

УДК 539.196; 517.589

ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ УРОВНЕЙ ИЗ ОБЩЕГО КЛАССА ГОЙНА

G. SAGET¹, А.М. ИШХАНЫАН^{2,3}, С. LEROY¹, Т.А. ИШХАНЫАН^{1,2,4*}

¹Université de Bourgogne Franche-Comté, Dijon, France

²Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

³Армянский государственный педагогический университет, Ереван, Армения

⁴Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

*e-mail: tishkhanyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 19 июля 2017 г.)

Представлена специальная модель полуклассической квантовой временной двухуровневой задачи, описывающая периодическое пересечение уровней при постоянном значении амплитуды поля. Модель принадлежит к одному из общих классов конфигураций поля Гойна. Точное аналитическое решение для амплитуды вероятности, которое в общем случае для этого класса пишется в общих функциях Гойна, для данной специфической модели допускает разложение в ряд по неполным бета-функциям. Результатом обрывания этого ряда является бесконечная иерархия условно интегрируемых замкнутых решений (имеющих конечное число слагаемых): для данных конфигураций полей соответствующие функции модуляции амплитуды и фазы задаются в увязке друг с другом. Тем не менее, существует как минимум одна особая модель, которая интегрируема без дополнительных условий, то есть частота Раби и расстройка возбуждающего внешнего поля контролируются независимо. Это – модель с периодическим пересечением уровней при постоянном значении амплитуды поля, для которой расстройка в пределе переходит в конфигурацию типа дельта-гребенки Дирака с варьируемой частотой пересечения уровней. Получено точное решение для данной модели, определены показатели Флоке и изучена динамика населённости системы для разных областей входных параметров.

1. Введение

Двухуровневая система представляет собой простейшую нетривиальную квантовую систему, которую можно исследовать аналитически, и является довольно хорошей аппроксимацией для многих реальных квантовых систем в природе. Образцы таких систем возникают во множестве явлений современной физики, химии, инженерии и т. д. В настоящей работе рассматриваются такие квантовые неадиабатические переходы между уровнями [1] в процессе взаимодействия внешнего оптического поля с материей, когда только один из переходов

между двумя уровнями многоуровневой, в общем случае, системы приблизительно резонансен с внешним полем. Таким образом, рассматривается динамика только двух квантовых уровней, т. е. квантовая двухуровневая задача [1, 2], в предположении пренебрежимо малого эффекта внешнего поля на другие уровни системы, так как они далеки от резонанса.

Рассматриваемая специфическая модель задает такую амплитудно-постоянную конфигурацию внешнего поля с периодической модуляцией фазы, которая может быть с пересечениями, касаниями уровней или без пересечений. Отметим, что несмотря на то, что пересечение уровней есть ключевая парадигма теории квантовых неадиабатических переходов [1, 2], известно всего несколько аналитических моделей, описывающих такие процессы [3–9]. Более того, это модели с одним пересечением уровней, и, насколько нам известно, аналитически точно решаемые модели с периодическими пересечениями резонанса не известны.

Уравнение Шредингера для квантовой двухуровневой системы в полуклассической временной формулировке записывается как система из пары обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка для амплитуд вероятности двух вовлечённых уровней. Эта система далее приводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка для амплитуды вероятности нижнего или верхнего уровня.

Некоторый базовый набор интегрируемых моделей двухуровневой системы был в прошлом разработан путем решения временного уравнения Шредингера в специальных математических функциях гипергеометрического класса [3–14]. Большее число моделей получается при выражении решения задачи в функциях Гойна, которые являются решениями пяти уравнений Гойна [15–17]. Следует отметить, что функции Гойна, которые составляют следующее поколение специальных функций, представляют прямое обобщение гипергеометрических функций. Поэтому решения задачи в функциях Гойна обобщают все известные гипергеометрические случаи.

Недавно нами было показано, что существует 61 бесконечный класс моделей двухуровневой задачи, который решается с помощью пяти функций Гойна [18–20]: решения тридцати пяти классов даются общими функциями Гойна [18], пятнадцати классов – в однократно конфлюэнтных функциях Гойна [19], пяти классов – в дважды конфлюэнтных функциях Гойна [20], пяти других классов – в биконфлюэнтных функциях Гойна [20, 21] и ещё один класс, решение которого записывается в триконфлюэнтных функциях Гойна [20].

В настоящей работе рассматривается амплитудно-постоянная модель с периодическими пересечениями уровней, принадлежащая к одному из тридцати

пяти классов моделей конфигурации поля, которые аналитически решаются в общих функциях Гойна [18]. В данном частном случае общая функция Гойна в решении двухуровневой задачи допускает разложение в ряд по неполным бета-функциям. Коэффициенты разложения удовлетворяют трёхчленному рекуррентному соотношению, которое позволяет обрывать ряд. Показано, что условия одновременного обрывания ряда слева и справа в общем случае приводят к условно интегрируемым моделям, для которых функции амплитудной модуляции и расстройки не могут варьироваться независимо. Однако, существует некая частная безусловно интегрируемая модель. Это – амплитудно-постоянная модель с периодическими пересечениями уровней, для которой функция расстройки для некоторого большого параметра эффективно является дельта-гребёнкой Дирака, нанизанной на некоторую несущую частоту. Примечательно, что точное решение задачи для данной частной модели записывается в элементарных функциях. Это решение в явном виде демонстрирует показатели Флоке, выраженные через обобщённую частоту Раби для несущей частоты соответствующего амплитудно-постоянного поля. С помощью выведенного решения исследуется неадиабатическая динамика двухуровневой системы при возбуждении оптическим полем указанной конфигурации.

2. Амплитудно-постоянная модель двухуровневой задачи с пересечением уровней из класса общей функции Гойна

Управляющие уравнения для амплитуд вероятностей $a_1(t)$ и $a_2(t)$ основного и возбуждённого уровней для полуклассической временной двухуровневой задачи в приближении вращающейся волны записываются в виде следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [1, 2]:

$$i \frac{da_1(t)}{dt} = U(t) e^{-i\delta(t)} a_2(t), \quad i \frac{da_2(t)}{dt} = U(t) e^{+i\delta(t)} a_1(t). \quad (1)$$

В этих уравнениях функции амплитудной модуляции $U(t)$ (частота Раби) и частотной модуляции $\delta(t)$ (производная $\delta_t = d\delta/dt$ этой функции есть расстройка частоты перехода от частоты поля) являются произвольными реальными функциями времени. Система уравнений легко сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка, написанному для одной из амплитуд вероятностей. Для амплитуды вероятности возбуждённого состояния $a_2(t)$ уравнение имеет вид

$$a_{2tt}(t) + \left(-i\delta_t(t) - \frac{U_t(t)}{U(t)} \right) a_{2t}(t) + U(t)^2 a_2(t) = 0. \quad (2)$$

Здесь и далее нижние латинские индексы обозначают дифференцирование по соответствующей переменной.

Сведение уравнения (2) к общему уравнению Гойна [15–17]

$$u_{zz} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right) u_z + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} u = 0 \quad (3)$$

приводит к 35 классам конфигураций поля, задаваемых как [18]

$$U(t) = U_0^* z^{k_1} (z-1)^{k_2} (z-a)^{k_3} \frac{dz}{dt}, \quad (4)$$

$$\delta_i(t) = \left(\frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{z-1} + \frac{\delta_3}{z-a} \right) \frac{dz}{dt}, \quad (5)$$

где $z = z(t)$ – произвольная комплекснозначная функция времени, а $k_{1,2,3}$ являются целыми или полуцелыми числами, удовлетворяющими неравенствам $-1 \leq k_{1,2,3} \cup k_1 + k_2 + k_3 \leq -1$. Постоянные U_0^* и $\delta_{1,2,3}$ в общем случае комплексны, но их следует выбрать таким образом, чтобы функции $U(t)$ и $\delta(t)$ получились реальными для выбранного преобразования $z(t)$. Так как вовлечённые параметры, в том числе третья сингулярная точка a общего уравнения Гойна (3) произвольны, то все 35 классов в общем случае являются по крайней мере пятипараметрическими (преобразование $z(t)$ может привести дополнительные параметры).

Двухуровневая модель, которую мы рассматриваем, принадлежит к общегойновскому классу $k_{1,2,3} = (-1, 0, 0)$. Эта модель задаётся уравнениями (4) и (5) с комплекснозначным преобразованием независимой переменной $z(t) = \sqrt{a} e^{i\Delta(t-t_0)}$. Выбором параметров функций амплитудной модуляции и расстройки

$$U_0^* = -i \frac{U_0}{\Delta}, \quad \delta_1 = -i \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \delta_2 = -\delta_3 = i \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (6)$$

получаем 6-параметрическую амплитудно-постоянную конфигурацию поля с периодической модуляцией расстройки (см. уравнения (46) и (47) в работе [18])

$$U(t) = U_0, \quad \delta_i(t) = \Delta_1 + \frac{(1-a)\Delta_2}{1+a-2\sqrt{a}\cos(\Delta(t-t_0))}, \quad (7)$$

где $U_0, a, \Delta_1, \Delta_2$ и Δ, t_0 – произвольные реальные входные параметры, $a > 0$. Разные частные значения этих входных параметров задают модуляции расстройки с пересечением уровней, без пересечений и с касанием уровней (рис.1). Так как расстройка есть периодическая функция времени с периодом $T = 2\pi / \Delta$, касание уровней происходит, если условие резонанса $\delta_i(t) = 0$ выполняется на экстремуме функции $\cos(\Delta t)$, то есть если $t = t_0$ или $t = t_0 + \pi / \Delta$. Это имеет место, если

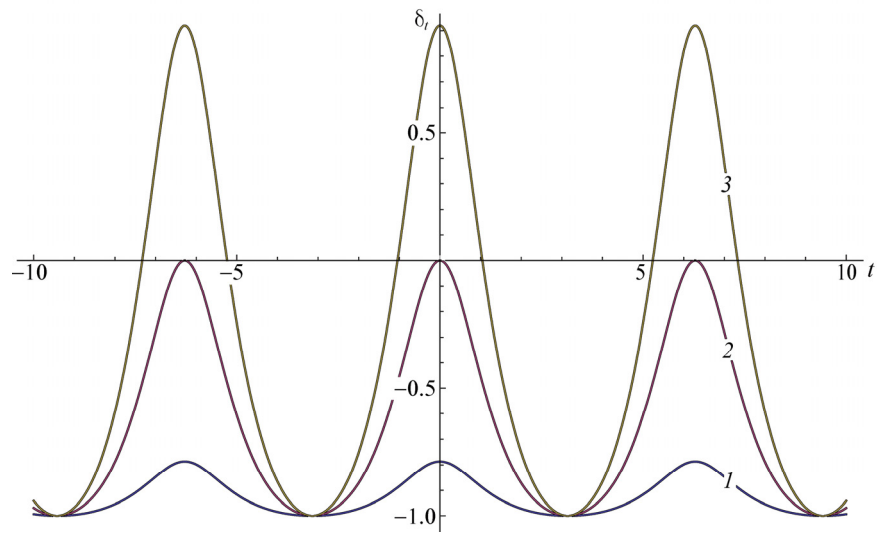


Рис.1. Функция модуляции расстройки (7) для $a = 16$ и $\Delta_1 = -1 + 3\Delta_2/5$: $\Delta_2 = -0.2, -15/16, -1.8$ для кривых 1, 2, 3, соответственно, $\Delta = 1$ и $t_0 = 0$.

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}. \quad (8)$$

Подсемейство моделей расстройки с касанием уровней, полученное вторым выбором, показано на рис.2.

Решение двухуровневой задачи (2) в явном виде записывается как

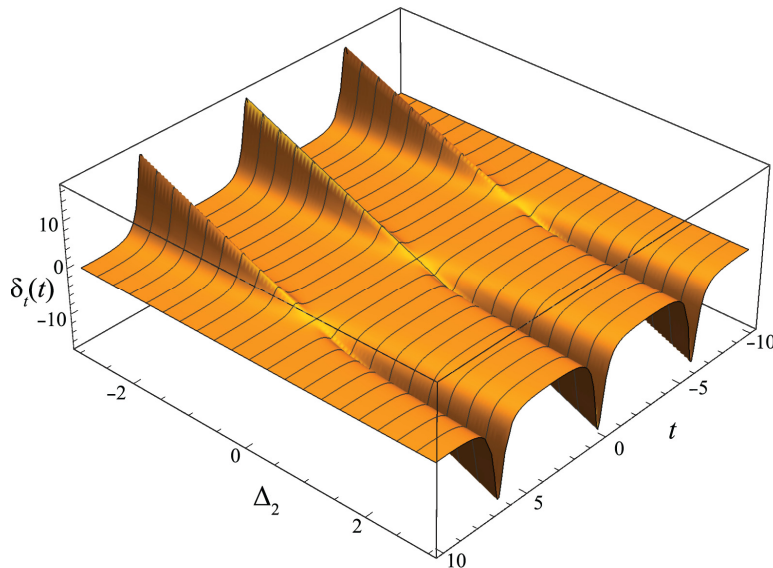


Рис.2. Одно из подсемейств функции модуляции расстройки с касанием уровней (7): $\Delta_1 = (a^{1/2} - 1) / (a^{1/2} + 1) \Delta_2$ и $a = 2$ ($\Delta = 1$, $t_0 = 0$).

$$a_2 = C_0 z^{\alpha_1} (z-1)^{\alpha_2} (z-a)^{\alpha_3} H_G(a, q; \alpha, \beta; \gamma, \delta, \varepsilon; z), \quad (9)$$

где C_0 – произвольная константа, параметры $\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha, \beta, q$ общей функции Гойна H_G определяются через уравнения (15)–(17) в работе [18] как (без потери общности, полагаем $\Delta = 1$)

$$(\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha, \beta, q) = \left(1 \pm \sqrt{4U_0^2 + \Delta_1^2}, \Delta_2, -\Delta_2, 0, \pm \sqrt{4U_0^2 + \Delta_1^2}, (a-1)\Delta_2\alpha_1 \right), \quad (10)$$

а параметры пре-фактора $\alpha_{1,2,3}$ имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{2} \pm \sqrt{U_0^2 + \frac{\Delta_1^2}{4}}, \quad \alpha_{2,3} = 0. \quad (11)$$

Заметим, что знаки плюс и минус в выражении для α_1 генерируют два независимых фундаментальных решения.

Общая функция Гойна является довольно сложным математическим объектом, теория которого в настоящее время слабо разработана. Тем не менее, в последнее время благодаря применению подхода Свартхольма [22] и Эрдельи [23], был достигнут некоторый прогресс. Были построены некоторые новые разложения общей функции Гойна в ряды по более простым специальным функциям, таким, как, например, неполные бета-функции, гипергеометрические функции Гаусса, обобщённые гипергеометрические функции двух переменных Аппеля [24–26]. Ниже мы используем специальное разложение общей функции Гойна, которое применимо, если характеристический показатель сингулярности в бесконечности есть ноль [24]. Как видно из уравнения (10), в нашем случае последнее условие удовлетворено, ибо $\alpha = 0$.

3. Разложение решения уравнения Гойна в ряд по неполным бета-функциям

Итак, для конфигурации поля (7) один из характеристических показателей регулярной сингулярной точки общего уравнения Гойна (3) на бесконечности есть ноль. В работе [24] было показано, что в этом случае общая функция Гойна допускает разложение в ряд по неполным бета-функциям:

$$u = \sum_n c_n u_n, \quad u_n = B_z(\gamma_n, \delta_n). \quad (12)$$

Это разложение получается следующим образом. Вовлечённые бета-функции удовлетворяют следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 u_n}{dz^2} + \left(\frac{1-\gamma_n}{z} + \frac{1-\delta_n}{z-1} \right) \frac{du_n}{dz} = 0. \quad (13)$$

Заметим, что это частный случай гипергеометрического уравнения Гаусса, для

которого по меньшей мере один из характеристических показателей есть ноль, как и в случае уравнения Гойна для конфигурации поля (7). Если положить $\delta_n = 1 - \delta$ для всех n , тогда характеристические показатели в сингулярной точке $z = 1$ также совпадут. Нашей целью является получение корректного поведения функции (12) в оставшихся сингулярных точках $z = 0$ и $z = a$ путём подгонки параметров γ_n и коэффициентов c_n в сумме. Для этого делается подстановка уравнений (12) и (13) в уравнение (3). Далее, пользуясь рекуррентными соотношениями между вовлечёнными бета-функциями, делается группировка членов, пропорциональных определенной u_n . И, наконец, требуется обнуление всех полученных коэффициентов подобным образом перегруппированной суммы. После некоторой процедуры вычислений получается трёхчленное рекуррентное соотношение для последовательных коэффициентов

$$R_n c_n + Q_{n-1} c_{n-1} + P_{n-2} c_{n-2} = 0, \quad (14)$$

где

$$R_n = a(\gamma - 1 + \gamma_n)(\gamma_n - 1), \quad (15)$$

$$Q_n = -a(\gamma - 2 + \gamma_n)(\gamma_n + \delta_n - 2) - ((\gamma - 2 + \gamma_n) + \varepsilon(\gamma_n - 1)) - q, \quad (16)$$

$$P_n = (\gamma_n + \delta_n - 2)((\gamma - 3 + \gamma_n) + \varepsilon). \quad (17)$$

Предполагая, что $\gamma_{n\pm 1} = \gamma_n \pm 1$, для обрывания ряда слева при $n = 0$ должно выполняться равенство $R_0 = 0$, то есть $\gamma_0 = 1 - \gamma$ или $\gamma_0 = 1$. Выбор $\gamma_0 = 1$ не работает, так как в этом случае $u_{-1} = B(z, 0, \delta_n)$, это выражение не определено, так что условие обрывания ряда слева есть

$$\gamma_0 = 1 - \gamma. \quad (18)$$

Это означает, что характеристические показатели уравнения (12) в сингулярной точке $z = 0$ для первого члена в разложении с $n = 0$, то есть для $u_0 = B_z(\gamma_0, \delta)$, совпадают с соответствующими показателями уравнения Гойна (3).

Окончательно получаем разложение

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n B_z(1 - \gamma + n, 1 - \delta) \quad (19)$$

с упрощёнными коэффициентами рекуррентного разложения (14)

$$R_n = an(n - \gamma), \quad (20)$$

$$Q_n = -an(n + 1 - \gamma - \delta) - (n + \varepsilon)(n + 1 - \gamma) - q, \quad (21)$$

$$P_n = (n + 2 - \gamma - \delta)(n + \varepsilon). \quad (22)$$

Ряд (19) обрывается с правой стороны и тем самым генерирует замкнутое решение, содержащее конечное число слагаемых, если два последующих коэффициента, например, c_{N+1} и c_{N+2} исчезают для некоторого $N = 0, 1, 2, \dots$. Уравнение

$c_{N+2} = 0$ удовлетворяется, если $P_N = 0$, что эквивалентно условию

$$\varepsilon = -N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

или

$$\gamma + \delta - 2 = +N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

В то же время уравнение $c_{N+1} = 0$ (далее называемое q -уравнением) приводит к полиномиальному уравнению порядка $N + 1$ для вспомогательного параметра q , тем самым накладывая определенное ограничение на этот параметр.

4. Условно и безусловно интегрируемые субмодели

Разложив общую функцию Гойна в бесконечный ряд по неполным бета-функциям и далее установив условия обрывания построенного ряда, зададимся следующим вопросом – можно ли представить решение двухуровневой задачи для конфигурации поля (7) как линейную комбинацию конечного числа неполных бета-функций? Таким образом мы проверим, удовлетворяются ли условия обрывания ряда параметрами общей функции Гойна, которые задаются уравнением (10). Выясняется, что для реальных входных параметров $U_0, a, \Delta_1, \Delta_2$ обрывание ряда невозможно, если условием обрывания выбрано уравнение (24). Для альтернативного же условия $\varepsilon = -N$, задаваемого уравнением (23), однако, обрывание возможно для всех целых неотрицательных $N = 0, 1, 2, 3, \dots$. Для $N = 0$ и $N = 1$ получается тривиальная модель Раби с постоянной расстройкой. Однако, начиная с $N = 2$, результаты становятся нетривиальными. Понятно, что таким образом получается бесконечная иерархия частных субмоделей, для которых решение двухуровневой задачи задаётся линейной комбинацией конечного числа неполных бета-функций. Рассмотрим эти случаи более подробно.

Для того, что удовлетворить условие обрывания ряда $\varepsilon = -N$ из уравнения (23), положим $\Delta_2 = N$ (см. уравнение (10)) с неотрицательными целыми $N = 0, 1, 2, \dots$. Это сводит число входных переменных конфигурации поля (7) к трём (мы не берем в расчет параметры, задающие масштаб и точку начала отсчёта времени Δ и t_0). Очевидно, второе условие обрывания $c_{N+1} = 0$ будет дальше сокращать число независимых параметров, связывая оставшиеся параметры U_0, Δ_1 и a . Если это условие связывает только параметры расстройки Δ_1 и a , тогда мы имеем безусловно интегрируемую модель, для которой расстройка частоты и частота Раби независимы. Если же условие обрывания связывает параметры расстройки и частоту Раби U_0 , то модель называется условно интегрируемой. Результат такой, что для $N = 2$ имеется безусловно интегрируемая модель (эта модель представлена в следующем разделе), а для $N = 3$ модель условно интегрируемая. Ожидается, что для высших порядков $N > 3$ модели также условно интегрируемы. Для того, чтобы представить явный пример такой модели, ниже

приведена конфигурация поля для случая $N = 3$:

$$U = U_0, \quad \delta_t = \Delta_1 + (9 - 3\sqrt{3}R - 9\Delta_1) / \left((\sqrt{3} - R)R + 3(\Delta_1 - 1)\Delta_1 + \sqrt{1 - \frac{6}{3 + \sqrt{3}R - 3\Delta_1}} (R^2 - 3(\Delta_1 - 1)^2) \cos(t) \right), \quad (25)$$

где

$$R = \pm \sqrt{U_0^2 + \Delta_1^2 - 1}. \quad (26)$$

5. Безусловно интегрируемая субмодель

Рассмотрим случай с $N = 2$, то есть когда общая функция Гойна, присутствующая в решении (9), представляется в виде суммы трех неполных бета-функций. В этом случае $\Delta_2 = 2$ и уравнение $c_{N+1} = 0$, переписанное для входных физических параметров U_0, Δ_1 и a (полагаем $\Delta = 1$), имеет вид

$$U_0^2 (a - 1)^2 (a(\Delta_1 - 1) - \Delta_1 - 1) = 0. \quad (27)$$

Так как $U_0 \neq 0$ и $a \neq 1$, это уравнение связывает параметры a и Δ_1 :

$$a = \frac{\Delta_1 + 1}{\Delta_1 - 1}. \quad (28)$$

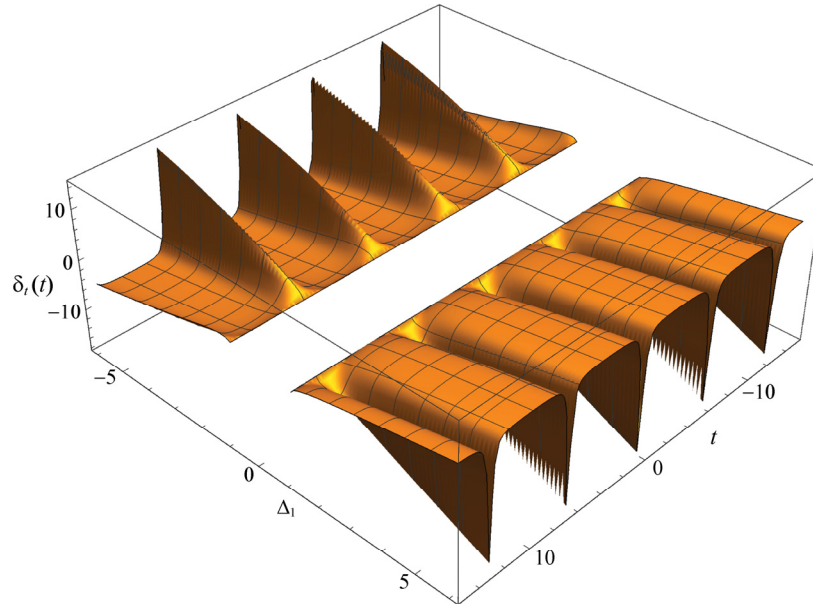


Рис.3. Точно интегрируемая амплитудно-постоянная модель с периодическими пересечениями (29): 3D график расстройки $\delta_t(t)$.

Тем самым генерируется безусловно интегрируемая двухпараметрическая модель

$$U(t) = U_0 = \text{const}, \quad \delta_t(t) = \Delta_1 - \frac{2}{\Delta_1 - \sqrt{\Delta_1^2 - 1} \cos(t)}. \quad (29)$$

Заметим, что, так как расстройка должна быть реальной функцией, модель применима при $|\Delta_1| > 1$.

Трехмерный график функции расстройки (29) в зависимости от параметра Δ_1 показан на рис.3. Графики этой функции для разных значений Δ_1 , изображённые на рис.4, показывают, что с увеличением Δ_1 экстремум расстройки приближается к Δ_1 , так что для больших Δ_1 функция расстройки эффективно становится периодической дельта-гребёнкой Дирака, построенной на линии $\delta_t(t) = \Delta_1$.

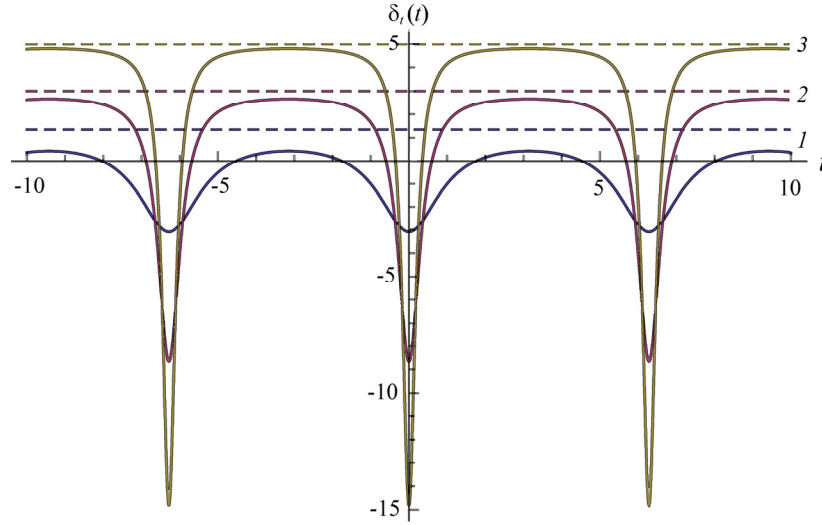


Рис.4. Точно интегрируемая амплитудно-постоянная модель с периодическими пересечениями (29): сплошные линии представляют модуляцию частоты, пунктирные линии показывают значения соответствующего параметра $\Delta_1 = 4/3, 3, 5$ для кривых 1, 2, 3, соответственно.

Общая функция Гойна в решении (9) представляет собой линейную комбинацию трех бета-функций с постоянными коэффициентами

$$H_G = B_z(R, -1) + \frac{2\Delta_1(1-R)}{(\Delta_1+1)R} B_z(R+1, -1) + \frac{(\Delta_1-1)(R-1)}{(\Delta_1+1)(R+1)} B_z(R+2, -1), \quad (30)$$

где введено обозначение $R = \sqrt{4U_0^2 + \Delta_1^2} > 0$. Используя рекуррентное соотношение между непосредственными соседями

$$B_z(c, b) = \frac{z^c}{c}(1-z)^b + \frac{(b+c)}{c} B_z(c+1, b), \quad (31)$$

сумма в уравнении (30) легко сводится к выражению, в котором содержится только одна бета-функция. Можно показать, что коэффициент, который стоит перед этой бета-функцией есть 0, и сумма окончательно упрощается, превращаясь в квазиполином

$$H_G = z^R \frac{(z-1)(1+R\Delta_1) - (z+1)(R+\Delta_1)}{R(R+1)(\Delta_1+1)(z-1)}. \quad (32)$$

Итак, решение двухуровневой задачи для $N=2$ окончательно записывается как

$$a_2 = C_0 z^{\frac{\Delta_1+R}{2}} \left((R-1)(\Delta_1-1) + \frac{2(R+\Delta_1)}{1-z} \right), \quad (33)$$

где C_0 – постоянная, которая определяется начальным состоянием системы, и

$$z(t) = \sqrt{\frac{\Delta_1+1}{\Delta_1-1}} e^{i(t-t_0)}. \quad (34)$$

Заметим, что заменой R на $-R$ получается второе независимое решение задачи.

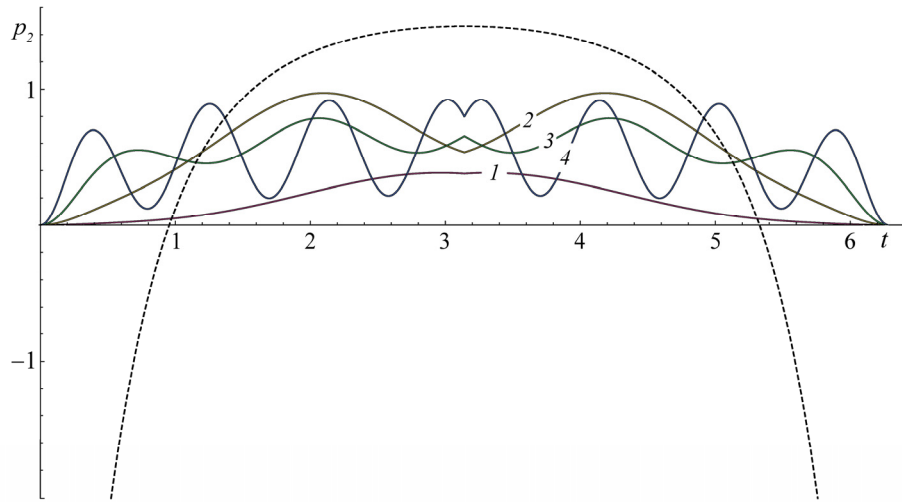


Рис.5. Динамика населённости возбуждённого уровня, заданная уравнением (33) для $U_0 = 0.3, 1, 2, 3.5$ (кривые 1, 2, 3, 4, соответственно). Пунктирная линия представляет расстройку поля ($\Delta_1 = 2, \Delta = 1, t_0 = 0$).

Уравнение (33) показывает, что показатель Флоке [27, 28] для полученного решения есть $i\lambda_2$, где $\lambda_2 = (\Delta_1 + R) / 2 > 0$, так как понятно, что $z^{(\Delta_1 + R)/2} = e^{i\lambda_2 t}$, в то время, как член в скобках есть периодическая функция с периодом $T = 2\pi / \Delta$, как и коэффициенты уравнения (2) для конфигурации поля (29). Заменяя R на $-R$, получаем показатель Флоке для второго независимого решения: $i\lambda_1$, $\lambda_1 = (\Delta_1 - R) / 2 < 0$. Отметим, что $\lambda_{1,2}$ являются квазиэнергиями системы для постоянной конфигурации внешнего поля $(U, \delta_t) = (U_0, \Delta_1)$. Завершив обсуждение полученного решения анализом динамики населённости второго уровня, описываемой уравнением (33). Эта динамика показана на рис.5. Заметим, что, так как $1 / (1 - z)$ есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем z

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (35)$$

и $R + \Delta_1 \neq 0$ для ненулевого взаимодействия, временная эволюция возбуждённого уровня всегда включает в себя все гармоники частоты возбуждающего внешнего поля.

6. Заключение

Представлена аналитическая модель квантовой полуклассической временной задачи, которая принадлежит к общему гойновскому классу. Это амплитудно-постоянная модель с периодическими пересечениями уровней, для которой общую функцию Гойна, вовлеченную в решение временных уравнений Шредингера, можно разложить в сходящийся ряд по неполным бета-функциям. Разложение возможно, так как один из характеристических показателей в регулярной сингулярной точке общего уравнения Гойна в бесконечности есть ноль. Коэффициенты разложения удовлетворяют трёхчленному рекуррентному соотношению между последовательными членами разложения, которое допускает обрывание ряда.

Применяя обрывание рядов, мы представили две амплитудно-постоянные модели конфигураций поля с периодическими пересечениями резонансов, для которых решение задачи записывается в замкнутой форме как конечная сумма неполных бета-функций. Одна из моделей есть безусловно интегрируемая модель, в то время как другая – условно интегрируемая. Для безусловно интегрируемой модели мы вывели точное решение в явном виде и обсудили поведение системы в возбуждающем поле соответствующей конфигурации. Примечательно, что решение для этой модели в конце концов упрощается до элементарной функции (квазиполинома). Эта функция в явном виде демонстрирует соответствующие показатели Флоке, то есть спектр квазиэнергий.

Работа выполнена в рамках армяно-французской международной ассоциированной лаборатории IRMAS (CNRS-France и SCS-Armenia). Исследование поддержано ГК МОН Армении (грант №15T-1C323) и Армянским национальным фондом науки и образования (грант ANSEF №PS-4558). Т. Ишханян благодарит SPIE за стипендию в области оптики и фотоники (SPIE International Scholarship in Optics and Photonics 2017), а также посольство Франции в Армении за докторский грант.

ЛИТЕРАТУРА

1. **H. Nakamura.** Nonadiabatic Transition: Concepts, Basic Theories and Applications. Singapore, World Scientific, 2012.
2. **B.W. Shore.** The Theory of Coherent Atomic Excitation. New York, Wiley, 1990.
3. **L.D. Landau.** Phys. Z. Sowjetunion, **2**, 46 (1932).
4. **C. Zener.** Proc. R. Soc. London A, **137**, 696 (1932).
5. **E. Majorana.** Nuovo Cimento **9**, 43 (1932).
6. **E.C.G. Stückelberg.** Helv. Phys. Acta. **5**, 369 (1932).
7. **Е.Е. Никитин.** Опт. и спектроскопия, **13**, 761 (1962).
8. **Ю. Демков, М. Кунике.** Вестник ЛГУ, физ.-хим., **16**, 39 (1969).
9. **F.T. Hioe, C.E. Carroll.** JOSA B, **3**, 497 (1985).
10. **N. Rosen, C. Zener.** Phys. Rev, **40**, 502 (1932).
11. **A. Bambini, P.R. Berman.** Phys. Rev. A, **23**, 2496 (1981).
12. **A.M. Ishkhanyan.** J. Phys. A, **30**, 1203 (1997).
13. **A.M. Ishkhanyan.** Opt. Commun., **176**, 155 (2000).
14. **A.M. Ishkhanyan.** J. Phys. A, **33**, 5539 (2000).
15. **A. Ronveaux.** Heun's Differential Equations. London, Oxford University Press, 1995.
16. **S.Yu. Slavyanov, W. Lay.** Special Functions. Oxford, Oxford University Press, 2000.
17. NIST Handbook of Mathematical Functions. F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (Eds.). New York, Cambridge University Press, 2010.
18. **A.M. Ishkhanyan, T.A. Shahverdyan, T.A. Ishkhanyan.** Eur. Phys. J. D, **68**, (2014).
19. **A.M. Ishkhanyan, A.E. Grigoryan.** J. Phys. A, **47**, 465205 (2014).
20. **Т.А. Шахвердян, Т.А. Ишханян, А.Е. Григорян, А.М. Ишханян.** Изв. НАН Армении, Физика, **50**, 283 (2015).
21. **A.M. Ishkhanyan, K.-A. Suominen.** J. Phys. A, **34**, 6301 (2001).
22. **N. Svartholm.** Math. Ann., **116**, 413 (1939).
23. **A. Erdélyi.** Q. J. Math. (Oxford), **15**, 62 (1944).
24. **A.M. Manukyan, T.A. Ishkhanyan, M.V. Hakobyan, A.M. Ishkhanyan.** IJDEA, **13**, 231 (2014).
25. **T.A. Ishkhanyan, T.A. Shahverdyan, A.M. Ishkhanyan.** arXiv:1403.7863, [math] (2017).
26. **A.M. Ishkhanyan.** Constr. Approx., in press, arXiv:1405.2871, [math-ph] (2017).
27. **G. Floquet.** Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, **12**, 47 (1883).
28. **F. Bloch.** Zeitschrift für Physik A, **52**, 555 (1929).

ՄԱԿԱՐԴԱԿՆԵՐԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՀԱՏՄԱՄԲ
ՀՈՅՆԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԱՄԻ ԵՐԿՄԱԿԱՐԴԱԿ ՄՈԴԵԼ

G. SAGET, Ա.Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ, C. LEROY, Տ.Ա. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Ներկայացված է քվանտային կիսադասական ժամանակային երկմակարդակ խնդրի դաշտի կոնֆիգուրացիաների Հոյնի ընդհանուր դասին պատկանող հաստատուն ամպլիտուդով մակարդակների պարբերական հատմամբ մոդել: Հավանականության ամպլիտուդի համար ճշգրիտ անալիտիկ լուծումը, որն այս դասի համար ընդհանուր դեպքում գրվում է Հոյնի ընդհանուր ֆունկցիաներով, տվյալ դեպքում թույլատրում է լուծման տարրալուծում թերի բետա ֆունկցիաների շարքերով: Այս շարքերի կտրումը բերում է պայմանականորեն ինտեգրելի համապարփակ լուծումների անսահման հիերարխիայի, այսինքն դաշտի կոնֆիգուրացիայի ամպլիտուդն ու փուլային մոդուլյացիայի ֆունկցիան իրարից անկախ չեն: Սակայն կա առնվազն մեկ անպայման ինտեգրելի բացառիկ մոդել, որին համապատասխանող օպտիկական դաշտի Ռաբիի հաճախությունն ու ապալարքը կառավարվում են անկախորեն: Սա հաստատուն ամպլիտուդով և մակարդակների պարբերական հատմամբ երկմակարդակ մոդել է, սահմանային դեպքում մակարդակների տարբերահաճախական հատմամբ Դիրակի դելտա-սանր ապալարքով: Դուրս է բերված այս մոդելի ճշգրիտ լուծումը, որոշված են Ֆլոկեի ցուցիչները և ուսումնասիրված է համակարգի դինամիկան պարամետրերի տարբեր արժեքների համար:

TWO-STATE MODEL WITH PERIODIC LEVEL-CROSSING
OF A GENERAL HEUN CLASS

G. SAGET, A.M. ISHKHANYAN, C. LEROY, T.A. ISHKHANYAN

We present a specific constant-amplitude periodic level-crossing model of the semi-classical quantum time-dependent two-state problem that belongs to a general Heun class of field configurations. The exact analytic solution for the probability amplitude, generally written for this class in terms of the general Heun functions, in this specific case admits series expansion in terms of the incomplete Beta functions. Terminating this series results in an infinite hierarchy of finite-sum closed-form conditionally integrable solutions each standing for a particular two-state model: for these field configurations the amplitude and phase modulation functions are not varied independently. However, there exists at least one special unconditionally integrable model, that is the Rabi frequency and the detuning of the driving optical field are controlled independently. This is a constant-amplitude periodic level-crossing model, for which the detuning in a limit becomes a Dirac delta-comb configuration with variable frequency of the level-crossings. We derive the exact solution for this model, determine the Floquet exponents and study the population dynamics in the system for various regions of the input parameters.