $\sigma^{\pm}=\left(\sigma_1\pm i\sigma_2\right)/2$, σ_j – матрица Паули, действующая на внутреннее состояние атома, $j=1,2,3$, $\hat{a}_c^+$ и $\hat{a}_c$ – операторы рождения и уничтожения в $\cos(kz)$-моде, а $\hat{a}_s^+$ и $\hat{a}_s$ – в $\sin(kz)$-моде, соответственно.

Волновая функция системы ищется в виде разложения по всем степеням свободы системы: внутреннего и поступательного движения атома и двум модам стоячих волн. При этом учитывается, что оператор числа возбуждения $\hat{N}=\left(1+\sigma_3\right)/2+\hat{a}_c^+\hat{a}_c+\hat{a}_s^+\hat{a}_s$ коммутирует с гамильтонианом (1), и анализ можно ограничить базисными состояниями с определенным собственным значением числа возбуждения N. В рассматриваемом нами случае атом до взаимодействия находится на нижнем энергетическом уровне и N равняется суммарному числу фотонов в модах стоячих волн:

$$\left|\Psi(z,t)\right\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sum_{n=0}^{N}a_n(z,t)\left|n\right\rangle\left|N-n\right\rangle+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}b_n(z,t)\left|n\right\rangle\left|N-1-n\right\rangle,\tag{2}$$

где основное и возбужденное состояния атома представляются столбцами $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, соответственно, а для фотонных состояний Фока использовано компактное кет-обозначение Дирака. Первое из них относится к cos-квантованной моде, второе – к sin-квантованной моде.

Из уравнения Шредингера с гамильтонианом (1) с помощью стандартных вычислений для новых неизвестных амплитуд $A_n(z;t)=a_n(z,t)e^{iN\omega t}$ и $B_n(z;t)=b_n(z,t)e^{iN\omega t}$ в приближении Рамана–Ната ($\hat{p}^2/2M\to 0$) получаем систему рекуррентных дифференциальных уравнений

$$i\hbar\frac{dA_n(z;t)}{dt}=-\beta\cos kz\sqrt{n}\,B_{n-1}(z;t)-\beta\sin kz\sqrt{N-n}\,B_n(z;t), \tag{3}$$

$$i\hbar\frac{dB_n(z;t)}{dt}+\hbar\Delta B_n(z;t)=-\beta\cos kz\sqrt{n+1}\,A_{n+1}(z;t)-\beta\sin kz\sqrt{N-n}\,A_n(z;t), \tag{4}$$

где $\Delta=\omega-\omega_0$, $n=0,1,2,...$ до N для первого рекуррентного уравнения и до $N-1$ для второго уравнения. В начинающих и замыкающих уравнениях системы (3) и (4) следует подставить $A_{-1}(z,t)=B_{-1}(z,t)=0$ и $A_{N+1}(z,t)=B_N(z,t)=0$, соответственно.

Следует особо отметить, что уравнения (3) и (4) записаны для свободного пространства, без наличия пространственно-ограничивающих поверхностей (резонаторов). Дальнейшее рассмотрение ограничивается режимом адиабатического следования, т. е. относительно большими значениями расстройки резонанса Δ, когда первым слагаемым в левой части уравнения (4) можно пренебречь. Тогда

$$B_n(z;t)=-\frac{\beta}{\hbar\Delta}(\cos kz\sqrt{n+1}\,A_{n+1}(z;t)+\sin kz\sqrt{N-n}\,A_n(z;t)).$$

После прямой подстановки для амплитуды основного состояния получаем

$$\begin{aligned}&i\,\mathrm{sign}\,\Delta\,\frac{dA_n(z;\tau)}{d\tau}-\left(n\cos^2 kz+\left(N-n\right)\sin^2 kz\right)A_n(z;\tau)\\&=\sin kz\cos kz\left(\sqrt{n(N-n+1)}\,A_{n-1}(z;\tau)+\sqrt{(n+1)\,(N-n)}\,A_{n+1}(z;\tau)\right),\end{aligned} \tag{5}$$

где $\tau=\beta^2 t/\hbar^2|\Delta|$ – безразмерная переменная времени и $n=0,1,2,...N.$ Полная волновая функция нормируется в каждой пространственной точке z и для амплитуд $A_n(z;\tau)$ резюмируется соотношением $\sum_0^N|A_n(z;\tau)|^2=1$.

3. Эволюция sin- и cos-квантованных мод

Изучение эволюции переходов между cos- и sin-квантованными модами проводится для фоковских состояний поля, т. е. состояний с определенным суммарным числом фотонов в двух модах. При $N=1,2$ система уравнений (5) допускает прямое аналитическое решение, чем мы и воспользовались. В случае

$N > 2$ обратились к методу численного решения. Как и следовало ожидать, эволюция фоковских состояний имеет осцилляционный характер, но закономерности при этом разные и зависят от значения N.

Простые гармонические колебания населенностей cos- или sin-квантованных мод имеют место только для однофотонного состояния (рис.1). Амплитуда осцилляций максимальна для координаты $z = \pi / 4k$ (кривая *3*). В этой точке интенсивность поля в обеих модах одинакова, и за полупериод осцилляции населенность из первоначально заселенной моды полностью переходит в первоначально незаселенную моду. Если же интенсивность поля в одной из мод равна нулю, например, при $z = 0$ или $z = \pi / 2k$, то переходы населенности между модами вовсе отсутствуют.

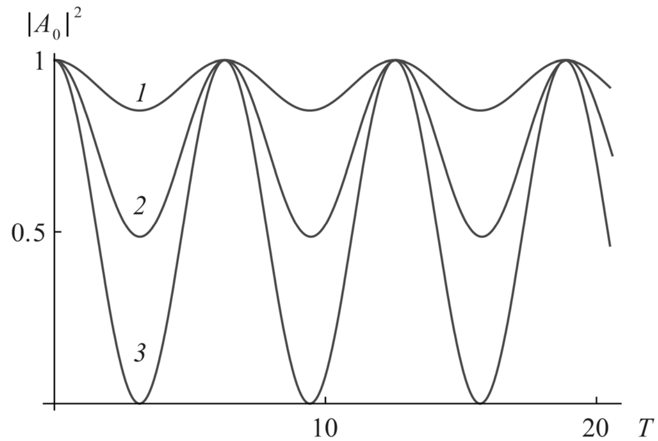

Рис.1. Периодические осцилляции населенности начально заселенной cos-квантованной моды электромагнитного поля одного фотона при взаимодействии с атомом в режиме Рамана–Ната в разных пространственных точках: $z = \pi/16k$ (кривая *1*), $z = \pi/8k$ (кривая *2*) и $z = \pi/4k$ (кривая *3*).

Физический смысл можно приписать и к пространственно-усредненной населенности мод $W_n(\tau) = \left(2\pi / k\right)^{-1} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} \left| A_n(z;\tau) \right|^2 dz$ ($n = 0, 1$), которая также осциллирует гармонически. При этом половина населенности остается в начально заселенной моде и не участвует в эволюции.

В случае многофотонного заполнения мод ($N > 1$) колебания населенностей больше не являются гармоническими, но возможность полного перехода населенности при $z = \pi / 4k$ (равных значений интенсивности поля в модах) сохраняется. Сохраняется и свойство отсутствия переходов, если интенсивность поля в одной из мод равна нулю (например, для $z = 0$ или $z = \pi / 2k$). Временная эволюция пространственно-усредненной населенности для трехфотонного поля представлена на рис.2. Кривая $n=0$ соответствует начально заселенной sin-квантованной моде и есть усредненная вероятность того, что все три фотона останутся в этой моде. Ход вероятности обнаружения двух фотонов в sin-квантованной моде и одного фотона в cos-квантованной моде дается кривой $n=1$. Кривые $n=2$ и $n=3$ представляют усредненные вероятности обнаружения остальных комбинаций – двух и одного фотонов в квантованных модах и всех трех фотонов в cos-квантованной моде, соответственно. Согласно кривой с $n=0$, переходящая между модами доля населенности больше половины, т. е. доли в случае однофотонного поля.

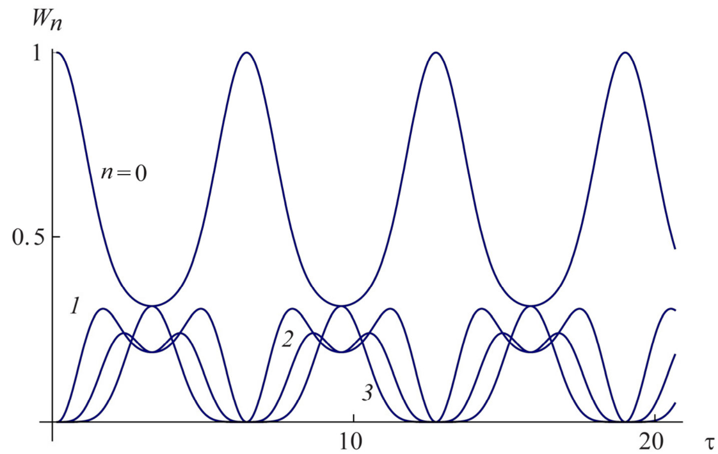

Рис.2. Колебания пространственно-усредненной населенности фотонных состояний при взаимодействии трех фотонов с атомом. Номера графиков n = 0, 1, 2 и 3 показывают число фотонов в cos-квантованной моде в начальный момент времени.

4. Заключение

Вторичное квантование плоского монохроматического электромагнитного поля проведено на базисе стоячих cos- или sin-квантованных мод. Временная эволюция возможных заполнений этих мод при взаимодействии с атомом изучена в приближении Рамана–Ната, в котором в гамильтониане пренебрегается оператором кинетической энергии атома. Показано, что начальная населенность одной из мод может полностью перейти в другую моду (быть обнаружена в другой моде) только в тех точках пространства, где интенсивности мод равны друг другу. Пространственно-усредненное значение осциллирующей между модами части числа фотонов увеличивается с ростом общего числа фотонов в системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН Армении в рамках Лаборатории исследования и моделирования квантовых явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **D.F. Walls, G.J. Milburn.** Quantum Optics. Berlin, Springer-Verlag, 2008.
2. **A.Zh. Muradyan.** Opt. Commun., **69**, 41 (1988).
3. **B.W. Shore, P. Meyste, S. Stenholm.** J. Opt. Soc. Am. B, **8**, 903 (1991).
4. **P. Domokos, P. Adam, J. Janszky, A. Zeilinger.** Phys. Rev. Lett., **77**, 1663 (1996).
5. **C.J. Hood, M.S. Chapman, T.W. Lynn, H.J. Kimble.** Phys. Rev. Lett., **80**, 4157 (1998).
6. **А.Ж. Мурадян**. Изв. АН Арм.ССР, Физика, **10**, 361 (1975).
7. **G. Grynberg**, **A. Aspect**, **C. Fabre.** Introduction to Quantum Optics. Cambridge, Cambridge University Press, 2010.
8. **A.M. Herkommer, V.M. Akulin, W.P. Schleich**. Phys. Rev. Lett., **69**, 3298 (1992).
9. **R.J. Cook**, **A.F. Bernhardt.** Phys. Rev. A, **18**, 2533 (1978).
10. **B. Macke.** Opt. Commun., **28**, 131 (1979).
11. **А.Ж. Мурадян.** Изв. АН Арм.ССР, Физика, **20**, 206 (1985).
12. **C. Gardiner, P. Zoller.** The Quantum World of Ultra-Cold Atoms and Light. Book II: The Physics of Quantum-Optical Devices. London, Imperial College Press, 2015.

ԱՆՑՈՒՄՆԵՐ ՔՎԱՆՏԱՑՎԱԾ ԿԱՆԳՈՒՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԱՏՈՄԻ ՀԵՏ ՌԱՄԱՆ–ՆԱԹԻ ՌԵԺԻՄՈՒՄ ՓՈԽԱԶԴԵԼԻՍ

Գ.Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, Լ.Ռ. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, Ա.Ժ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Ատոմի փոխազդեցությունն էլեկտրամագնիսական դաշտի հետ ինդուկտում է անցումներ նրա քվանտացված մոդերի միջև: Սույն աշխատանքում քվանտացման բազիս ընտրված են cos- և sin-կանգուն ալիքները: Ֆոտոնների թիվը մոդերում հաշված է Ռաման–Նաթի ռեժիմի համար ադիաբատիկ հետևման մոտարկմամբ: Ցույց է տրված, որ անցումների ընթացքում սկզբնական բնակեցված մոդն ընդհանուր դեպքում լրիվ չի դատարկվում, իսկ ֆոտոնների օսցիլացվող չափաբաժինը մեծանում է համակարգում իրենց ընդհանուր թվի մեծացման հետ:

TRANSITIONS BETWEEN QUANTIZED STANDING WAVES COUPLING WITH AN ATOM IN THE RAMAN–NATH REGIME

G.A. MURADYAN, L.R. ARZUMANYAN, A.ZH. MURADYAN

Interaction of an atom with the electromagnetic field induces transitions between its quantum modes, in which cos- and sin-standing waves are chosen as a basis of quantization. The number of photons in modes is calculated in the Raman–Nath regime with the adiabatic following approximation. It is shown that during the transitions, the initially populated mode is in general emptied incompletely, and that the oscillating part of photons scales with the total number of photons in the system.