

СИЛЫ КАЗИМИРА В МОДЕЛЯХ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Т.Ш. НАВАСАРДЯН, А.А. СААРЯН*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: saharian@ysu.am

(Поступила в редакцию 21 июня 2017 г.)

Исследованы силы Казимира для скалярного поля, действующие на параллельные пластины в моделях с компактным подпространством. На пластинах поле удовлетворяет граничным условиям Робина. В зависимости от значений коэффициентов в граничных условиях силы могут быть как притягивающими, так и отталкивающими. В моделях с однородным компактным подпространством они одинаковы для обеих пластин. В частных случаях граничных условий Дирихле и Неймана силы Казимира являются притягивающими. Исходя из общих результатов в качестве примеров рассмотрены два частных случая с подпространствами S^1 и S^2 .

1. Введение

Эффект Казимира является макроскопическим проявлением квантовых свойств вакуума [1–3]. Граничные условия, налагаемые на оператор поля, приводят к изменению спектра нулевых колебаний вакуума и в результате этого возникают вакуумные силы, действующие на границы области квантования. Эти силы называются силами Казимира, и они впервые были исследованы им для электромагнитного поля в геометрии двух параллельных проводящих пластин. В дальнейшем силы Казимира были вычислены для различных полей и геометрий границ.

В предыдущих наших работах [4, 5] рассмотрены локальные характеристики скалярного вакуума в многомерных моделях с компактным подпространством при наличии плоскопараллельных границ, на которых скалярное поле удовлетворяет условиям Робина. В настоящей работе, основываясь на результатах работы [5], исследованы силы Казимира для общего случая геометрии внутреннего подпространства, а также рассмотрены частные случаи.

2. Геометрия задачи

Рассмотрим пространственно-временное многообразие с топологией $R^{(D_1-1,1)} \times \Sigma$, где $R^{(D_1-1,1)}$ соответствует D_1 -мерному пространству-времени Минковского с тривиальной топологией, а Σ – D_2 -мерное внутреннее пространство. Фоновое $(D+1)$ -мерное пространство-время описывается интервалом

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \gamma_{ij} dX^i dX^j - dy^2, \quad (1)$$

где $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ – метрический тензор D_1 -мерного пространства-времени Минковского, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D_1-1$, $i, j = 1, \dots, D_2$, а координаты X^i покрывают D_2 -мерное компактное внутреннее пространство Σ и $D = D_1 + D_2$.

В настоящей работе исследуются силы Казимира, действующие на плоскопараллельные пластины с координатами $y = a_1$ и $y = a_2$ ($a_1 < a_2$) на фоне геометрии (1) и обусловленные модификацией квантовых флуктуаций скалярного поля $\phi(x)$. На пластинах оператор поля удовлетворяет граничным условиям Робина

$$(1 + \beta_j n^M \nabla_M) \phi(x) = (1 + \beta_j (-1)^{j-1} \partial_y) \phi(x) = 0, \quad y = a_j, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

где ∇_M – оператор ковариантной производной, n^M – нормаль к границам, а β_1 и β_2 – постоянные. Для скалярного поля с параметром связи с кривизной ζ уравнение движения имеет вид

$$(g^{MN} \nabla_M \nabla_N + m^2 + \zeta R) \phi(x) = 0, \quad (3)$$

где R – скаляр кривизны фонового пространства-времени. Для метрики, соответствующей интервалу (1), имеем $R = -R_{(\gamma)}$, где $R_{(\gamma)}$ – скалярная кривизна для метрики γ_{ik} .

3. Силы Казимира

Силы Казимира, действующие на границы, определяются P_y -компонентой тензора энергии-импульса. В области между пластинами эта компонента представляется в виде [5]

$$\langle T_D^D \rangle = \langle T_D^D \rangle_0 + \langle T_D^D \rangle_b^{(j)} + \langle T_D^D \rangle_b^{(jj')}, \quad (4)$$

где $j' = 2$ при $j = 1$ и $j' = 1$ при $j = 2$. В выражении (4) $\langle T_D^D \rangle_0$ – вакуумное среднее в геометрии без границ, слагаемое $\langle T_D^D \rangle_b^{(j)}$ обусловлено наличием пластины $y = a_j$, когда вторая пластина отсутствует, а $\langle T_D^D \rangle_b^{(jj')}$ генерировано добавлением пластины в $y = a_{j'}$. Для отдельных слагаемых, обусловленных границами, имеем следующие выражения:

$$\langle T_D^D \rangle_b^{(j)} = -A_{D_1} \left(\zeta - \frac{1}{4} \right) \sum_{\beta} \Delta_{(\gamma)} |\psi_{\beta}(X)|^2 \int_{v_{\beta}}^{\infty} du (u^2 - v_{\beta}^2)^{D_1/2-1} \frac{u\beta_j + 1}{u\beta_j - 1} e^{-2u|y-a_j|}, \quad (5)$$

$$\langle T_D^D \rangle_b^{(jj')} = -2A_{D_1} \sum_{\beta} \int_{v_{\beta}}^{\infty} du \frac{(u^2 - v_{\beta}^2)^{D_1/2-1}}{(\beta_1 u - 1)(\beta_2 u - 1) e^{2au-1}} \quad (6)$$

$$\times \left[\left(\zeta - \frac{1}{4} \right) F_j(u) \Delta_{(\gamma)} |\psi_{\beta}(X)|^2 - u^2 |\psi_{\beta}(X)|^2 \right],$$

где $a = a_2 - a_1$ — расстояние между пластинами, $A_{D_1} = (4\pi)^{-D_1/2} / \Gamma(D_1/2)$, $v_{\beta} = \sqrt{\lambda_{\beta}^2 + m^2}$ и

$$F_j(u) = 1 + \frac{u^2 \beta_j^2 + 1}{u^2 \beta_j^2 - 1} \cosh(2u|y - a_j|) - \frac{2u\beta_j}{u^2 \beta_j^2 - 1} \sinh(2u|y - a_j|). \quad (7)$$

В выражениях (5) и (6) $\psi_{\beta}(X)$ являются собственными функциями оператора $\Delta_{(\gamma)} + \zeta R_{(\gamma)}$:

$$[\Delta_{(\gamma)} + \zeta R_{(\gamma)}] \psi_{\beta}(X) = -\lambda_{\beta}^2 \psi_{\beta}(X). \quad (8)$$

Здесь λ_{β}^2 — собственные значения, а $\Delta_{(\gamma)}$ — оператор Лапласа во внутреннем подпространстве.

Давление Казимира на пластину $y = a_j$ определяется величиной $-\langle T_D^D \rangle$, вычисленной при $y = a_j$. Натяжения $\langle T_D^D \rangle_0$ и $\langle T_D^D \rangle_b^{(j)}$ одинаковы на обеих сторонах пластин. Следовательно, соответствующая им суммарная сила равна нулю. Обозначим через P_j силу, действующую на единицу поверхности пластины $y = a_j$. Эта сила обусловлена последним слагаемым в формуле (4), т. е. $P_j = -\langle T_D^D \rangle_b^{(jj')}|_{y=a_j}$. Воспользовавшись выражением (6), находим

$$P_j = 2A_{D_1} \sum_{\beta} \int_{v_{\beta}}^{\infty} du \frac{u^2 (u^2 - v_{\beta}^2)^{D_1/2-1}}{(\beta_1 u - 1)(\beta_2 u - 1) e^{2au-1}} \quad (9)$$

$$\times \left[\frac{(2\zeta - 1/2)\beta_j^2}{u^2 \beta_j^2 - 1} \Delta_{(\gamma)} |\psi_{\beta}(X)|^2 - |\psi_{\beta}(X)|^2 \right].$$

При $P_j < 0$ ($P_j > 0$) силы Казимира имеют характер притяжения (отталкивания). Соответствующие силы в пространстве-времени Минковского исследовались в работе [6]. Силы Казимира для пластин с граничными условиями Робина в пространстве-времени анти-де Ситтера и де Ситтера рассмотрены в работах [7, 8] и [9], соответственно. Более общий случай фонового пространства-времени Фридмана-Робертсона-Уокера исследовался в работе [10].

Для граничных условий Дирихле на обеих пластинах имеем $\beta_j = 0$, и вакуумные давления представляются в виде

$$P_j^{(D)} = -2A_{D_1} \sum_{\beta} |\psi_{\beta}(X)|^2 \int_{v_{\beta}}^{\infty} du \frac{u^2(u^2 - v_{\beta}^2)^{D_1/2-1}}{e^{2au} - 1}. \quad (10)$$

Другое представление можно получить, воспользовавшись разложением

$$\frac{1}{e^y - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) и выражая интеграл через функцию Макдональда $K_{\nu}(x)$, имеем

$$P_j^{(D)} = -2 \sum_{\beta} \frac{v_{\beta}^{D_1+1} |\psi_{\beta}(X)|^2}{(2\pi)^{(D_1+1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} [D_1 f_{(D_1+1)/2}(2nav_{\beta}) + f_{(D_1-1)/2}(2nav_{\beta})], \quad (12)$$

где введено обозначение

$$f_{\nu}(x) = K_{\nu}(x) / x^{\nu}. \quad (13)$$

Силы, соответствующие выражению (12), имеют характер притяжения.

Для граничного условия Неймана имеем $\beta_j = \infty$ и

$$P_j^{(N)} = P_j^{(D)} + (4\zeta - 1)A_{D_1} \sum_{\beta} \Delta_{(\gamma)} |\psi_{\beta}(X)|^2 \int_{v_{\beta}}^{\infty} du \frac{(u^2 - v_{\beta}^2)^{D_1/2-1}}{e^{2au} - 1}. \quad (14)$$

Эквивалентное представление получается с помощью разложения (11):

$$P_j^{(N)} = P_j^{(D)} + \frac{4\zeta - 1}{(2\pi)^{(D_1+1)/2}} \sum_{\beta} v_{\beta}^{D_1-1} \Delta_{(\gamma)} |\psi_{\beta}(X)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_{(D_1-1)/2}(2nav_{\beta}). \quad (15)$$

Для однородных внутренних пространств силы Казимира при граничных условиях Дирихле и Неймана совпадают.

4. Два частных случая

Рассмотрим два частных случая представленных выше общих результатов. Начнем с простого примера $\Sigma = S^1$ и $D = D_1 + 1$. Длину компактного измерения с координатой X обозначим через L , $0 \leq X \leq L$. Вдоль этого измерения наложим квазипериодическое условие

$$\psi_{\beta}(X + L) = e^{2i\pi\alpha} \psi_{\beta}(X) \quad (16)$$

с постоянной фазой $0 \leq \alpha \leq 1$. Соответствующие нормированные собственные функции имеют вид

$$\psi_{\beta}(X) = e^{iK_{\beta}X} / \sqrt{L}, \quad (17)$$

где $\lambda_\beta = |K_\beta|$. Собственные значения квантового числа K определяются из условия (16):

$$K_\beta = \frac{2\pi}{L}(\beta + \alpha), \quad \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

Подставив формулы (17) и (18) в выражение (9) для давлений Казимира, оно примет следующий вид:

$$P_j = -\frac{2A_{D-1}}{L} \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} \int_{v_\beta}^{\infty} du \frac{u^2 (u^2 - v_\beta^2)^{(D-3)/2}}{(\beta_1 u - 1)(\beta_2 u - 1) e^{2au} - 1} \cdot \frac{1}{(\beta_1 u + 1)(\beta_2 u + 1)}, \quad (19)$$

где

$$v_\beta = \sqrt{(2\pi/L)^2 (\beta + \alpha)^2 + m^2}. \quad (20)$$

Отсюда следует, что силы, действующие на пластины, одинаковы независимо от значений коэффициентов в граничных условиях. Для граничных условий Дирихле и Неймана силы Казимира совпадают и представляются в виде

$$P_j^{(D,N)} = -\frac{2}{(2\pi)^{D/2}} \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} v_\beta^D \sum_{n=1}^{\infty} [(D-1)f_{D/2}(2n\alpha v_\beta) + f_{D/2-1}(2n\alpha v_\beta)], \quad (21)$$

где функция $f_v(x)$ определяется выражением (13). Силы, соответствующие (21), имеют характер притяжения.

Рассмотрим поведение силы (19) для больших и малых расстояний между пластинами. При $a \gg L$ и $\alpha = 0$ основной вклад в выражение (19) дает нулевая мода $\beta = 0$, и в ведущем порядке получим

$$P_j \approx -\frac{2A_{D-1}}{L} \int_m^{\infty} du \frac{u^2 (u^2 - m^2)^{(D-3)/2}}{(\beta_1 u - 1)(\beta_2 u - 1) e^{2au} - 1} \cdot \frac{1}{(\beta_1 u + 1)(\beta_2 u + 1)}. \quad (22)$$

В этом порядке величина LP_j совпадает с силой, действующей на единицу поверхности пластины в D -мерном пространстве-времени Минковского с тривиальной топологией. При $a \gg L$ и $\alpha \neq 0$ основной вклад в выражение (19) дает область интегрирования вблизи нижней границы интегрирования и силы Казимира подавлены экспоненциальным фактором $\exp[-2a\sqrt{(2\pi\alpha/L)^2 + m^2}]$. В пределе $a \ll L$ основной вклад в выражение (19) дают слагаемые с большими значениями $|\beta|$ и в ведущем порядке можно заменить суммирование интегрированием. В этом порядке вакуумные силы совпадают с соответствующими силами в $(D+1)$ -мерном пространстве-времени Минковского с тривиальной топологией. Это выражение получается из (22) заменой $D \rightarrow D+1$.

На рис.1 представлено отношение силы Казимира $P_j = P$ в модели с $D = 4$, компактным подпространством S^1 и граничными условиями Дирихле или Неймана (формула (21)) к соответствующей силе в модели $D = 4$ с тривиальной топологией, $P^{(M)} = -3\zeta(5)/(32\pi^2 a^5)$, в зависимости от отношения a/L ($\zeta(x)$ – функция Римана). Рассмотрен случай безмассового скалярного поля. Числа возле кривых соответствуют значениям параметра α в условии квазипериодичности (16). Согласно приведенным выше асимптотическим оценкам, при $a \gg L$ и $\alpha \neq 0$ силы в модели с компактным измерением экспоненциально подавлены.

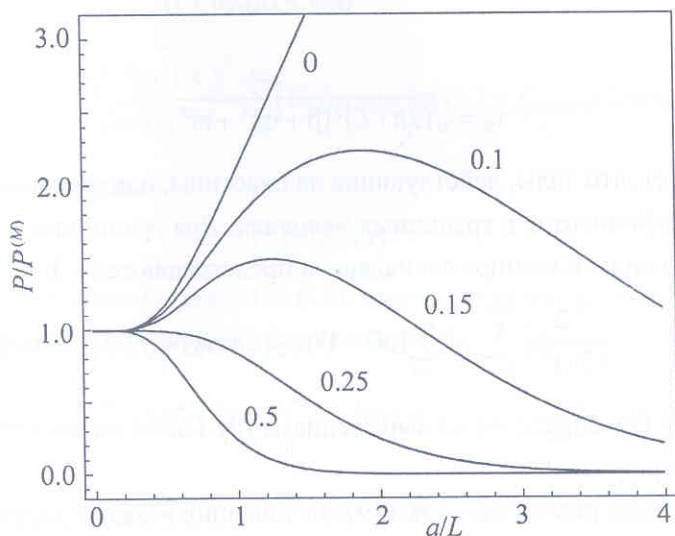


Рис.1. Отношение силы Казимира в модели с $D = 4$, с подпространством S^1 и граничными условиями Дирихле или Неймана, к соответствующей силе в модели $D = 4$ с тривиальной топологией в зависимости от расстояния между пластинами.

Для граничных условий Дирихле и Неймана силы Казимира имеют характер притяжения независимо от расстояния между пластинами. В общем случае условий Робина это не так: вакуумные силы могут быть как притягивающими, так и отталкивающими. Более того, характер сил может меняться с расстоянием. Соответствующие примеры в задаче без компактного подпространства рассмотрены в работе [6]. В частности, были рассмотрены случаи, когда силы отталкивающие на малых расстояниях и притягивающие на больших расстояниях. В результате появляется возможность стабилизации расстояния между пластинами силами Казимира. Аналогичный механизм стабилизации в моделях бран миров на фоне пространства-времени анти-де Ситтера был предложен в работе [11]. Простейшим примером с отталкивающими силами Казимира является случай граничного условия Дирихле на одной пластине и условия Неймана на другой,

$\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = \infty$. В этом случае, как непосредственно следует из выражения (19), имеем $P_j > 0$ и силы являются отталкивающими на всех расстояниях между пластинами.

Рассмотрим теперь внутреннее пространство $\Sigma = S^2$. В угловых координатах (θ, ϕ) метрический тензор внутреннего пространства имеет вид

$$\gamma_{ij} = (L^2, L^2 \sin^2 \theta), \quad (23)$$

где L — радиус сферы. Для соответствующей скалярной кривизны имеем $R_{(y)} = -2/L^2$. Нормированные собственные функции выражаются через сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$\psi_\beta(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi) / L, \quad (24)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$, $M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $-l \leq M \leq l$. Для собственных значений λ_β^2 имеем

$$\lambda_\beta^2 = [l(l+1) + 2\zeta] / L^2. \quad (25)$$

Подставляя моды (24) в выражение силы (3) и используя

$$\sum_{M=-l}^l |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}, \quad (26)$$

находим

$$P_j = -\frac{A_{D-2}}{2\pi L^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_{v_l}^{\infty} du \frac{u^2 (u^2 - v_l^2)^{D/2-2}}{(\beta_1 u - 1)(\beta_2 u - 1) e^{2au} - 1}, \quad (27)$$

где

$$v_l = \frac{1}{L} \sqrt{m^2 L^2 + 2\zeta + l(l+1)}. \quad (28)$$

Соответствующие силы для отдельных пластин совпадают. Для граничных условий Дирихле и Неймана получим

$$P_j^{(D,N)} = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)v_l^{D-1}}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} [(D-2)f_{(D-1)/2}(2nav_l) + f_{(D-3)/2}(2nav_l)]. \quad (29)$$

В этих частных случаях силы имеют характер притяжения.

5. Заключение

Исследованы силы Казимира для скалярного поля в геометрии двух параллельных пластин в пространстве-времени с произвольным компактным подпространством. На пластинах поле удовлетворяет граничным условиям Робина в общем случае с различными коэффициентами для отдельных пластин. Силы

вычислены на основе результатов для вакуумного среднего тензора энергии-импульса, полученных в предыдущих наших работах [4, 5]. Получено общее выражение для давлений Казимира на пластину $y = a_j$. Для неоднородного внутреннего пространства силы, действующие на отдельные пластины, в общем случае различны. Для однородных подпространств эти силы совпадают независимо от значений коэффициентов в граничных условиях. Для общих условий Робина силы Казимира могут иметь как характер притяжения, так и отталкивания.

В качестве примеров рассмотрены два частных случая с внутренними подпространствами $\Sigma = S^1$ и $\Sigma = S^2$. Оба подпространства однородны и силы, действующие на правую и левую пластины, одинаковы. В случае $\Sigma = S^1$ давления Казимира определяются выражением (19) для граничных условий Робина и (21) для частных случаев граничных условий Дирихле и Неймана. Во втором случае внутреннее пространство искривлено и силы представляются выражением (27) для граничных условий Робина и (29) для граничных условий Дирихле и Неймана.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.M. Mostepanenko, N.N. Trunov. The Casimir Effects and Its Applications. Oxford, Oxford University Press, 1997.
2. K.A. Milton. The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy. Singapore, World Scientific, 2002.
3. M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko. Advances in the Casimir Effect. Oxford, Oxford University Press, 2009.
4. Т.Ш. Навасардян, А.А. Саарян. Изв. НАН Армении, Физика, **49**, 3 (2014).
5. Т.Ш. Навасардян, А.А. Саарян. Изв. НАН Армении, Физика, **49**, 375 (2014).
6. A. Romeo, A.A. Saharian. J. Phys. A, **35**, 1297 (2002).
7. A.A. Saharian. Nucl. Phys. B, **712**, 196 (2005).
8. A.A. Saharian. Phys. Rev. D, **73**, 064019 (2006).
9. E. Elizalde, A.A. Saharian, T.A. Vardanyan. Phys. Rev. D, **81**, 124003 (2010).
10. E.R. Bezerra de Mello, A.A. Saharian, M.R. Setare. Phys. Rev. D, **95**, 065024 (2017).
11. A.A. Saharian, M.R. Setare. Phys. Lett. B, **552**, 119 (2003).

CASIMIR FORCES IN MODELS WITH NON-TRIVIAL TOPOLOGY

T.SH. NAVASARDYAN, A.A. SAHARIAN

For a scalar field the Casimir forces, acting on parallel plates in models with a compact subspace, are investigated. On the plates the field obeys the Robin boundary conditions. Depending on the values of the coefficients in the boundary conditions, the forces can be either attractive or repulsive. In models with a homogeneous compact subspace they are the same for both the plates. In special cases of Dirichlet and Neumann boundary conditions the Casimir forces are attractive. As applications of general results, we consider special cases with the subspaces S^1 and S^2 .