

УДК 535.14

КВАНТОВАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ И ЗАПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ПРОЦЕССЕ ВНУТРИРЕЗОНАТОРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ТРЕТЬЕЙ СУБГАРМОНИКИ

М.С. ГЕВОРКЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

e-mail: gmenua@gmail.com

(Поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.)

Исследована динамика корреляции флуктуаций числа фотонов взаимодействующих мод для процесса внутрирезонаторной генерации третьей субгармоники. Показано, что в этой системе можно получить запутанные состояния поля по переменным числа фотонов. Исследованы также квантовая динамика числа фотонов, динамика квантовой энтропии и функции Вигнера стационарного состояния фундаментальной моды и моды третьей субгармоники. Найдено, что динамика этих величин сильно зависит от значения коэффициента связи между взаимодействующими модами. Показано, что для больших значений коэффициента связи между модами мода третьей субгармоники в больших временах взаимодействия локализуется в трехкомпонентном состоянии с одинаковой вероятностью обнаружения моды в каждой компоненте состояния. Квантовая энтропия этого состояния меньше максимальной энтропии трехкомпонентного состояния $\ln 3$, что указывает на наличие квантово-механической интерференции между компонентами состояния моды третьей субгармоники.

1. Введение

Процесс внутрирезонаторной генерации субгармоник является простым и интересным явлением для исследования задач квантовой физики в оптических системах. С этой точки зрения хорошо исследован вырожденный параметрический осциллятор или процесс генерации второй субгармоники [1]. В настоящей работе показано, что в положительном Р-представлении [2] с помощью адиабатического исключения из ланжевеновских уравнений движения фундаментальной моды, в стационарной области взаимодействия этой системы можно получить как свет, находящийся в сжатом состоянии, так и в суперпозиционном состоянии четного типа двух когерентных компонент. Квантовое поведение этой системы методом Монте-Карло [3] было исследовано в работе [4], в которой с помощью исследования корреляции флуктуаций числа фотонов между взаимодействующими модами показано, что можно получить запутанные состояния

света по переменным числа фотонов. В этой же работе с помощью исследования динамики квантовой энтропии и функции Вигнера состояния мод поля показано, что в этой системе в области больших времен взаимодействия можно получить двухкомпонентное состояние поля моды второй субгармоники с одинаковой вероятностью обнаружения поля в каждой компоненте состояния. Квантовая энтропия этого состояния меньше максимальной энтропии двухкомпонентного состояния $\ln 2$, что указывает на наличие квантово-механической интерференции между когерентными компонентами состояния моды субгармоники. В этой работе исследована также динамика корреляции флуктуаций числа фотонов взаимодействующих мод. Показано, что корреляция сильно зависит от коэффициента нелинейной связи между модами. В случае малых коэффициентов связи корреляция флуктуаций числа фотонов мала. При росте коэффициента связи корреляция растет (состояние подсистем начинает запутываться) и от некоторого значения коэффициента связи при его дальнейшем росте она начинает уменьшаться и постепенно стремится к нулю (запутанность между состояниями подсистем уменьшается).

В настоящей работе методом Монте-Карло исследована квантовая динамика процесса внутриврезонаторной генерации третьей субгармоники. Исследована квантовая динамика числа фотонов, квантовой энтропии и функции Вигнера взаимодействующих мод поля.

2. Нелинейная система, основные уравнения и алгоритмы вычисления

Рассматривается модель генерации третьей субгармоники внутри двухмодового резонатора. Нелинейная среда помещена внутрь резонатора, который настроен на частоты фундаментальной моды ω_1 и моды третьей субгармоники ω_2 , где $\omega_1 = 3\omega_2$. Фундаментальная мода резонансно возмущается внешним классическим полем. Уравнение матрицы плотности этой системы можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (i\hbar)^{-1} [H_{\text{sys}}, \rho] + L(\rho), \quad (1)$$

где

$$H_{\text{sys}} = \frac{i\hbar\chi}{2} (a_1 a_2^{+3} - a_1^+ a_2^3) + i\hbar E (a_1^+ - a_1), \quad (2)$$

$$L(\rho) = \frac{\gamma_1}{2} (2a_1 \rho a_1^+ - \rho a_1^+ a_1 - a_1^+ a_1 \rho) + \frac{\gamma_2}{2} (2a_2 \rho a_2^+ - \rho a_2^+ a_2 - a_2^+ a_2 \rho). \quad (3)$$

Здесь a_i и a_i^+ ($i=1,2$) – операторы уничтожения и рождения фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники, соответственно, χ – коэффициент

связи между модами пропорциональный нелинейной восприимчивости среды $\chi^{(3)}$, E – классическая амплитуда возмущающего поля на частоте ω_1 , γ_i ($i=1, 2$) – коэффициенты затухания взаимодействующих мод через зеркала резонатора. В выражении (2) фаза возмущающего поля для простоты опущена.

Для исследования квантовых свойств оптической системы вычисляем функции Вигнера состояния мод поля. Эти функции вычисляем в полярных координатах $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ с помощью формулы [5]

$$W_i(r, \theta) = \sum_{m,n} \rho_{i,mn} w_{mn}(r, \theta), \quad (i=1, 2). \quad (4)$$

Здесь $\rho_{i,mn}$ – матричные элементы матриц плотности взаимодействующих мод в базисе Фока. Выражение для $w_{mn}(r, \theta)$ определяется с помощью следующей формулы:

$$w_{mn}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (-1)^n \left(\frac{n!}{m!} \right)^{1/2} \exp(i(m-n)\theta) \exp(-2r^2) (2r)^{m-n} L_n^{m-n}(4r^2), & m \geq n \\ \frac{2}{\pi} (-1)^m \left(\frac{m!}{n!} \right)^{1/2} \exp(i(m-n)\theta) \exp(-2r^2) (2r)^{n-m} L_m^{n-m}(4r^2), & m \leq n. \end{cases} \quad (5)$$

В последнем выражении L_p^q – полиномы Лагерра.

Исследуем квантовую динамику среднего значения числа фотонов мод поля и динамику квантовой энтропии $S_i(t) = -\text{Tr}(\rho_i(t) \ln \rho_i(t))$, где ($i=1, 2$) фундаментальной моды и моды субгармоники. Квантовую энтропию мод поля вычисляем с помощью численной диагонализации матриц плотности этих мод в базисе Фока.

Исследуем также динамику нормированной корреляционной функции флуктуаций числа фотонов фундаментальной моды и моды субгармоники

$$g(t) = \frac{\langle ((n_1(t) - \langle n_1(t) \rangle) + (n_2(t) - \langle n_2(t) \rangle))^2 \rangle}{(\langle n_1^2(t) \rangle - \langle n_1(t) \rangle^2) + (\langle n_2^2(t) \rangle - \langle n_2(t) \rangle^2)}. \quad (6)$$

Здесь $n_i = a_i^\dagger a_i$, ($i=1, 2$) – операторы числа фотонов фундаментальной моды и моды субгармоники, соответственно. Формулу (6) можно представить в следующем виде:

$$g(t) = 1 + \frac{2(\langle n_1(t) n_2(t) \rangle - \langle n_1(t) \rangle \langle n_2(t) \rangle)}{\langle n_1^2(t) \rangle - \langle n_1(t) \rangle^2 + \langle n_2^2(t) \rangle - \langle n_2(t) \rangle^2}. \quad (7)$$

При отсутствии корреляции между флуктуациями числа фотонов взаимодействующих мод значение корреляционной функции (5) стремится к единице.

Уравнение (1) для матрицы плотности оптической системы решаем численным методом «Монте-Карло, волновая функция» [3]. В этом методе матрица

плотности системы представляется как математическое ожидание матриц плотности квантовых траекторий, и каждая из этих матриц траекторий представляет чистое состояние, а его можно найти с помощью некоторого алгоритма вычисления

$$\rho(t) = M \left\{ \left| \varphi^{(\alpha)}(t) \right\rangle \left\langle \varphi^{(\alpha)}(t) \right| \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{(\alpha)}^N \left| \varphi^{(\alpha)}(t) \right\rangle \left\langle \varphi^{(\alpha)}(t) \right|. \quad (8)$$

Здесь (α) представляет номер траекторий, а N – число независимых квантовых траекторий.

Алгоритм этого метода для вычисления одной квантовой траектории процесса внутрирезонаторной генерации третьей гармоники приведен в работе [6]. Алгоритм вычисления одной квантовой траектории нашей задачи аналогичен алгоритму вычисления квантовой траектории для процесса внутрирезонаторной генерации третьей гармоники и вследствие этого здесь не приводится.

Динамику системы исследуем в случае одинакового значения коэффициентов затухания мод в резонаторе ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$) в безразмерном времени $\tau = \gamma t$ и в безразмерных параметрах системы $\varepsilon = E / \gamma$ и $k = \chi / \gamma$. Все вычисления выполнены для случая эволюции системы из начального вакуумного состояния фундаментальной моды и моды третьей субгармоники. Для получения среднего значения числа фотонов, квантовой энтропии мод и функции Вигнера использованы 1000 независимых квантовых траекторий оптической системы. Исследование динамики системы проводилось для значения амплитуды возмущения фундаментальной моды $\varepsilon = 1.5$ и для разных значений коэффициента связи между модами.

3. Динамика системы в случае слабой связи между модами

Рассмотрим здесь квантовую динамику системы в случае малого коэффициента связи между модами $k = 0.03$. В этом случае взаимодействия система находится в подпороговом режиме генерации моды третьей субгармоники. Среднее значение числа фотонов моды третьей субгармоники близко к нулевому значению, а среднее значение числа фотонов фундаментальной моды ≈ 8 .

На рис.1а и б представлены функции Вигнера стационарного состояния фундаментальной моды и моды третьей субгармоники, соответственно. Функции Вигнера представлены для времени взаимодействия $\tau = 20$. Фундаментальная мода при больших временах взаимодействия находится в однокомпонентном состоянии, функция Вигнера которого напоминает функцию Вигнера когерентного состояния. Квантовая энтропия этого состояния намного меньше единицы (энтропия состояния ≈ 0.0005). Можно сказать, что фундаментальная мода находится в чистом когерентном состоянии.

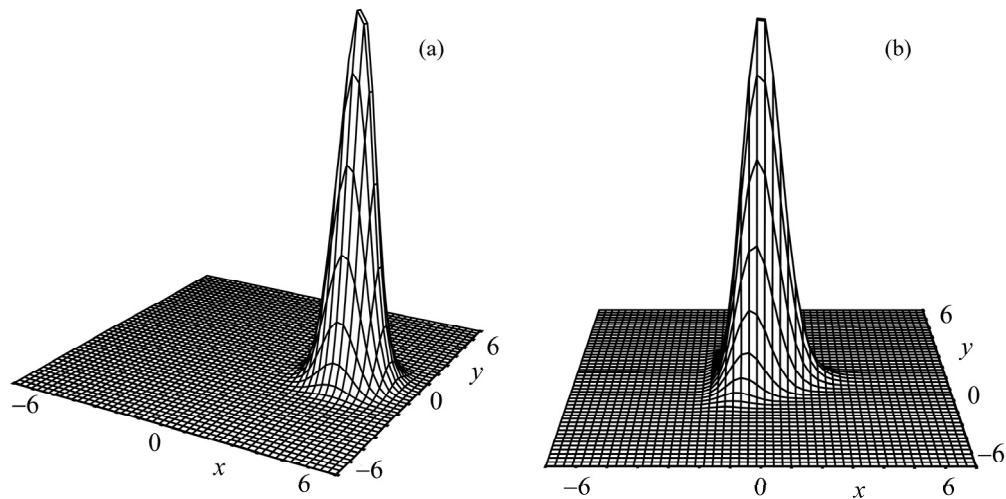


Рис.1. (а) Функция Вигнера стационарного состояния фундаментальной моды и (б) функция Вигнера стационарного состояния моды третьей субгармоники для значения коэффициента нелинейной связи между модами $k = 0.03$.

Функция Вигнера моды третьей субгармоники напоминает функцию Вигнера вакуумного состояния, которая симметрично сжата по трем сторонам равностороннего треугольника (число фотонов этого состояния близко к нулю). Квантовая энтропия этого состояния ≈ 0.1 и показывает, что состояние нечистое. Для сравнения на рис.2 приведена функция Вигнера стационарного состояния моды второй субгармоники в подпороговом режиме генерации этой моды из работы [4]. Эти функции Вигнера сильно отличаются по своей симметрии, хотя обе

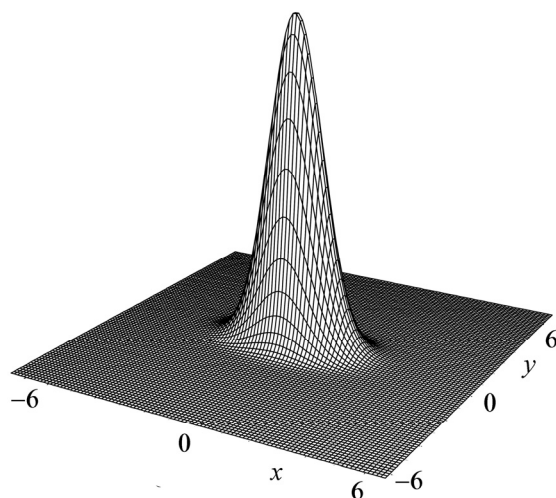


Рис.2. Функция Вигнера стационарного состояния моды второй субгармоники в подпороговом режиме генерации этой моды [4].

описывают вакуумное состояние мод в подпороговом режиме генерации соответствующих субгармоник.

На рис.3 представлена корреляционная функция флуктуаций числа фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники, которая вычислена с помощью формулы (7). В течение всего времени взаимодействия значение корреляционной функции флуктуаций взаимодействующих мод близко к единице, что указывает на отсутствие запутывания состояний фундаментальной моды и моды субгармоники по переменным числа фотонов в области взаимодействия с малым коэффициентом связи между модами $k = 0.03$.

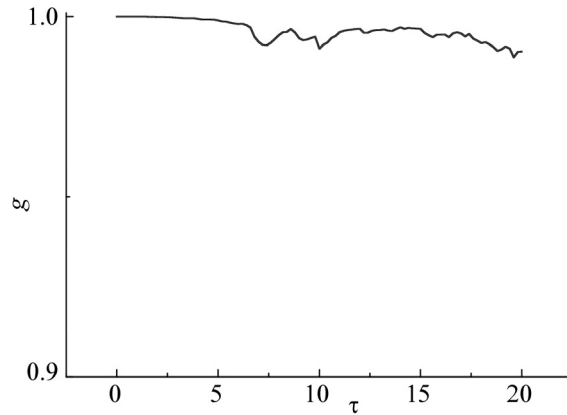


Рис.3. Динамика корреляционной функции флуктуаций числа фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники для значения коэффициента нелинейной связи между модами $k = 0.03$.

4. Динамика системы в случае сильной связи между модами

Исследуем здесь квантовую динамику системы для в десять раз большего коэффициента нелинейной связи между модами ($k = 0.3$), чем в предыдущей главе ($k = 0.03$), и для той же амплитуды возмущения $\varepsilon = 1.5$. Квантовое поведение системы в этом случае сильно отличается от квантового поведения системы, описываемой ранее, стационарные значения средних значений числа фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники приблизительно равны ($\langle n_1 \rangle \approx \langle n_2 \rangle \approx 2.5$), и система находится в надпороговом режиме генерации третьей субгармоники.

На рис.4а и б представлены функции Вигнера фундаментальной моды и моды субгармоники стационарного состояния системы, соответственно. Функции Вигнера вычислены для времени взаимодействия $\tau = 20$. Функция Вигнера фундаментальной моды стационарного состояния системы сильно отличается от

функции Вигнера стационарного состояния этой же моды для предыдущего случая. Если для случая $k = 0.03$ она напоминала функцию Вигнера когерентного состояния, то для этого случая она напоминает функцию Вигнера сжатого состояния. Квантовая энтропия этого состояния ≈ 1.2 , что указывает на нечистое состояние. Резко поменялся и вид функции Вигнера моды третьей субгармоники. Если для случая $k = 0.03$ она напоминала функцию Вигнера с трех сторон сжатого вакуумного состояния, то для случая $k = 0.3$ она напоминает функцию Вигнера состояния, являющегося статистической смесью трех компонент. Она имеет трехкомпонентную структуру, каждая компонента которой похожа на функцию Вигнера сжатого состояния. Поле моды третьей субгармоники с одинаковой вероятностью можно обнаружить в каждой сжатой компоненте состояния. Квантовая энтропия этого состояния больше максимальной квантовой энтропии статистической смеси трехкомпонентного состояния $\ln 3$ (квантовая энтропия состояния ≈ 1.5). Последнее означает, что состояние поля имеет гораздо более сложную структуру, что не видно из функции Вигнера.

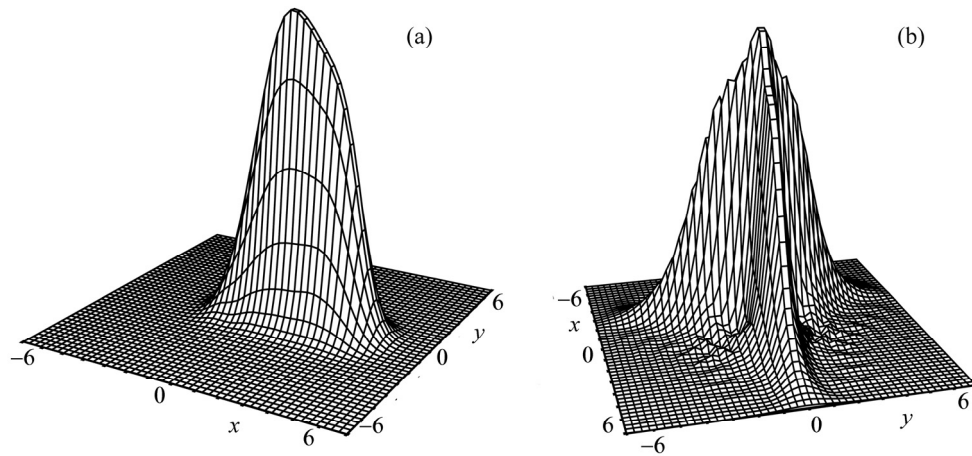


Рис.4. (а) Функция Вигнера стационарного состояния фундаментальной моды и (б) функция Вигнера стационарного состояния моды третьей субгармоники для значения коэффициента нелинейной связи между модами $k = 0.3$.

На рис.5 представлена динамика корреляционной функции флуктуаций числа фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники для случая $k = 0.3$. Она вычислена с помощью формулы (7). В отличие от предыдущего случая ($k = 0.03$), в котором корреляция между флуктуациями числа фотонов взаимодействующих мод отсутствовала, в этом случае в области больших времен взаимодействия корреляционная функция меньше единицы, что указывает на

возникновение корреляции между флуктуациями числа фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники. Это приводит к запутыванию состояния этих мод.

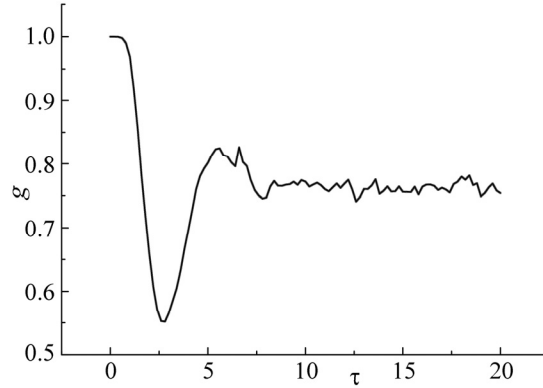


Рис.5. Динамика корреляционной функции флуктуаций числа фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники для значения коэффициента нелинейной связи между модами $k = 0.3$.

5. Динамика системы в случае очень сильной связи между модами

Исследуем здесь динамику системы в случае достаточно большого коэффициента нелинейной связи между взаимодействующими модами $k = 4$. Квантовая динамика системы в этом случае сильно отличается от квантовой динамики системы, описываемой в двух предыдущих главах для коэффициентов нелинейной связи между модами $k = 0.03$ и $k = 0.3$, соответственно. Среднее значение числа фотонов стационарного состояния обеих мод меньше единицы, число фотонов стационарного состояния фундаментальной моды $\langle n_1 \rangle \approx 0.02$ и можно сказать, что мода находится близко к вакуумному состоянию, а число фотонов стационарного состояния моды субгармоники $\langle n_2 \rangle \approx 0.5$.

На рис.6а и б представлены функции Вигнера стационарного состояния фундаментальной моды и моды третьей субгармоники, соответственно. Функция Вигнера фундаментальной моды похожа на функцию Вигнера вакуумного состояния. Квантовая энтропия этого состояния тоже близка к нулевому значению и ≈ 0.05 . Таким образом, можно сказать, что в этом случае в области больших времен взаимодействия фундаментальная мода находится в чистом вакуумном состоянии.

Функция Вигнера стационарного состояния моды третьей субгармоники

для этого случая имеет трехкомпонентную структуру. Мода находится в трехкомпонентном состоянии с одинаковой вероятностью обнаружения поля в каждой компоненте состояния. Квантовая энтропия этого состояния ≈ 0.7 , которая меньше максимального значения квантовой энтропии трехкомпонентного состояния $\ln 3$, что указывает на наличие квантово-механической интерференции между компонентами состояния поля моды третьей субгармоники в этой области взаимодействия. Впервые возможность получения трехкомпонентных суперпозиционных состояний света в оптических системах было дано в работе [7]. Механизм возникновения трехкомпонентных состояний света с квантовой интерференцией между компонентами состояния поля в области малых значений амплитуды состояния (среднее значение числа фотонов меньше единицы) в диссипативной среде описан в работе [8].

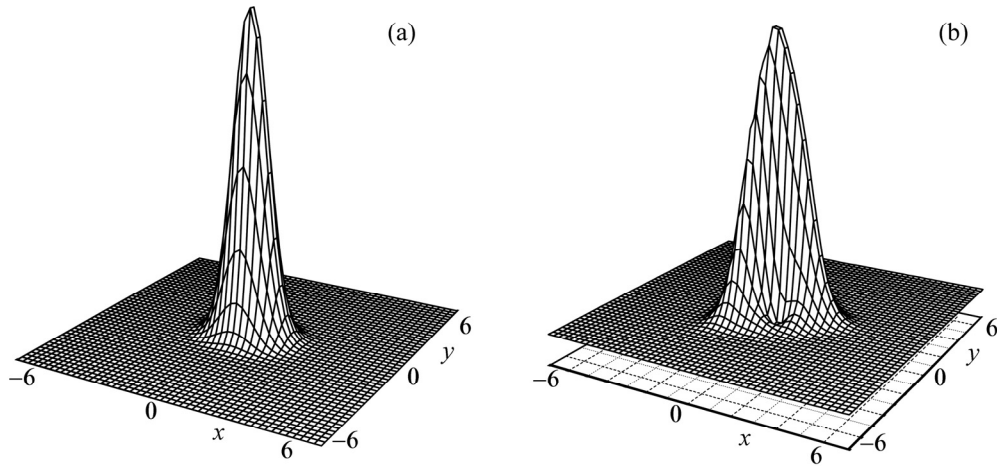


Рис.6. (а) Функция Вигнера стационарного состояния фундаментальной моды и (б) функция Вигнера стационарного состояния моды третьей субгармоники для значения коэффициента нелинейной связи между модами $k = 4$.

На рис.7 представлена динамика корреляционной функции флуктуаций числа фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники. Корреляционная функция в области больших времен взаимодействия близка к единице, что указывает на отсутствие корреляции между флуктуациями числа фотонов взаимодействующих мод. Перепутывание состояний фундаментальной моды и моды субгармоники в этом случае отсутствует, как в случае значения коэффициента нелинейной связи между модами $k = 0.03$ (см. рис.3 и 7).

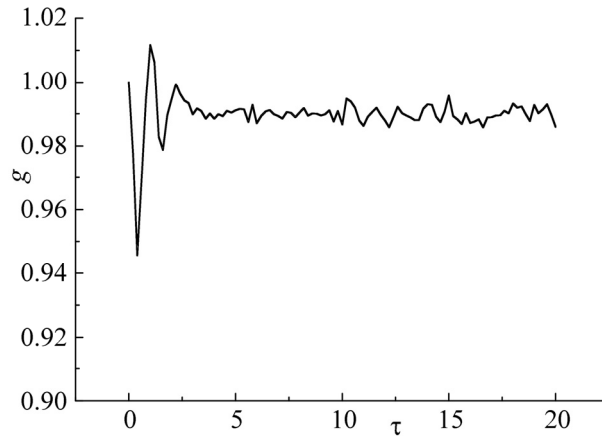


Рис.7. Динамика корреляционной функции флуктуаций числа фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники для значения коэффициента нелинейной связи между модами $k = 4$.

6. Заключение

Исследована квантовая динамика процесса внутрирезонаторной генерации третьей субгармоники методом Монте-Карло. Исследована квантовая динамика числа фотонов, квантовой энтропии и функции Вигнера взаимодействующих мод поля.

Показано, что динамика этих величин сильно зависит от коэффициента связи между модами. Показано, что в этой системе можно получить трехкомпонентное состояние поля моды третьей субгармоники с одинаковой вероятностью обнаружения поля в каждой компоненте состояния. Показано, что квантовая энтропия этого состояния меньше максимальной энтропии трехкомпонентного состояния $\ln 3$, что указывает на наличие квантово-механической интерференции между компонентами состояния моды третьей субгармоники. В работе исследована также динамика корреляции флуктуации числа фотонов фундаментальной моды и моды третьей субгармоники.

Автор выражает благодарность С.Т. Геворкяну за плодотворное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Wolinski, H.J. Carmichael. Phys. Rev. Lett., **60**, 1836 (1988).
2. C.W. Gardiner. Handbook of Stochastic Methods. Berlin, Springer, 1986.
3. K. Molmer, Y. Gastin, J. Dalibard. JOSA B, **10**, 1447 (1992).

4. **С.Т. Геворкян, М.С. Геворкян.** Оптика и спектроскопия, **116**, 121 (2014).
5. **L. Gilles, B.M. Garraway, P.L. Knight, S.J.D. Phoenix.** Phys. Rev. A, **49**, 2785 (1994).
6. **С.Т. Геворкян, М.С. Геворкян.** Оптика и спектроскопия, **112**, 502 (2012).
7. **S.T. Gevorgyan, V.O. Chaltykyan.** J. Modern Opt., **46**, 1447 (1999).
8. **S.T. Gevorgyan, Min Xiao, V.O. Chaltykyan.** J. Modern Opt., **55**, 1923 (2008).

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԿՈՇԵՐԵՆՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԽՃՃՎԱԾ ՎԻՃԱԿՆԵՐԸ
ՆԵՐՈՒԶՈՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ԵՐՐՈՐԴ ԵՆԹԱՀԱՐՄՈՆԻԿԻ
ԳԵՆԵՐԱՅԻԱՅԻ ԵՐԵՎՈՒՅԹՈՒՄ

Մ.Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Հետազոտված է փոխազդող մոդերի ֆոտոնների թվերի ֆլուկտուացիաների կոռելացիայի դինամիկան երրորդ ենթահարմոնիկի երևույթի համար: Ցույց է տրված, որ այս համակարգում կարելի է ստանալ ֆոտոնների թվերի փոփոխականներով խճճված դաշտի վիճակներ: Հետազոտված է նաև ֆոտոնների թվերի և քվանտային էնտրոպիայի քվանտային դինամիկան, ինչպես նաև ֆունկցիոնալ մոդի և երրորդ ենթահարմոնիկի մոդի ստացիոնար վիճակների Վիգների ֆունկցիաները: Ցույց է տրված, որ այդ մեծությունների դինամիկան խիստ կախված է փոխազդող մոդերի կապի գործակցից: Ցույց է տրված, որ կապի գործակցի մեծ արժեքների պարագայում երրորդ ենթահարմոնիկի մոդը մեծ ժամանակների փոխազդեցության տիրույթում լոկալացվում է եռակոմպոնենտ վիճակում յուրաքանչյուր կոմպոնենտում մոդի հայտնաբերելու միևնույն հավանականությամբ: Այդ վիճակի քվանտային էնտրոպիան փոքր է եռակոմպոնենտ վիճակի քվանտային էնտրոպիայի մեծագույն արժեք հանդիսացող $\ln 3$ -ից, որը ցույց է տալիս, որ երրորդ ենթահարմոնիկի վիճակի կոմպոնենտների միջև առկա է քվանտամեխանիկական ինտերֆերենցիա:

QUANTUM COHERENCE AND ENTANGLED STATES IN INTRACAVITY THIRD SUBHARMONIC GENERATION PROCESS

M.S. GEVORGYAN

The dynamics of correlation of photon number fluctuations of interacting modes for the process of intracavity third subharmonic generation is studied. It is shown that the entangled field states by the variables of photon number can be obtained in this system. The quantum dynamics of the photons number, of the quantum entropy and of the Wigner function of the stationary states of the fundamental mode and of the third subharmonic mode are also studied. It is found that the dynamics of these values are highly dependent on the value of the coupling coefficient of the interacting modes. In the region of large interaction times, for large values of the coupling coefficient of the modes, it is shown that the third subharmonic mode localizes in the three-component state with the same probability of detection of the mode in each component of the state. The quantum entropy of the state is less than the maximal entropy of the three-component state $\ln 3$, which shows presence of quantum mechanical interference between the components of the state of third subharmonic mode.