

УДК 530.145

УРАВНЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

В.М. МЫХИТАРЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

e-mail: vm@ipr.sci.am

(Поступила в редакцию 13 декабря 2017 г.)

Предложены релятивистские инвариантные уравнения для функции действия и волновой функции на основе инвариантности представления обобщённого импульса. Уравнения имеют решения при любых значениях постоянной взаимодействия частицы с полем, например, в задаче водородоподобного атома, когда атомный номер ядра $Z > 137$. На основе параметрического представления действия выведены выражение для канонического лагранжиана, уравнения движения и выражение для силы, действующей на заряд при движении во внешнем электромагнитном поле. Представлено уравнение Дирака с корректным включением взаимодействия для частицы во внешнем поле. В таком виде решения уравнений не ограничены значением постоянной взаимодействия. Приведены решения задачи движения заряда в постоянном электрическом поле, задачи для частицы в потенциальной яме и прохождения частицы через потенциальный барьер, а также задачи атома водорода.

1. Введение

Для всякой теории квантовой механики существуют два камня преткновения – задача частицы в потенциальной яме и задача атома водорода, результаты решений которых определяют пригодность новых подходов. Первая выявляет соответствие решения фундаментальному в физике соотношению неопределённости, а вторая показывает насколько точно результаты решения задачи атома водорода в рамках новой теории соответствуют экспериментальным данным спектра атома водорода.

В 1913 г. Бор на основе эмпирических формул Бальмера построил модель атома на основе квантования орбитального момента [1], которая впоследствии была дополнена более общими правилами квантования Зоммерфельда. В эти годы, естественно, не предполагалось наличие спина или собственного магнитного момента у частицы или, тем более, какое-либо спин-орбитальное взаимодействие или взаимодействие с ядерным спином. О них начали серьёзно

задумываться после 1925 г., когда была опубликована работа Уленбека и Гаудсмита о спине [2].

В 1916 г. Зоммерфельд в рамках релятивистских подходов без учёта спина вывел формулу для уровней энергии водородоподобного атома [3]. Зоммерфельд исходил из модели атома Бора и для вывода своей формулы воспользовался релятивистским соотношением между импульсом $\mathbf{p}$ и энергией E свободной частицы с массой m

$$E^2 - (\mathbf{p}c)^2 = (mc^2)^2, \quad (1)$$

где c – скорость света.

Для частицы с зарядом q во внешнем поле с четырёхмерным потенциалом $(\phi, \mathbf{A})$ предполагалось, что это соотношение также можно использовать, если вычесть из выражения обобщённого импульса частицы компоненты четырёхмерного импульса поля $(q\phi, q\mathbf{A})$:

$$(E - q\phi)^2 - (\mathbf{p}c - q\mathbf{A})^2 = (mc^2)^2. \quad (2)$$

В случае кулоновского потенциала $\phi = Ze|e|/r$, где e – заряд электрона, r – расстояние от ядра и Z – атомный номер, в сферических координатах получается

$$p_r^2 + r^2 p_\phi^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} = \frac{(E + Ze^2/r)^2 - (mc^2)^2}{c^2}, \quad (3)$$

где L – момент импульса. Условия квантования Бора–Зоммерфельда принимают вид

$$\oint p_\phi d\phi = \hbar n_\phi, \quad (4)$$

$$\oint p_r dr = \oint \sqrt{\frac{(E + Ze^2/r)^2 - (mc^2)^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}} dr = \hbar n_r,$$

где n_ϕ и n_r – соответственно орбитальное и радиальное квантовые числа.

Зоммерфельд получил для уровней энергии формулу

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - \frac{(Z\alpha)^2}{l + 1/2 + \sqrt{(l + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2}}}, \quad (5)$$

где главное квантовое число $n = n_r + l + 1 = 1, 2, 3, \dots$, $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$ и $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137.036$ – постоянная тонкого расщепления. Однако в изданной 1916 г. работе [3] Зоммерфельд «удачно ошибся» [4] и выведенная формула была изложена в виде

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - \frac{(Z\alpha)^2}{l+1 + \sqrt{(l+1)^2 - (Z\alpha)^2}}\right)^2}}}}. \quad (6)$$

Формула (6) прекрасно описывала все тонкости строения спектра водорода и других подобных атомов с предельной для тех лет точностью измерений, и сомнений в правильности самой формулы не возникало. Поэтому формулу Зоммерфельда восприняли как эмпирическую, а вместо квантового числа l ввели внутреннее «таинственное» квантовое число с полуцелыми значениями $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$, а формулу (6) использовали в представлении

$$E_{n,j} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n - \frac{Z^2\alpha^2}{j+1/2 + \sqrt{(j+1/2)^2 - Z^2\alpha^2}}\right)^2}}}, \quad (7)$$

где $n = n_r + j + 1/2 = 1, 2, 3, \dots$, $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots, n - 1/2$, а l принимает значения $l = 0$ при $j = 1/2$ и $l = j \pm 1/2$ при остальных. Эта формула совпала с результатом точного решения релятивистских уравнений Дирака в 1928 г. [5] для частицы со спином $1/2$ с классическим выражением потенциальной энергии неподвижного заряда в кулоновском поле ядра с атомным номером Z в виде $U(r) = Ze^2/r$.

Формула (7) также указывала на странное ограничение величины заряда ядра с атомным номером $Z < 137$, больше которого формула теряла смысл. Было также понятно, что в рамках изложенных подходов никак ни описываются сильные и гравитационные взаимодействия, движения планет. Проблема $Z > 137$ или $\alpha > 1$ так и осталась нерешённой задачей релятивистской квантовой механики.

Разложив формулу (7) по порядку степеней $(Z\alpha)^2$ в ряд Тейлора с точностью до членов в степени $(Z\alpha)^6$, имеем

$$E_{n,j} = mc^2 - \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{(Z\alpha)^4}{2n^3} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) + \dots \quad (8)$$

В 1925–1926 г. Шрёдингер работал над выводом уравнения для волновой функции частицы, описывающей волны Де Бройля [6]. Вывод уравнения также был основан на релятивистском соотношении (1) между импульсом $\mathbf{p}$ и энергией E частицы, которое он представил с помощью операторов квадратов энергии и импульса в виде уравнения для волновой функции

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi - c^2 \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \Psi = (mc^2)^2 \Psi. \quad (9)$$

Как и Зоммерфельд, для частицы во внешнем поле Шрёдингер воспользовался представлением

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right)^2 \Psi + c^2 \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi = (mc^2)^2 \Psi. \quad (10)$$

Для атома водорода, в случае стационарных состояний заряженной частицы в поле кулоновского потенциала, нужно было решить уравнение

$$\Delta^2 \Psi + \frac{m^2 c^4 - (E + Ze^2/r)^2}{\hbar^2 c^2} \Psi = 0. \quad (11)$$

Решая это уравнение, Шрёдингер, как и Зоммерфельд, получил формулу (5), которая не точно описывала строение спектра водорода. А из решения задачи для частицы в потенциальной яме получается, что частица с длиной волны $\lambda = \hbar/mc$ имеет связанные состояния (помещается) в яме произвольного размера и, в частности, размерами намного меньше $\lambda/2$. Это противоречит фундаментальному принципу квантовой (волновой) теории – принципу неопределённости.

В 1925 г. Шрёдингер послал эту работу в редакцию *Annalen der Physik* [7], но потом забрал рукопись, отказался от релятивистских подходов и в 1926 г. построил волновое уравнение на основе классического выражения гамильтониана – уравнение Шрёдингера [8]

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U; \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left(\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 + U \right) \Psi. \quad (12)$$

Уравнение (12) лишь качественно описывало спектр атома водорода, однако не имело каких-либо неразумных ограничений или сингулярных решений в виде формулы Зоммерфельда–Дирака. Релятивистское уравнение для частицы без спина на основе волнового уравнения опубликовали Клейн [9], Фок [10] и Гордон [11] в 1926 г., которое называют уравнением Клейна–Фока–Гордона.

С открытием спина ситуация резко изменилась, и в 1926 г. Гейзенберг и Джордан в работе [12] показали, что в рамках описания Паули спина электрона половина энергии спин-орбитального взаимодействия равна члену со степенью α^4 в разложении в ряд Тейлора формулы Зоммерфельда (8).

Почему именно половина, в 1927 г. Томас в работе [13] попытался объяснить это наличием релятивистской прецессии электрона в системе отсчёта движения по орбите. Энергия томасовской прецессии как раз и равна половине значения энергии спин-орбитального взаимодействия с обратным (положительным) знаком, которую следует добавлять к энергии спин-орбитального взаимодействия. Но некорректное предположение одинаковой частоты прецессии Томаса в обеих системах отсчёта и отсутствие общего и корректного вывода для

неинерциальных (вращающихся) систем отсчёта не придавали уверенности результатам таких подходов. Причина возникновения половины энергии спин-орбитального взаимодействия в формуле Зоммерфельда исследуется до сих пор и является одной из нерешённых проблем современной физики.

С другой стороны, при выводе своей формулы Зоммерфельд, как и при решении уравнения Клейна–Фока–Гордона для задачи атома водорода [14], изначально ни спин, ни энергия спин-орбитального взаимодействия не учитываются. Поэтому полученное тонкое расщепление никак не может быть обусловлено спин-орбитальным взаимодействием. Это – релятивистский, но чисто механический эффект, когда масса (инерционность) частицы уже зависит от скорости движения по орбите (момента импульса), из-за чего меняется радиальное движение электрона, и наоборот. Именно эта зависимость приводит к расщеплению уровней энергии электрона и невозможности введения лишь одного, главного квантового числа. Но даже при таком предположении порядок расщепления уровней по формуле (8) противоречит логике – чем больше орбитальный момент, тем меньше энергия расщепленного уровня.

Матричное представление волнового уравнения 2-ого порядка (9) системой уравнений 1-ого порядка и есть построение Дирака [15] (матрицы Дирака – частное представление чисел Клиффорда–Липшица [16]) релятивистского уравнения электрона. В стандартном представлении для свободной частицы уравнение Дирака имеет вид [17]

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}\phi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi &= mc \phi, \\ -\hat{\varepsilon}\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi &= mc \chi,\end{aligned}\tag{13}$$

где

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{14}$$

– матрицы Паули (единичная матрица в формулах опущена).

Для частицы во внешнем поле уравнение (13) принято записывать в виде

$$\begin{aligned}\left(\hat{\varepsilon} - \frac{q}{c}\varphi\right)\phi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\chi &= mc \phi, \\ -\left(\hat{\varepsilon} - \frac{q}{c}\varphi\right)\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\phi &= mc \chi,\end{aligned}\tag{15}$$

где для инвариантного представления в случае свободной частицы уравнения составлены для разности обобщённого импульса и импульса поля.

В результате точного решения именно этого уравнения в случае потенциальной энергии неподвижного заряда в кулоновском поле и получается формула

Зоммерфельда–Дирака, в которой опять же, хотя и для системы со спином $1/2$, изначально никак не учитывается энергия спин-орбитального взаимодействия, но половинка получается из точного решения задачи атома водорода.

Более точные измерения Лэмба в 1947 г. и последующие уточнения спектра атома водорода выявили, что кроме линий с максимальным j все остальные также расщеплены и несколько смещены (сдвиг Лэмба). Для согласования результатов теории с более точными экспериментальными данными спектра атома водорода пришлось предложить иные решения и подходы, чем были заложены при выводе уравнения Дирака.

Новые теоретические подходы ничего не дали и лишь переполнили теорию нелогичными и нефизическими предложениями для преодоления возникающей сингулярности решений: перенормировки, конечной разности бесконечностей с нужным значением разности и т. п. Учёт размера ядра подправил только значение Z в большую сторону, но принципиально не решил проблему $Z > 137$. Также получен невероятный результат для задачи атома водорода, что с наибольшей вероятностью электрон находится в центре атома, т. е. в ядре.

Результаты решения задачи для частицы в потенциальной яме как в случае уравнения Клейна–Фока–Гордона, так и в случае уравнения Дирака противоречат основному принципу квантовой механики – принципу неопределённости. Из решений получается, что частица может находиться в связанном состоянии в яме с любыми размерами, в частности, с размером намного меньшим, чем длина волны самой частицы $\lambda = h/mc$ [17].

Несмотря на то, что Дирак предложил систему линейных релятивистских уравнений первой степени в матричном представлении, которые описывали систему со спином $1/2$, противоречия не исчезли, а сам он так и остался недовольным полученными результатами своей теории. Как писал Дирак в 1956 г. [18], «развитие релятивистской теории электрона можно рассматривать сейчас как пример того, как неверные доводы приводят иногда к ценному результату». В семидесятые годы уже стало ясно, что релятивистской теории квантовой механики не существует и следует искать новые, фундаментальные подходы и уравнения для построения непротиворечивой теории релятивистской квантовой механики. А в восьмидесятые годы Дирак уже говорил о непреодолимых трудностях имеющейся квантовой теории и необходимости создания новой.

Причина краха этих теорий довольно простая – не учитывается зависимость энергии взаимодействия частицы с полем от скорости движения частицы. Обобщённый импульс системы частица + внешнее поле представляется как сумма релятивистского выражения механического импульса частицы и импульса поля в случае взаимодействия с покоящейся частицей в виде

$$\mathbf{P} = (\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{c} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\varphi, \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{\beta} + q\mathbf{A} \right), \quad \mathbf{P}^2 \neq \text{inv}, \quad (16)$$

что не является инвариантным представлением от скорости частицы. Для построения какого-то инварианта из такого представления во всех случаях использовали «инвариантное» соотношение в виде разности обобщённого импульса системы и импульса поля в случае взаимодействия с покоящейся частицей

$$\begin{aligned} (\varepsilon - q\varphi, \mathbf{p} - q\mathbf{A}) &= \frac{1}{c} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{\beta} \right), \\ (\varepsilon - q\varphi)^2 - (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 &= (mc)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Очевидно, что перестановка компонент обобщённого импульса для построения инварианта не решает поставленную задачу. Утверждение, что выражение (17) является механическим импульсом частицы и поэтому также инвариантом, бездоказательно, и следует воспринимать формулу (17) как эмпирическую. Поэтому при больших скоростях или сильных взаимодействиях уже проявляется неучтённая зависимость энергии взаимодействия частицы с полем от скорости движения частицы, приводящая к ошибочным результатам или невозможности расчётов.

В работе [19] было предложено инвариантное представление обобщённого импульса системы, учитывающее зависимость энергии взаимодействия частицы с полем от скорости

$$\mathbf{P} = (\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{c} \left(\frac{mc^2 + q\varphi + q\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{(mc^2 + q\varphi)\boldsymbol{\beta} + q\mathbf{A}_{\parallel}}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\mathbf{A}_{\perp} \right), \quad (18)$$

$$\mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = \frac{(mc^2 + q\varphi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{c^2}, \quad (19)$$

что является четырёхмерным представлением обобщённого импульса системы на основе выражения обобщённого импульса частицы в состоянии покоя

$$\mathbf{P}_0 = (\varepsilon_0, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{c} (mc^2 + q\varphi, q\mathbf{A}), \quad (20)$$

инвариант которого, вне зависимости от состояния системы, всегда равен выражению (19).

Применение вариационных принципов для построения релятивистской и квантовой теории было основано на принципах построения механики с помощью лагранжиана системы [20], изначально не предназначенного для релятивистских подходов. Построение Лагранжа является параметрическим с выделенной одной

переменной времени $\tau = ct$ из переменных четырёхмерного пространства (остальные представлены зависимостью от этой переменной τ) и содержит полный дифференциал по этой переменной – скорость частицы. Такое построение неприемлемо из-за невозможности применения принципа инвариантности представления переменных и ковариантного представления действия системы.

В работе [21] для построения релятивистской теории на основе вариационных принципов рассмотрены канонические (непараметрические) решения вариационной задачи для канонически определённых интегральных функционалов и приведены канонические решения вариационных задач механики в пространствах Минковского. На основе объединения вариационных принципов наименьшего действия, потока и гиперпотока получены канонически-инвариантные уравнения для обобщённого импульса. Из этих уравнений выведены уравнения для функции действия и волновой функции как общее решение объединённой вариационной задачи механики.

В настоящей работе представлены обобщённый принцип инвариантности и соответствующее представление обобщённого импульса системы, уравнения релятивистской и квантовой механики, приведены решения задач движения заряда в постоянном электрическом поле, частицы в потенциальной яме, прохождения частицы через потенциальный барьер, а также задачи атома водорода.

2. Обобщение принципа инвариантности и инвариантное представление обобщённого импульса

Принцип инвариантности представления обобщённого импульса применим и в случае движения частицы со скоростью $\mathbf{v}$ и в случае перехода в систему отсчёта, движущуюся со скоростью $\mathbf{V}$.

Четырёхмерный импульс частицы $\mathbf{P}$ с массой покоя m при движении со скоростью $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ представляется в виде

$$\mathbf{P} = (\varepsilon, \mathbf{p}) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{\beta} \right), \quad \mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = (mc)^2, \quad (21)$$

Это – свойство инвариантности представления четырёхмерного импульса $\mathbf{P}$ через скорость движения частицы $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$.

Если рассмотреть представление четырёхмерного импульса покоящейся частицы с массой m при переходе в систему отсчёта, движущуюся со скоростью $\boldsymbol{\beta}' = \mathbf{V}/c$, то для четырёхмерного импульса частицы $\mathbf{P}$ имеем

$$\mathbf{P} = (\varepsilon, \mathbf{p}) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta'^2}}, \frac{mc}{\sqrt{1-\beta'^2}} \boldsymbol{\beta}' \right), \quad \mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = (mc)^2. \quad (22)$$

Это – свойство инвариантности представления четырёхмерного импульса $\mathbf{P}$ через скорость движения системы отсчёта $\boldsymbol{\beta}' = \mathbf{V}/c$.

Для инварианта системы I имеем

$$I^2 = \mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = (\varepsilon_0)^2 = (mc)^2. \quad (23)$$

При $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' = 0$ получим

$$\mathbf{P} = (\varepsilon, \mathbf{p})|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}'=0} = \varepsilon_0 (1, 0) = mc(1, 0). \quad (24)$$

Таким образом, обобщённый импульс частицы имеет инвариантное представление от скорости движения частицы $\mathbf{v}$ и от скорости движения системы отсчёта $\mathbf{V}$. Это свойство следует рассматривать как следствие общего принципа относительности движения. Соответственно, обобщённый импульс частицы $\mathbf{P}$ является инвариантом вне зависимости от состояния системы.

Если заряженная частица находится во внешнем электромагнитном поле с потенциалами $(\varphi, \mathbf{A})$, то неподвижный заряд чувствует поле именно с такими потенциалами. Если же заряд имеет отличную от нуля скорость $\mathbf{v}$, то он будет взаимодействовать с полем иначе. Для определения взаимодействия для движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ заряда можно исходить из принципа относительности движения. Действующие значения силы или взаимодействия движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ заряда с полем те же самые, что и в случае, когда заряд неподвижен, а поле движется со скоростью $-\mathbf{v}$ (в лабораторной системе отсчёта).

Более наглядно это демонстрируется на примере эффекта Доплера для двух атомов в поле резонансного излучения, когда один из них в покое, а другой движется со скоростью $\mathbf{v}$. Находящийся в покое атом поглощает фотон, а движущийся не поглощает или слабо взаимодействует с полем из-за зависимости взаимодействия от скорости атома. Также известно, что действующее поле для движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ атома соответствует взаимодействию с движущимся со скоростью $-\mathbf{v}$ полем.

Таким образом, для движущегося заряда действующие значения потенциалов $(\varphi', \mathbf{A}')$ (в лабораторной системе отсчёта) запишутся в виде [22]

$$(\varphi', \mathbf{A}') = \left(\frac{\varphi + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \mathbf{A}_\perp + \frac{\mathbf{A}_\parallel + \varphi \boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (25)$$

Если представить обобщённый импульс частицы в виде

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + q\varphi', \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \boldsymbol{\beta} + q\mathbf{A}' \right), \quad (26)$$

где φ' и $\mathbf{A}'$ – уже действующие значения потенциалов взаимодействия движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ частицы в поле с потенциалами φ и $\mathbf{A}$, то получим

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c} \left(\frac{mc^2 + q\varphi + q\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{(mc^2 + q\varphi)\boldsymbol{\beta} + q\mathbf{A}_{\parallel}}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\mathbf{A}_{\perp} \right). \quad (27)$$

Выражение (27) можно представить в виде

$$\mathbf{P} = \left(\frac{mc^2 + q\varphi + q\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{mc^2 + q\varphi + q\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{\beta} + \frac{q}{c} \mathbf{A} - \frac{q}{c} \frac{1}{1+\sqrt{1-\beta^2}} (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \right) \quad (28)$$

или

$$\mathbf{P} = \left(\varepsilon, \quad \varepsilon \boldsymbol{\beta} + \frac{q}{c} \mathbf{A} - \frac{q}{c} \frac{1}{1+\sqrt{1-\beta^2}} (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \right). \quad (29)$$

Для модуля I четырёхмерного вектора обобщённого импульса $\mathbf{P}$ имеем

$$I^2 = \mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = \frac{(mc^2 + q\varphi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{c^2}, \quad (30)$$

что является четырёхмерным представлением обобщённого импульса системы на основе выражения обобщённого импульса частицы в состоянии покоя

$$\mathbf{P}_0 = (\varepsilon_0, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{c} (mc^2 + q\varphi, q\mathbf{A}), \quad (31)$$

инвариант которого определяется выражением (30).

Таким образом, обобщённый импульс частицы во внешнем поле не только инвариантен относительно преобразований при переходе из одной системы отсчёта в другую, но и имеет инвариантное представление через скорость движения частицы (27), а значение инварианта I в каждой точке пространства определяется выражением (30). Таким свойством обладает не только представление собственного импульса частицы (механическая часть), но и обобщённый импульс частицы вообще.

Обобщим этот результат в случае представления обобщённого импульса любых систем и взаимодействий, утверждая, что вне зависимости от состояния (движения) системы обобщённый четырёхмерный импульс всегда имеет инвариантное представление

$$\mathbf{P} = (\varepsilon, \mathbf{p}), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = \varepsilon_0^2 - \mathbf{p}_0^2 = \pm I^2 = \text{inv}, \quad (32)$$

где ε и $\mathbf{p}$ – энергия и импульс системы, а инвариант определяется модулем суммы компонент обобщённого импульса системы ε_0 и $\mathbf{p}_0$ в покое. Если частицы взаимодействуют с полем в виде $(\alpha\varphi, \alpha\mathbf{A})$, то инварианты обобщённого импульса системы представляются выражениями [18]

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_+^2 &= (\varepsilon_0 + \alpha\varphi)^2 - (\alpha\mathbf{A})^2 = \varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0\alpha\varphi + (\alpha\varphi)^2 - (\alpha\mathbf{A})^2, \\
\mathbf{P}_-^2 &= (\alpha\varphi)^2 - (\varepsilon_0\mathbf{n} + \alpha\mathbf{A})^2 = -\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0\alpha\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + (\alpha\varphi)^2 - (\alpha\mathbf{A})^2, \\
\mathbf{P}_0^2 &= (\varepsilon_0 + \alpha\varphi)^2 - (\varepsilon_0\mathbf{n} + \alpha\mathbf{A})^2 = 2\varepsilon_0\alpha(\varphi - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + (\alpha\varphi)^2 - (\alpha\mathbf{A})^2.
\end{aligned} \tag{33}$$

Представим выражение инварианта $\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2$ (30) в виде

$$\varepsilon^2 = \frac{E^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + \frac{(mc^2 + q\varphi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m^2c^2 + 2mq\varphi + \frac{q^2}{c^2}(\varphi^2 - \mathbf{A}^2) \tag{34}$$

и разделим на $2m$. Группируя, получим гамильтониан H системы в виде

$$H = \frac{\varepsilon^2 - m^2c^2}{2m} = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + q\varphi + \frac{q^2}{2mc^2}(\varphi^2 - \mathbf{A}^2), \tag{35}$$

т. е. получим формулу соответствия энергии системы E и энергии системы в классическом понимании H . Соответствие в виде $H = \mathbf{p}^2/2m + U(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ [20] будет полным и точным, если определить в классическом понимании потенциальную энергию взаимодействия U и энергию системы H как

$$U = q\varphi + \frac{q^2}{2mc^2}(\varphi^2 - \mathbf{A}^2), \quad H = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} \Rightarrow E = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{2H}{mc^2}}. \tag{36}$$

Например, потенциальная энергия электрона U в поле кулоновского потенциала $\varphi = Ze/r$ и в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ с векторным потенциалом $\mathbf{A} = [\mathbf{r} \times \mathbf{B}]/2$ есть

$$U = -e\varphi + \frac{e^2}{2mc^2}(\varphi^2 - \mathbf{A}^2) = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2mc^2} \frac{Z^2e^4}{r^2} - \frac{e^2B^2}{8mc^2}r^2 \sin^2 \theta. \tag{37}$$

Заметим, что какая бы ни была зависимость потенциала φ , возможная минимальная потенциальная энергия $U_{\min} = -mc^2/2$, а потенциальная энергия в зависимости от векторного потенциала – всегда отрицательна. Независящее от характера взаимодействий жёсткое ограничение значения классической потенциальной энергии $U_{\min} = -mc^2/2$ приводит к фундаментальным изменениям в описании взаимодействий и пересмотру результатов классической механики. Возникновение отталкивания для притягивающих сил на малых расстояниях, обусловленное принципом неопределённости, явно отражено в выражении потенциальной энергии частицы.

Гамильтониан H может быть назван энергией и его значение остаётся постоянным в случае сохранения энергии E , но само значение H и его изменения отличаются от истинных значений энергии E и изменений её количества. Таким

образом, классические подходы допустимы только в случае малых скоростей, когда $H \ll mc^2$ и выражение энергии можно представить в виде

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{2H}{mc^2}} \approx mc^2 + H. \quad (38)$$

3. Уравнения релятивистской механики и канонический лагранжиан

Воспользуемся параметрическим представлением действия по Гамильтону в виде [20]

$$S = - \int_{t_1, \mathbf{r}_1}^{t_2, \mathbf{r}_2} (\varepsilon dt - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{R} = - \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds} ds = - \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) ds \rightarrow \min, \quad (39)$$

где ds – четырёхмерный интервал и $\mathbf{V}$ – четырёхмерная обобщённая скорость.

Функционал, учитывающий условие инвариантного представления обобщённого импульса $\mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = I^2 = \text{inv}$, можно составить методом неопределённых коэффициентов Лагранжа в виде

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \left(-\mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \frac{\mathbf{P}^2 - I^2}{2\lambda} \right) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{V})^2}{2\lambda} + \frac{\lambda^2 - I^2}{2\lambda} \right) ds \rightarrow \min, \quad (40)$$

где $\lambda = \lambda(s)$ – определяемый условием инвариантности представления заданный параметр. Так как λ и I заданы и не зависят от скорости, то имеем явное решение в виде

$$\mathbf{P} - \lambda \mathbf{V} = 0, \quad \lambda = \pm I(\tau, \mathbf{r}), \quad (41)$$

где четырёхмерный импульс представлен в виде

$$\mathbf{P} = I \mathbf{V} = \sqrt{\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \frac{\boldsymbol{\eta}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right). \quad (42)$$

Таким образом, действие представляется в виде

$$S = \int_{s_1}^{s_2} I ds = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2} \sqrt{1 - \eta^2} d\tau, \quad (43)$$

а канонический лагранжиан системы определяется выражением

$$L = I \sqrt{1 - \eta^2} = \sqrt{\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2} \sqrt{1 - \eta^2}. \quad (44)$$

Правильность представленной параметризации подтверждается полученными выражениями обобщённого импульса и энергии из лагранжиана системы в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \boldsymbol{\eta} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}} - L = \frac{I}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2}}{\sqrt{1-\eta^2}}, \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \frac{I}{\sqrt{1-\eta^2}} \boldsymbol{\eta} = \varepsilon \boldsymbol{\eta},\end{aligned}\tag{45}$$

которые совпадают с начальными представлениями обобщённого импульса и энергии. Соответственно, уравнение движения Лагранжа принимает вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{I}{\varepsilon} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}}.\tag{46}$$

Если умножить уравнение (47) скалярно на $\mathbf{p} = \varepsilon \boldsymbol{\eta}$, то после приведения к полному дифференциалу по времени, получим

$$\frac{d\varepsilon^2}{d\tau} = \frac{\partial I^2}{\partial \tau}.\tag{47}$$

Если инвариант явно не зависит от времени, то энергия ε сохраняется и уравнение движения представляется в виде уравнения Ньютона

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\tau} = -\frac{I}{\varepsilon^2} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}}.\tag{48}$$

Для частицы во внешнем поле имеем

$$L = -\frac{1}{c} \sqrt{(mc^2 + q\varphi)^2 - (q\mathbf{A})^2} \sqrt{1-\eta^2/c^2}.\tag{49}$$

Уравнение Гамильтона–Якоби представляется в виде

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 = \frac{(mc^2 + q\varphi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{c^2}\tag{50}$$

и оно отражает инвариантность представления обобщённого импульса. Известные представления уравнения Гамильтона–Якоби [22] содержат также дифференциальные формы потенциалов – компоненты электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей.

Используя явный вид обобщённого импульса (29) с точностью разложения до степени β^2 , получим уравнение движения в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left(\varepsilon - \frac{q}{2c} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \right) \boldsymbol{\beta} = q\mathbf{E} + q[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} + \frac{q^2}{2mc^2} (\varphi^2 - \mathbf{A}^2) \right),\tag{51}$$

где присутствуют зависящие от скорости частицы компоненты силы. В частности, зависящая от скорости сила присутствует в законе электромагнитной индукции Фарадея [23], отсутствующей в традиционном выражении силы Лоренца.

3.1. Движение электрона в постоянном электрическом поле

Рассмотрим движение электрона с массой m и зарядом $-e$ в постоянном электрическом поле между плоскими электродами с разностью потенциалов U и расстоянием l между ними. Для одномерного движения, принимая точку расположения катода как начало координат и анода в точке $x = l$, из формулы (50) имеем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = \frac{(mc^2 + eU(1 - x/l))^2}{c^2}. \quad (52)$$

Представим действие S в виде

$$S = -Et + f(x), \quad (53)$$

где $E = mc^2 + eU$ – энергия электрона в начале координат на поверхности катода под напряжением $-U$, в результате из (52) получим

$$S = -Et + \frac{1}{c} \int \sqrt{E^2 - \left(mc^2 + eU - qU \frac{x}{l}\right)^2} dx. \quad (54)$$

Решение находим из условия $\partial S / \partial E = \text{const}$. В результате интегрирования получим

$$t = \frac{l}{c} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \arccos \left(1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{x}{l}\right), \quad \alpha = qU / mc^2 \quad (55)$$

или

$$x = l \frac{1 + \alpha}{\alpha} \left(1 - \cos \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{ct}{l}\right)\right), \quad t \leq \frac{l}{c} \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha}\right) \arccos \left(\frac{1}{1 + \alpha}\right). \quad (56)$$

Известное решение в рамках традиционной теории [22] следующее:

$$t = \frac{l}{\alpha c} \sqrt{\left(1 + \alpha \frac{x}{l}\right)^2 - 1} \quad \text{или} \quad x = l \frac{(\alpha ct/l)^2}{1 + \sqrt{1 + (\alpha ct/l)^2}}, \quad t \leq \frac{l}{c} \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}. \quad (57)$$

Отношение времён пролёта промежутка между электродами ($x = l$) в ультрарелятивистском пределе $eU \gg mc^2$ по формулам (55) и (57) равно $\pi/2$ (рис.1).

3.2. Задача водородоподобного атома

Рассмотрим движение электрона с массой m и зарядом $-e$ в поле неподвижного ядра с зарядом Ze . Тогда задача сведётся к исследованию движения электрона в центрально-симметричном электрическом поле с потенциалом $-Ze^2/r$.

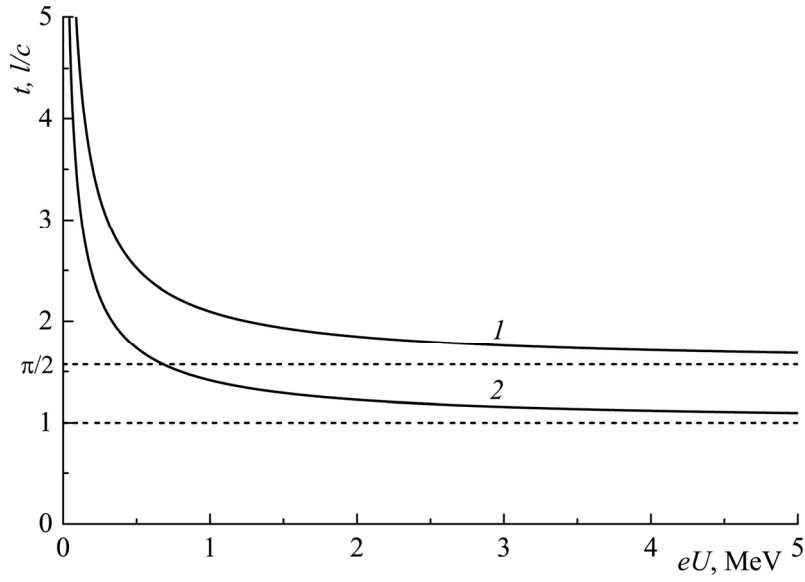


Рис.1. Зависимость времени пролёта промежутка между электродами от приложенного напряжения по формуле (55) (кривая 1) и (57) (кривая 2) в единицах l/c .

Выбирая полярные координаты (r, φ) в плоскости движения, получим уравнение Гамильтона–Якоби в виде

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{(mc^2 - Ze^2/r)^2}{c^2} = 0. \quad (58)$$

Представим действие S в виде

$$S = -Et + M\varphi + f(r), \quad (59)$$

где E и M – постоянные энергия и момент импульса движущейся частицы. В результате получим

$$S = -Et + M\varphi + \frac{1}{c} \int \sqrt{E^2 - (mc^2)^2 + 2mc^2 \frac{Ze^2}{r} - \frac{M^2 c^2 + (Ze^2)^2}{r^2}} dr. \quad (60)$$

Траектории находим из условия $\partial S / \partial M = \text{const}$, откуда получаем

$$\varphi = \int \frac{Mc}{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2 + 2mc^2 \frac{Ze^2}{r} - \frac{M^2 c^2 + Ze^2}{r^2}}} d\frac{1}{r}, \quad (61)$$

что приводит к решению

$$r = \frac{(Mc)^2 + (Ze^2)^2}{mc^2 Ze^2} \times \frac{1}{1 + \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{Mc}{Ze^2}\right)^2\right) - \left(\frac{Mc}{Ze^2}\right)^2 \cos\left(\varphi \sqrt{1 + \left(\frac{Ze^2}{Mc}\right)^2}\right)}}. \quad (62)$$

Коэффициент отталкивающего эффективного потенциала существенно положительный, т. е. $M^2 c^2 + (Ze^2)^2 > 0$, поэтому какое-либо падение частицы на центр невозможно. Минимальный радиус $r_{\min} = r_0 (Z + 1)$, где $r_0 = e^2 / mc^2$ – классический радиус электрона.

Вековое смещение находим из условия

$$\varphi \sqrt{1 + (Ze^2 / Mc)^2} = 2\pi, \quad (63)$$

откуда получаем

$$\Delta\varphi = 2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{1 + (Ze^2 / Mc)^2}} \approx \pi \left(\frac{Ze^2}{Mc}\right)^2, \quad (64)$$

что имеет обратный знак по сравнению с решением в работе [22]. Причиной несовпадения знака является неучтённое взаимодействие собственного момента с вращающимся полем, т. е. спин-орбитальное взаимодействие.

4. Уравнения релятивистской квантовой механики для систем без спина

Пользуясь принципом инвариантного представления обобщённого импульса

$$\mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = I^2 = \text{inv}, \quad (65)$$

можно составить соответствующее уравнение релятивистской квантовой механики, представив переменные энергии и импульса соответствующими операторами $\hat{\varepsilon} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau}$ и $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned} (\hat{\varepsilon})^2 \Psi - (\hat{\mathbf{p}})^2 \Psi &= \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 \Psi - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 \Psi \\ &= (\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2) \Psi + i\hbar \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \text{div} \mathbf{p}\right) \Psi = I^2 \Psi + i\hbar \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \text{div} \mathbf{p}\right) \Psi, \end{aligned} \quad (66)$$

$$(\hat{\varepsilon} \Psi)^2 - (\hat{\mathbf{p}} \Psi)^2 = \left(i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}\right)^2 - \left(-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 = (\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2) \Psi^2 = I^2 \Psi^2. \quad (67)$$

Соотношению $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \text{div} \mathbf{p} = 0$ соответствует случай консервативных систем, когда какие-либо потери энергии во времени или источники в пространстве отсутствуют. Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{r}^2} = -\frac{I^2}{\hbar^2} \Psi \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 = -\frac{I^2}{\hbar^2} \Psi^2. \end{cases} \quad (68)$$

Для заряженной частицы во внешнем поле с инвариантом в виде (30) уравнения примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{r}^2} = -\frac{(mc^2 + q\phi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{\hbar^2 c^2} \Psi \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 = -\frac{(mc^2 + q\phi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{\hbar^2 c^2} \Psi^2. \end{cases} \quad (69)$$

Для стационарных состояний получим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{E^2 - (mc^2 + q\phi)^2 + (q\mathbf{A})^2}{\hbar^2 c^2} \Psi = 0 \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 + \frac{E^2 - (mc^2 + q\phi)^2 + (q\mathbf{A})^2}{\hbar^2 c^2} \Psi^2 = 0. \end{cases} \quad (70)$$

Переписывая уравнения с учетом формул классического соответствия (36)

$$U = q\phi + \frac{q^2}{2mc^2} (\phi^2 - \mathbf{A}^2), \quad H = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2}, \quad \Rightarrow \quad E = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{2H}{mc^2}}, \quad (71)$$

получим уравнения волновой функции в традиционном представлении

$$\begin{aligned} \Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (H - U) \Psi &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (H - U) \Psi^2 &= 0, \end{aligned} \quad (72)$$

первое из которых формально совпадает с уравнением Шрёдингера для волновой функции стационарных состояний.

Для функции действия S , связанной с волновой функцией с представлением $\Psi = A \exp(-iS/\hbar)$ или $S = i\hbar \ln \Psi + i\hbar \ln A$, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r}^2} = 0 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 - \frac{E^2 - (mc^2 + q\Phi)^2 + (q\mathbf{A})^2}{c^2} = 0, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r}^2} = 0 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 - 2m(H - U) = 0, \end{array} \right. \quad (73)$$

что выражает точное классическое соответствие взамен квазиклассического приближения [24]. Заметим, что аналогичные (73) уравнения следуют также из уравнения 46.2 в работе [24], если потребовать точное соответствие и приравнять к нулю действительную и мнимую части.

4.1. Частица в одномерной потенциальной яме

Рассмотрим частицу с массой m в одномерной прямоугольной потенциальной яме в виде

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x, x \geq a \\ -V_0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (74)$$

Из первого уравнения системы (70) имеем

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{E^2 - (mc^2 + V(x))^2}{\hbar^2 c^2} \Psi = 0. \quad (75)$$

Тогда $U_0 = -V_0 + V_0^2/(2mc^2)$ соответствует потенциальной энергии частицы в яме в классическом понимании. В последнем случае известно [3], что связанное состояние с энергией $H = 0$ ($E = mc^2$) возникает при условии

$$U_0 = -\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 = -V_0 + \frac{V_0^2}{2mc^2} \geq -\frac{mc^2}{2}, \quad a \geq \frac{\pi \hbar}{mc} n = \frac{\lambda}{2} n, \quad (76)$$

$$\begin{aligned} E_n &= mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\pi^2 \hbar^2}{m^2 c^2 a^2} n^2} \right) = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} n \right)^2} \right) \\ &= mc^2 \frac{\left(\frac{\lambda}{2a} n \right)^2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} n \right)^2}}, \end{aligned} \quad (77)$$

где $\lambda = 2\pi\hbar/mc = h/mc$. Максимальная глубина классической ямы $U_0 = -mc^2/2$ при $V_0 = mc^2$. Условие существования связанного состояния с энергией $H = 0$ ($E = mc^2$) в потенциальной яме размером a выражается соотношением

$$a = \frac{\lambda}{2} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (78)$$

В трёхмерном случае для сферической ямы с диаметром d и глубиной V_0 связанное состояние с энергией $H = 0$ ($E = mc^2$) возникает при таких же условиях [24] с $d = \lambda n/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Решение этого простого примера является фундаментальным и точно отражает принцип неопределённости $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Оно явно отражает волновое свойство частицы, ясно показывая, что стоячая волна существует только при условии $a \geq \lambda/2$, когда геометрические размеры ямы больше, чем половина длины волны частицы.

4.2. Прохождение частицы через потенциальный барьер

Рассмотрим задачу прохождения частицы через прямоугольный потенциальный барьер [24] высотой V_0 и шириной a . Тогда $U_0 = V_0 + V_0^2/(2mc^2)$ соответствует потенциальной энергии частицы в яме в классическом понимании, а $H = (E^2 - m^2c^4)/2mc^2$ – энергии. Подставляя эти выражения в решение уравнения Шрёдингера для прямоугольного потенциального барьера, получим для коэффициента прохождения D частицы через потенциальный барьер: при $E > |V_0 + mc^2|$

$$D = \left[1 + \frac{\left(\left(\frac{V_0}{mc^2} + 1 \right)^2 - 1 \right)^2}{4 \left(\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - 1 \right) \left(\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - \left(\frac{V_0}{mc^2} + 1 \right)^2 \right)} \right]^{-1} \times \sin^2 \left(\frac{a}{\tilde{\lambda}} \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - \left(\frac{V_0}{mc^2} + 1 \right)^2} \right), \quad (79)$$

при $E < |V_0 + mc^2|$

$$D = \left[1 + \frac{\left(\left(\frac{V_0}{mc^2} + 1 \right)^2 + 1 - 2 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \right)^2}{4 \left(\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - 1 \right) \left(\left(\frac{V_0}{mc^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \right)} \right]^{-1} \times \sinh^2 \left(\frac{a}{\tilde{\lambda}} \sqrt{\left(\frac{V_0}{mc^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2} \right), \quad (80)$$

где $\lambda = \hbar/mc$ – де бройлевская длина волны частицы. Как видим, барьер образуется только в диапазоне энергий $-2mc^2 > V_0 > mc^2$.

4.3. Движение электрона в постоянном электрическом поле

Рассмотрим движение электрона с массой m и зарядом $-e$ в постоянном электрическом поле F . Из уравнения (50) имеем

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{E^2 - (mc^2 + eFx)^2}{\hbar^2 c^2} \Psi = 0. \quad (81)$$

Переписав уравнение в виде

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{E^2}{2mc^2} - \frac{m}{2} \left(\frac{eF}{mc} \right)^2 \left(x + \frac{mc^2}{eF} \right)^2 \right) \Psi = 0, \quad (82)$$

получим уравнение линейного осциллятора с частотой $\omega = eF/mc$, из которого дискретные уровни E_n определяются формулой

$$E_n = \sqrt{\hbar e F c (2n+1)} = mc^2 \sqrt{\frac{eF\lambda}{mc^2} (2n+1)}, \quad \lambda = \hbar/mc, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (83)$$

В рамках традиционной теории спектр энергий заряда в постоянном электрическом поле F непрерывный [24]. В данном случае для частицы с энергией $E_n = mc^2$ и $n = \frac{mc^2}{2eF\lambda} - \frac{1}{2}$ расстояние между ближайшими уровнями $\Delta E_{mc^2} = eF\lambda$.

В общем случае

$$\Delta E_n = mc^2 \sqrt{\frac{eF\lambda}{mc^2 (2n+1)}}. \quad (84)$$

4.4. Задача атома водорода

Движение заряженной частицы в кулоновском поле можно описать как движение в поле атомного ядра (без спина и магнитного момента) с потенциальной энергией $-Ze^2/r$.

Уравнение (70) для волновой функции в сферических координатах примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \\ + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left(E^2 - \left(mc^2 - \frac{Ze^2}{r} \right)^2 \right) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Разделяя переменные

$$\Psi = \Phi_m(\varphi) Y_{l,m}(\theta) R_{n_R,l}(r) \quad (86)$$

и вводя обозначения [22]

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{e^2}{\hbar c}, \quad \rho = \frac{mZe^2}{\hbar^2} \frac{2r}{n} = Z\alpha \frac{mc}{\hbar} \frac{2r}{n}, \\ H_n &= \frac{E_n^2 - m^2c^4}{2mc^2} = -\frac{mZ^2e^4}{\hbar^2} \frac{1}{2n^2} = -mc^2 Z^2 \alpha^2 \frac{1}{2n^2}, \quad M^2 = \hbar^2 l(l+1), \\ s(s+1) &= l(l+1) + Z^2 \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad s = -1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 + Z^2 \alpha^2}\end{aligned}\quad (87)$$

(для s берётся только положительный корень), для стационарных состояний имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -m^2 \Phi, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} Y &= -l(l+1)Y, \\ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{s(s+1)}{\rho^2} R &= -\left(\frac{n}{\rho} - \frac{1}{4} \right) R,\end{aligned}\quad (88)$$

где $m = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, $|m| < l$ и $s = -1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 + Z^2 \alpha^2}$.

Решение уравнений (88) формально совпадает с известным решением Фьюза для молекулярного потенциала Кратцера в виде $U = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} = \frac{Z^2 e^4}{2mc^2} \frac{1}{r^2} - Ze^2 \frac{1}{r}$ при условии, что $n - s - 1 = n_r$ должно быть целым положительным числом или нулём. Согласно (87), получаем уровни энергии

$$\begin{aligned}H_{n,j} &= -mc^2 \frac{Z^2 \alpha^2}{2 \left(n_r + 1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 + Z^2 \alpha^2} \right)^2}, \\ E_{n,j} &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{2H_{n,j}}{mc^2}} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n_r + 1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 + Z^2 \alpha^2} \right)^2}},\end{aligned}\quad (89)$$

где радиальное квантовое число $n_r = 0, 1, 2, \dots$. Вводя главное квантовое число $n = n_r + l + 1/2$, $l < n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), окончательно получим

$$E_{n,j} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n + \frac{Z^2 \alpha^2}{l + 1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 + Z^2 \alpha^2}} \right)^2}}. \quad (90)$$

Для основного состояния с $l = 0$ и $n = 1$ имеем

$$E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1/2 + \sqrt{1/4 + Z^2 \alpha^2}}}, \quad s = \frac{Z^2 \alpha^2}{1/2 + \sqrt{1/4 + Z^2 \alpha^2}} \quad (91)$$

без каких-либо ограничений для значения Z . В этом случае $1 - s > 0$ и никакого падения частицы на центр [24] не наблюдается, а вероятность нахождения частицы в центре (в ядре) всегда равна нулю.

В данном случае полученное тонкое расщепление никак не связано со спин-орбитальным взаимодействием и обусловлено релятивистской зависимостью массы от орбитальной и радиальной скорости движения, которые приводят к расщеплению уровней.

5. Уравнения релятивистской квантовой механики для систем со спином $\frac{1}{2}$

В стандартном представлении уравнения Дирака для частицы в компактных обозначениях имеют вид [15]

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}\phi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\chi &= mc\phi, \\ \hat{\varepsilon}\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi &= mc\chi.\end{aligned}\tag{92}$$

Соответственно для частицы во внешнем поле их можно представить в виде

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}\phi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\chi &= \left(mc + \frac{q}{c}\varphi \right)\phi + \frac{q}{c}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}\chi, \\ \hat{\varepsilon}\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi &= \left(mc + \frac{q}{c}\varphi \right)\chi - \frac{q}{c}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}\phi.\end{aligned}\tag{93}$$

Составляя волновые уравнения для волновых функций, получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right)\phi &= -\frac{(mc^2 + q\varphi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{\hbar^2 c^2}\phi - \frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\mathbf{E})\chi, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right)\chi &= -\frac{(mc^2 + q\varphi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{\hbar^2 c^2}\chi + \frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\mathbf{E})\phi,\end{aligned}\tag{94}$$

где воспользовались свойствами матриц Паули.

В случае стационарного состояния стандартное представление волновых уравнений (92) имеет вид

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon - mc - \frac{q}{c}\varphi \right)\phi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)\chi, \\ \left(\varepsilon + mc + \frac{q}{c}\varphi \right)\chi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)\phi.\end{aligned}\tag{95}$$

5.1. Задача атома водорода

Для заряда в потенциальном поле с центральной симметрией [17] имеем

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f(r)}{r} \Omega_{jlm} \\ (-1)^{1+l-l'} \frac{g(r)}{r} \Omega_{jl'm} \end{pmatrix}. \quad (96)$$

После подстановки (96) в (95) получим

$$\begin{cases} f' + \frac{\chi}{r} f - \left(\varepsilon + mc - \frac{Ze^2}{c} \frac{1}{r} \right) g = 0 \\ g' - \frac{\chi}{r} g + \left(\varepsilon - mc + \frac{Ze^2}{c} \frac{1}{r} \right) f = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} j = |l \pm 1/2|, \quad j_{\max} = l_{\max} + 1/2 \\ \chi = -1, \quad l = 0 \\ \chi = \pm(j + 1/2). \end{cases} \quad (97)$$

Представим функции f и g в виде

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{mc + \varepsilon} e^{-\rho/2} \rho^\gamma (Q_1 + Q_2), \\ g &= \sqrt{mc - \varepsilon} e^{-\rho/2} \rho^\gamma (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (98)$$

где

$$\rho = 2\lambda r/\hbar, \quad \lambda = \sqrt{(mc)^2 - \varepsilon^2}, \quad \gamma = \sqrt{\chi^2 + Z^2 \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (99)$$

Подставив (98) в уравнения (97), для суммы и разности уравнений имеем

$$\begin{aligned} \rho Q_1' + (\gamma - Z\alpha mc/\lambda) Q_1 + (\chi - Z\alpha \varepsilon/\lambda) Q_2 &= 0, \\ \rho Q_2' + (\gamma + Z\alpha mc/\lambda - \rho) Q_2 + (\chi + Z\alpha \varepsilon/\lambda) Q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (100)$$

Вблизи $\rho = 0$ система уравнений всегда имеет решение, так как

$$\gamma^2 - (Z\alpha mc/\lambda)^2 = \chi^2 - (Z\alpha \varepsilon/\lambda)^2. \quad (101)$$

Тогда

$$Q_2 = -\frac{\gamma - Z\alpha mc/\lambda}{\chi - Z\alpha \varepsilon/\lambda} Q_1 = -\frac{\chi + Z\alpha \varepsilon/\lambda}{\gamma + Z\alpha mc/\lambda} Q_1. \quad (102)$$

Составляя уравнения второго порядка и разрешая относительно Q_1 и Q_2 , получим

$$\begin{aligned} \rho Q_1'' + (2\gamma + 1 - \rho) Q_1' - (\gamma - Z\alpha mc/\lambda) Q_1 &= 0, \\ \rho Q_2'' + (2\gamma + 1 - \rho) Q_2' - (\gamma + 1 - Z\alpha mc/\lambda) Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (103)$$

Решением этих уравнений с учётом (101) является

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF(\gamma - Z\alpha mc/\lambda, 2\gamma + 1, \rho), \\ Q_2 &= -A \frac{\gamma - Z\alpha mc/\lambda}{\chi - Z\alpha \varepsilon/\lambda} F(\gamma + 1 - Z\alpha mc/\lambda, 2\gamma + 1, \rho), \end{aligned} \quad (104)$$

где $F(\alpha, \beta, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция и A – постоянная нормирования волновой функции. Функция $F(\alpha, \beta, z)$ сводится к полиному, если параметр α равен целому отрицательному числу или нулю. Поэтому конечные решения для функций f и g есть

$$\gamma - \frac{Z\alpha mc}{\lambda} = -n_r. \quad (105)$$

Из выражений (104) получим

$$\begin{aligned} f &= A\sqrt{mc + \varepsilon} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} \left(F(-n_r, 2\gamma + 1, \rho) + \frac{n_r}{\chi - Z\alpha \varepsilon/\lambda} F(1 - n_r, 2\gamma + 1, \rho) \right), \\ g &= A\sqrt{mc - \varepsilon} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} \left(F(-n_r, 2\gamma + 1, \rho) - \frac{n_r}{\chi - Z\alpha \varepsilon/\lambda} F(1 - n_r, 2\gamma + 1, \rho) \right), \end{aligned} \quad (106)$$

где $n_r = 0, 1, 2, \dots$ – радиальное квантовое число. Из условия (105) для уровней энергии получаем

$$\frac{\varepsilon_{p,\chi}}{mc} = \sqrt{1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{\chi^2 + Z^2 \alpha^2}\right)^2}}$$

и с учётом принимаемых значений χ окончательно имеем

$$\begin{aligned} E_{n,j} &= mc^2 \sqrt{1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n_r + \sqrt{(j+1/2)^2 + Z^2 \alpha^2}\right)^2}} \\ &= mc^2 \sqrt{1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n + \frac{Z^2 \alpha^2}{j+1/2 + \sqrt{(j+1/2)^2 + Z^2 \alpha^2}}\right)^2}}, \end{aligned} \quad (107)$$

где главное квантовое число $n = n_r + j + 1/2$. Кроме $j = n - 1/2$ все остальные уровни с $j < n - 1/2$ вырождены дважды по орбитальному моменту $l = |j \pm 1/2|$. Энергия основного состояния при $n = 1$ и $j = 1/2$ составляет

$$E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + Z^2 \alpha^2}} \quad (108)$$

без каких-либо ограничений для значения Z . В этом случае $\gamma - 1 = -1 + \sqrt{1 + Z^2 \alpha^2} > 0$ и никакого падения частицы на центр не наблюдается, а вероятность нахождения частицы в центре (в ядре) всегда равна нулю.

В полученной формуле (107) порядок следования уровней тонкого расщепления обратный относительно порядка следования в известной формуле Зоммерфельда–Дирака. Если сравнить разложения в ряд по степени постоянной тонкого расщепления двух формул

$$\frac{E_n}{mc^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \alpha^2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8n^4} - \frac{1}{2n^3(j+1/2)} \right) \alpha^4, \quad \frac{\Delta E_{3/2, 1/2}}{mc^2} = \frac{\alpha^4}{32}, \quad (109)$$

$$\frac{E_n}{mc^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \alpha^2 + \left(-\frac{3}{8} - \frac{1}{8n^4} + \frac{1}{2n^3(j+1/2)} \right) \alpha^4, \quad \frac{\Delta E_{3/2, 1/2}}{mc^2} = -\frac{\alpha^4}{32}, \quad (110)$$

то разность составит

$$\frac{\Delta E_n}{mc^2} = \frac{\alpha^4}{2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} - \frac{\alpha^4}{n^3(j+1/2)}, \quad (111)$$

где последний член есть выражение энергии спин-орбитального взаимодействия. Таким образом, чтобы получить истинное значение уровней энергии атома водорода, в формуле (107) следует добавить энергию спин-орбитального взаимодействия в виде (111). Это вполне резонно, т. к. изначально такое взаимодействие в уравнение (97) не включалось и не отражено в конечном результате.

6. Заключение

Обобщён принцип инвариантности и предложено соответствующее представление обобщённого импульса системы, предложены уравнения релятивистской и квантовой механики, которые лишены перечисленных выше недостатков и противоречий. Уравнения имеют решения при любых значениях постоянной взаимодействия частицы с полем, например, в задаче водородоподобного атома, когда атомный номер ядра $Z > 137$. Уравнения применимы для разных типов частиц и взаимодействий.

На основе параметрического представления действия и канонических уравнений построена соответствующая релятивистская механика на основе канонического лагранжиана и выведены уравнения движения и выражение для силы, действующей на заряд при движении во внешнем электромагнитном поле.

Матричное представление уравнений характеристик для функции дей-

ствия и волновой функции приводят к уравнению Дирака с корректным включением взаимодействия. В таком виде решения уравнений Дирака не ограничены значением постоянной взаимодействия и имеют спинорное представление скалярными решениями уравнений для функции действия и волновой функции.

Приведены решения задачи движения заряда в постоянном электрическом поле, задачи частицы в потенциальной яме, задачи прохождения частицы через потенциальный барьер и задачи атома водорода.

Анализ решений показывает полное соответствие принципам релятивистской и квантовой механики, и решения лишены каких-либо ограничений по характеру и величине взаимодействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Bohr. *Philos. Mag.*, **26**, 1, 476, 857 (1913).
2. G.E. Uhlenbeck, S. Goudsmit. *Naturwissenschaften*, **47**, 953 (1925); *Nature*, **117**, 264 (1926).
3. A. Sommerfeld. *Ann. Phys.*, **51**, 1 (1916); *Phys. Z.*, **17**, 491 (1916).
4. Я.И. Грановский. *УФН*, **174**, 577 (2004).
5. P.A.M. Dirac. *Proc. Royal Society A*, **117**, 610 (1928).
6. M. Louis de Broglie. *Comptes Rendus*, **177**, 507 (1923).
7. Д. Хоффман. Эрвин Шрёдингер. Москва, Мир, 1987.
8. E. Schrödinger. *Ann. Physik.*, **79**, 389 (1926).
9. O. Klein. *Z. Phys.*, **37**, 895 (1926).
10. V. Fock. *Z. Phys.*, **38**, 242 (1926).
11. W. Gordon. *Z. Phys.*, **40**, 117 (1926).
12. W. Heisenberg, P. Jordan. *Zeits. Phys.*, **37**, 263 (1926).
13. L.H. Thomas. *Nature*, **117**, 514 (1926); *Phil. Mag.*, **3**, 1 (1927).
14. А.А. Соколов, И.М. Тернов. *Релятивистский электрон*. Москва, Наука, 1974.
15. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. *Квантовая электродинамика*. Москва, Физматлит, 2002.
16. Э. Маделунг. *Математический аппарат физики*. Москва, Гос. изд. физ.-мат. лит., 1968.
17. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. *Квантовая электродинамика*. Москва, Наука, 1981.
18. П.А.М. Дирак. *Труды института истории естествознания и техники*, **22**, 32 (1959).
19. В.М. Мыхитарян. *Известия НАН Армении, Физика*, **47**, 379 (2012).
20. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Механика*. Москва, Физматлит, 2004.
21. В.М. Мыхитарян. *Известия НАН Армении, Физика*, **48**, 3 (2013).
22. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория поля*. Москва, Физматлит, 2003.
23. В.М. Мыхитарян. *Известия НАН Армении, Физика*, **51**, 147 (2016).
24. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. Москва, Физматлит, 2004.

ՌԵԼՅԱՏԻՎԻՍՏԱԿԱՆ ԵՎ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ
ԵՎ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՃՇՊԵՐՏ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Վ.Մ. ՄԵԽԻՏԱՐՅԱՆ

Ընդհանրացված իմպուլսի ինվարիանտ ներկայացման հիման վրա առաջարկվել են ռելյատիվիստական ինվարիանտ հավասարումներ գործողության և ալիքային ֆունկցիաների համար: Հավասարումներն ունեն լուծումներ դաշտի հետ մասնիկի փոխազդեցության ցանկացած հաստատունի դեպքում, օրինակ, ջրածնանման ատոմի դեպքում, երբ միջուկի ատոմային թիվը $Z > 137$: Գործողության պարամետրական ներկայացման միջոցով դուրս են բերվել կանոնիկ լագրանժիանի արտահայտությունը, շարժման հավասարումներն ու արտաքին էլեկտրամագնիսական դաշտում շարժվող մասնիկի վրա ազդող ուժի արտահայտությունը: Արտաքին դաշտում գտնվող մասնիկի համար ներկայացված է Դիրակի հավասարումները, որում ճշգրիտ ներառված է փոխազդեցությունը: Այդ տեսքով հավասարումների լուծումները սահմանափակված չեն փոխազդեցության հաստատունի մեծությամբ: Բերված են մասնիկի շարժումը հաստատուն էլեկտրական դաշտում, մասնիկը պոտենցիալ հորում և մասնիկի անցումը պոտենցիալ արգելքով, ինչպես նաև ջրածնի ատոմի խնդիրի ճշգրիտ լուծումները:

EQUATIONS OF RELATIVISTIC AND QUANTUM MECHANICS
AND EXACT SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS

V.M. MEKHITARIAN

Relativistic invariant equations are proposed for the action function and the wave function on the basis of the invariance of the representation of the generalized momentum. The equations have solutions for any values of the interaction constant of a particle with a field, for example, in the problem of a hydrogen-like atom, when the atomic number of the nucleus is $Z > 137$. On the basis of the parametric representation of the action, the expression for the canonical Lagrangian, the equations of motion and the expression for the force acting on the charge during motion in external electromagnetic field are derived. The Dirac equation with the correct inclusion of the interaction for a particle in an external field is presented. In this form, the solutions of the equations are not limited by the value of the interaction constant. Solutions of the problem of charge motion in a constant electric field, problems for a particle in a potential well, and passage of a particle through a potential barrier, as well as problem of a hydrogen atom are presented.