Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.313-322 (2016)

УДК 539.184

РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ БИКОНФЛЮЭНТНОГО УРАВНЕНИЯ ГОЙНА В РЯДЫ ПО НЕПОЛНЫМ БЕТА- И ГАММА-ФУНКЦИЯМ

Т.А. ИШХАНЯН[1,2*], Е. ПАШАЯН-ЛЕРУА[3], М.Р. ГЕВОРГЯН[1,3],
К. ЛЕРУА[3], А.М. ИШХАНЯН[1*]

[1]Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения
[2]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
[3]Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de, Universite de Bourgogne, Dijon, France

[*]e-mail: tishkhanyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 10 июля 2015 г.)

Рассматривая уравнения для некоторых функций, содержащих первую или вторую производную биконфлюэнтной функции Гойна, строятся два разложения решений биконфлюэнтного уравнения Гойна по неполным бета-функциям. В первом разложении в качестве функций разложения фигурирует одна бета-функция, в то время как во втором разложении – комбинация двух бета-функций. Коэффициенты разложения удовлетворяют четырехчленному и пятичленному рекуррентным соотношениям, соответственно. Показано, что предложенная методика в состоянии генерировать решения в виде разложений по другим специальным функциям. Приведены два примера таких разложений по неполным гамма-функциям.

1. Введение

Биконфлюэнтное уравнение Гойна [1–2] широко используется в различных разделах современной фундаментальной и прикладной науки: в квантовой механике, в общей теории относительности, в физике твердого тела, в атомной, молекулярной и оптической физике, в химии и т. д. (см., например, [3–9]). Одним из недавних примеров является потенциал обратного квадратного корня [10], член семейства биконфлюэнтных потенциалов Гойна [11], который описывает менее сингулярное по сравнению с потенциалом Кулона взаимодействие.

Несмотря на то, что свойства биконфлюэнтного уравнения Гойна изучались большим числом авторов [12–23], в теории этого уравнения многие вопросы остаются открытыми. К примеру, долгое время приложения ограничивались только полиномиальными решениями. Обобщение решений на неполиномиальные случаи представляет интересную и важную задачу [9]. Как было недавно показано нами, разложение решений по более сложным (по сравнению со степенными) математическим функциям может привести к легко оперируемым алгоритмам для вывода новых аналитических квадратично-интегрируемых неполиномиальных решений уравнения Шредингера [10]. В настоящей работе мы делаем шаг в этом направлении, конструируя два разложения решений биконфлюэнтного уравнения Гойна по неполным бета-функциям и два разложения по неполным гамма-функциям.

Подход, который мы применяем для построения этих разложений, следующий. Мы рассматриваем, согласно работам [24–31], разложение некоторой вспомогательной функции, содержащей производную биконфлюэнтной функции Гойна, по некоторым элементарным или специальным функциям. Характерная особенность этих уравнений заключается в том, что в общем случае они имеют, как минимум, еще одну дополнительную регулярную особенность по сравнению с биконфлюэнтным уравнением Гойна. Расположение этой дополнительной сингулярности определяется вспомогательным параметром биконфлюэнтного уравнения Гойна (т. е. параметром, который происходит от вспомогательного параметра исходного общего уравнения Гойна [32]), и в общем случае она может быть расположена в любой точке расширенной комплексной z-плоскости. Имея разложения упомянутой вспомогательной функции, путем дальнейшего интегрирования(ий) мы выводим разложение биконфлюэнтного уравнения Гойна по специальным функциям или их комбинациям.

Ниже мы рассмотрим два разных типа разложений по неполным бета-функциям, которые получаются, используя разложения по бета-функциям или по рядам Фробениуса для дополнительных функций, которые включают первую и вторую производные биконфлюэнтной функции Гойна, соответственно. Коэффициенты разложения подчиняются соответственно четырех- или пятичленному рекуррентным соотношениям. Наконец, мы представляем два разложения по неполным гамма-функциям. Построенные разложения применимы к произвольному набору параметров биконфлюэнтного уравнения Гойна при условии $\alpha \neq 0$ и $q \neq 0$.

Биконфлюэнтное уравнение Гойна имеет четыре независимых параметра [1–2, 12]. Согласно [1], канонический вид данного уравнения следующий:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1+\alpha-\beta z-2z^2}{z}\frac{du}{dz} + \frac{(\gamma-\alpha-2)z-\left(\delta+(1+\alpha)\beta\right)/2}{z}u = 0\,. \tag{1}$$

Как было упомянуто выше, сингулярными точками этого уравнения являются точки $z=0$ (регулярная сингулярность) и $z=\infty$ (иррегулярная сингулярность ранга 2). Другой вид уравнения с четырьмя независимыми параметрами приведен в работе [2]:

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{\gamma}{z}+\delta+z\right)\frac{du}{dz} + \frac{\alpha z-q}{z}u = 0\,. \tag{2}$$

Иные канонические формы также могут быть использованы, как это отмечено в [1]. В данной работе для общности мы рассматриваем следующий вид этого уравнения:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\delta+\varepsilon z\right)\frac{du}{dz}+\frac{\alpha z-q}{z}u=0\,. \qquad (3)$$

Нетрудно проверить, что как вышеуказанные две формы, так и другие формы, встречающиеся в литературе, получаются из этой формы прямой спецификацией параметров.

Важно сделать несколько замечаний об элементарных случаях биконфлюэнтного уравнения Гойна. Во-первых, заметим, что уравнение (3) при $\varepsilon=0$ и $\alpha=0$ сразу переходит в вырожденное гипергеометрическое уравнение Куммера. Более того, случай $\varepsilon=0$ всегда вырожден, независимо от значения α, так как в этом случае уравнение (3) приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению простым преобразованием зависимой переменной $u=e^{sz}v(z)$. Общее решение данного уравнения записывается в виде

$$u=e^{sz}\left[C_1\times{}_1F_1\left((q-\gamma s)/s_0;\gamma;s_0z\right)+C_2U\left((q-\gamma s)/s_0;\gamma;s_0z\right)\right], \qquad (4)$$

где ${}_1F_1$ и U – вырожденные гипергеометрические функции Куммера и Трикоми, соответственно, $C_{1,2}$ – константы и

$$s=-(\delta+s_0)/2\,,\quad s_0=\pm\sqrt{\delta^2-4\alpha}\,. \qquad (5)$$

Другим известным случаем, когда решение уравнения (3) записывается в вырожденных гипергеометрических функциях (с аргументом $-\varepsilon z^2/2$), является случай $\delta=q=0$ [1]. Также простым и вырожденным является случай $\alpha=0$ и $q=0$, когда общее решение биконфлюэнтного уравнения записывается в квадратурах

$$u=C_1+C_2\int e^{-\delta z-\varepsilon z^2/2}z^{-\gamma}dz\,,\quad C_{1,2}=\mathrm{const}\,. \qquad (6)$$

Учитывая вышеупомянутые замечания, далее мы предполагаем, что $\varepsilon\neq 0$, а α и q одновременно не равняются нулю.

2. Разложения в ряды по неполным бета-функциям

Продемонстрируем наш подход к построению решений в рядах по неполным бета-функциям, рассматривая следующее представление для первой производной решения уравнения (3):

$$\frac{du}{dz}=z^{-\gamma}v(z)\,. \qquad (7)$$

Если функцию $v(z)$ можно разложить в виде

$$v(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-s)^{\mu+n} \ , \tag{8}$$

то почленное интегрирование уравнения (7) дает следующее разложение по неполным бета-функциям ($|z|\le|z_0|$)

$$u=C_0+\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(-s\right)^n B\left(1-\gamma,\ 1+n+\mu;\frac{z}{s}\right). \tag{9}$$

Более развитый пример, включающий неполные бета-функции уже в уравнении (8), строится, используя возможное разложение функции $v(z)$ следующей формы:

$$v(z)=C_1+\sum_{n=0}^{+\infty} c_n B(a_n, b_n; z/s)\ . \tag{10}$$

Почленное интегрирование приводит к разложению по комбинациям неполных бета-функций

$$u(z)=C_0+C_1\frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{1-\gamma}\left(z^{1-\gamma}B(a_n,b_n;z/s)-s^{1-\gamma}B(a_n+1-\gamma,b_n;z/s)\right). \tag{11}$$

Заметим, что константы интегрирования C_0 и C_1 в вышеуказанных разложениях не произвольные; наоборот, они должны быть выбраны подходящим образом, чтобы обеспечить правильное решение.

С точки зрения данного подхода на этом шаге задача сводится к рассмотрению различных уравнений, которым подчиняются некоторые функции, содержащие производные биконфлюэнтной функции Гойна, и построению разложений этих функций на основе этих уравнений.

Чтобы быть более конкретным, рассмотрим, например, детали вывода разложения (9). Легко показать, что если разделить уравнение (3) на $(\alpha z-q)/z$ и продифференцировать, то дифференциальное уравнение для функции $v(z)=z^{\gamma}du/dz$ запишется в виде

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\left(\frac{1-\gamma}{z}+\delta+\varepsilon z-\frac{\alpha}{\alpha z-q}\right)\frac{dv}{dz}+\frac{\Pi(z)}{z(\alpha z-q)}v=0\ , \tag{12}$$

где $\Pi(z)$ – квадратичный полином по z

$$\Pi(z)=\alpha(\alpha+\varepsilon-\gamma\varepsilon)z^2-(\alpha(2q+\gamma\delta)+q\varepsilon(2-\gamma))z+q(q+(\gamma-1)\delta)\ . \tag{13}$$

Сравнивая (12) с уравнением (3), можно сразу увидеть, что это уравнение имеет дополнительную регулярную сингулярность в $z_0=q/\alpha$. Пусть теперь $\alpha\ne0$ и $q\ne0$, так чтобы дополнительная сингулярность находилась в конечной точке комплексной z-плоскости, отличной от начала координат, т. е. $z_0\ne0$. Тогда, взяв фробениусовское решение уравнения (12) в окрестности данной сингулярности

$$v = (z - z_0)^{\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(z_0)} (z - z_0)^n \ , \tag{14}$$

получим разложение (8). Далее, почленно интегрируя уравнение (7), получим разложение (9), которое в конечном итоге запишется в виде ($|z| \le |z_0|$)

$$u = C_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(z_0)} \left(-z_0\right)^n B\left(1-\gamma,\ 1+n+\mu;\ \frac{z}{z_0}\right). \tag{15}$$

Подставляя это разложение в уравнение (3) и переходя к пределу $z \to 0$, находим $C_0 = 0$, если $\mathrm{Re}(1-\gamma) > 0$. Последующие коэффициенты построенного разложения подчиняются четырехчленному рекуррентному соотношению

$$S_n a_n^{(z_0)} + R_{n-1} a_{n-1}^{(z_0)} + Q_{n-2} a_{n-2}^{(z_0)} + P_{n-3} a_{n-3}^{(z_0)} = 0\,, \tag{16}$$

где

$$S_n = z_0 (n+\mu)(n+\mu-2)\,, \tag{17}$$

$$R_n = z_0 (\delta + z_0 \varepsilon)(n+\mu-1) + (n+\mu)(n+\mu-1-\gamma)\,, \tag{18}$$

$$Q_n = -\gamma(\delta + z_0\varepsilon) + (\delta + 2 z_0 \varepsilon)(n+\mu)\,, \tag{19}$$

$$P_n = \alpha + \varepsilon(n+\mu+1-\gamma)\,. \tag{20}$$

Ряд обрывается слева при $n = 0$, если $S_0 = 0$, т. е. при $\mu = 0$ или $\mu = 2$. Эти характеристические показатели отличаются целым числом, и легко проверить, что только больший из показателей $\mu = 2$ приводит к состоятельному разложению; второе независимое решение требует логарифмического члена. Ряд обрывается справа, если три последующих коэффициента зануляются для какого-то $N = 1, 2, \ldots$: $a_N \ne 0$, $a_{N+1} = a_{N+2} = a_{N+3} = 0$. Условие $a_{N+3} = 0$ показывает, что обрывание возможно, если $P_N = 0$, т. е. при

$$\alpha = -\varepsilon(N+\mu+1-\gamma)\,, \quad \mu = 2\,. \tag{21}$$

Оставшиеся два уравнения, $a_{N+1} = 0$ and $a_{N+2} = 0$, накладывают два других ограничения на параметры биконфлюэнтного уравнения Гойна.

Рассмотрим теперь вывод разложения формы уравнения (11) по комбинациям неполных бета-функций. Легко проверить, что первая производная $du(z)/dz = v(z)$ биконфлюэнтной функции Гойна удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} v_{zz} + \left(\frac{1+\gamma}{z} + \delta + \varepsilon z - \frac{\alpha}{\alpha z - q}\right) v_z \\ + \frac{(\alpha+\varepsilon) z (\alpha z - 2q) + (q^2 - \delta q - \alpha\gamma)}{z(\alpha z - q)} v = 0, \end{gathered} \tag{22}$$

которое имеет дополнительную регулярную сингулярность в $z_0 = q/\alpha$. Теперь необходимо построить решение этого уравнения в виде разложения по бета-функциям. Как было показано ранее, такое разложение может быть построено переходом к уравнению для функции $w(z) = z^{1+\gamma} dv(z)/dz$. Для $(\alpha+\varepsilon)\alpha \neq 0$ это уравнение записывается в виде

$$w_{zz} + \left(-\frac{\gamma}{z} + \delta + \varepsilon z - \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right) w_z + \frac{P_3(z)}{z(z - z_1)(z - z_2)} w = 0\,, \qquad (23)$$

где $P_3(z)$ является кубическим полиномом и $z_{1,2}$ – корнями квадратного уравнения

$$(\alpha+\varepsilon) z (\alpha z - 2q) + (q^2 - \delta q - \alpha\gamma) = 0\,. \qquad (24)$$

Структура сингулярностей этого уравнения зависит от значений корней $z_{1,2}$:

$$z_{1,2} = z_0 \pm \sqrt{\frac{\gamma + \delta z_0 + \varepsilon z_0^2}{\alpha + \varepsilon}}\,. \qquad (25)$$

Сравнивая (23) с уравнением (3), видим, что в общем случае разных корней $z_1 \neq z_2$, при условии, что корни $z_{1,2}$ ненулевые, это уравнение имеет две дополнительные регулярные сингулярности, расположенные в $z = z_1$ и $z = z_2$. Если $z_1 = z_2$, получается только одна дополнительная сингулярность, расположенная в $z = z_0$, которую мы предполагаем ненулевой ($q \neq 0$). Кроме того, одна из дополнительных сингулярностей может совпадать с $z = 0$ биконфлюэнтного уравнения Гойна, тем не менее, заметим, что другая дополнительная сингулярность обязательно будет ненулевой. Поэтому, если $q \neq 0$, уравнение (23) имеет хотя бы одну дополнительную сингулярность, расположенную в конечной точке комплексной z-плоскости, отличающейся от начала координат.

Предположим, что z_1 является дополнительной сингулярностью, и рассмотрим фробениусовское решение уравнение (23) в окрестности этой точки

$$w = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(z_1)} (z - z_1)^{\mu+n}\,. \qquad (26)$$

Интегрируя, мы получаем следующее разложение:

$$\begin{aligned} v(z) &= C_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(z_1)} \int z^{-1-\gamma} (z - z_1)^{\mu+n}\, dz \\ &= C_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(z_1)} \frac{(-z_1)^{n+\mu}}{(z_1)^{\gamma}} B\left(-\gamma,\, 1 + n + \mu;\, \frac{z}{z_1} \right), \end{aligned} \qquad (27)$$

которое имеет форму уравнения (10). Проинтегрировав еще раз, получаем следующее окончательное разложение решения биконфлюэнтного уравнения Гойна в терминах комбинаций неполных бета-функций:

$$u(z) = C_0 + C_1 z + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(z_1)} \frac{(-z_1)^{n+\mu}}{(z_1)^{\gamma}}$$
$$\times\left(zB\left(-\gamma,\, 1+n+\mu;\, \frac{z}{z_1}\right) - z_1 B\left(1-\gamma,\, 1+n+\mu;\, \frac{z}{z_1}\right)\right), \tag{28}$$

Вспомним, что константы интегрирования $C_{0,1}$ не являются произвольными, а должны быть выбраны надлежащим образом, чтобы получить конечное решение.

Коэффициенты $a_n^{(z_1)}$ разложения (26) в общем случае подчиняются пятичленному рекуррентному соотношению

$$T_n a_n^{(z_1)} + S_{n-1} a_{n-1}^{(z_1)} + R_{n-2} a_{n-2}^{(z_1)} + Q_{n-3} a_{n-3}^{(z_1)} + P_{n-4} a_{n-4}^{(z_1)} = 0\,, \tag{29}$$

где

$$T_n = z_1 (z_1 - z_2)(n+\mu)(n-1+\mu)\,, \tag{30}$$

$$S_n = s_0 + s_1\mu_1 + s_2\mu_1^2\,,\ R_n = r_0 + r_1\mu_1 + \mu_1^2\,,\ Q_n = q_0 + q_1\mu_1\,,\ \mu_1 = n+\mu\,, \tag{31}$$

$$P_n = \alpha + \varepsilon(n+\mu+1-\gamma)\,, \tag{32}$$

причем параметры $s_{0,1,2}$, $r_{0,1}$, $q_{0,1}$ не зависят от n. Поскольку разложения (27) и (28) применимы, если $z_1 \neq 0$, это рекуррентное соотношение может включать четыре последовательных члена только при $z_1 = z_2$, т. е. если $\gamma + \delta z_0 + \varepsilon z_0^2 = 0$, или, что эквивалентно, $\alpha^2\gamma + q\alpha\delta z_0 + q^2\varepsilon = 0$, как это получается из уравнения (25). В этом случае имеем $z_{1,2} = z_0 = q/\alpha$, $T_n = 0$ и $S_n = z_0(n+\mu-1) \times (n+\mu-2)$, так что ряды могут обрываться слева при $\mu = 1$ или $\mu = 2$. Поскольку эти характеристические показатели отличаются на целое число, можно ожидать только одно состоятельное разложение в степенной ряд, соответствующее большему показателю степени $\mu = 2$; для второго решения может потребоваться логарифмический член.

Если $z_1 \neq z_2$, то ряд может обрываться слева при $\mu = 0$ или $\mu = 1$. И здесь в общем случае можно ожидать только одно состоятельное разложение в степенной ряд, соответствующее большему показателю $\mu = 1$.

Таким образом, в обоих случаях, $z_1 = z_2$ и $z_1 \neq z_2$, ряды могут обрываться справа при каком-то $N = 1, 2, \ldots$, если $P_N = 0$, т. е.

$$\alpha = -\varepsilon(N+\mu+1-\gamma)\,, \tag{33}$$

и, дополнительно, если $a_{N+1} = a_{N+2} = a_{N+3} = 0$ (в случае пятичленного соотношения) или $a_{N+1} = a_{N+2} = 0$ (в случае четырехчленного соотношения).

3. Разложения в ряды по неполным гамма-функциям

Итак, рассматривая уравнения для некоторых функций, содержащих первую или вторую производную биконфлюэнтной функции Гойна, мы построили два разложения решений биконфлюэнтного уравнения Гойна по неполным бета-функциям. В первом разложении в качестве функций разложения выступает одна бета-функция, во втором же вовлечена линейная по z комбинация бета-функций. Коэффициенты разложений удовлетворяют четырех- и пятичленным рекуррентным соотношениям, соответственно. Построенные ряды применимы для произвольного набора параметров биконфлюэнтного уравнения Гойна, за исключением случая $\alpha = 0$, $q = 0$.

Тот же самый подход можно применить для построения решений в виде рядов и по другим специальным функциям. Например, применив к дифференциальному уравнению для функции $v(z) = e^{\delta z} z^{\gamma} du/dz$:

$$v_{zz} + \left(\frac{1-\gamma}{z} - \delta + \varepsilon z - \frac{\alpha}{\alpha z - q} \right) v_z + \frac{P_3(z)}{z(\alpha z - q)} v = 0, \tag{34}$$

где P_3 является кубическим полиномом

$$P_3(z) = -\alpha\delta\varepsilon z^3 + (\alpha^2 + q\delta\varepsilon + \alpha\varepsilon(1-\gamma)) z^2 - q(2\alpha + (2-\gamma)\varepsilon) z + q^2, \tag{35}$$

и фробениусовское решение для $v(z)$ в окрестности сингулярной точки $z = 0$

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} z^{\mu+n}, \tag{36}$$

можно построить разложение по неполным гамма-функциям

$$u(z) = C_0 + \int e^{-\delta z} z^{-\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} z^{\mu+n} \right) dz = C_0 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n^{(0)}}{\delta^{n+\mu+1-\gamma}} \Gamma\left(n + \mu + 1 - \gamma; \delta z\right). \tag{37}$$

Другое разложение по неполным гамма-функциям легко построить, если рассматривать следующее дифференциальное уравнение для функции $v(z) = e^{\varepsilon z^2/2} z^{\gamma} du/dz$:

$$v_{zz} + \left(\frac{1-\gamma}{z} + \delta - \varepsilon z - \frac{\alpha}{\alpha z - q} \right) v_z + \frac{P_3(z)}{z(\alpha z - q)} v = 0, \tag{38}$$

где P_3 – кубический полином

$$P_3(z) = -\alpha\delta\varepsilon z^3 + (\alpha^2 + q\delta\varepsilon) z^2 - \alpha(2q + \gamma\delta) z + q^2 + q\delta(\gamma - 1). \tag{39}$$

Подставив ряд Фробениуса в решении $v(z)$ в окрестности сингулярной точки $z = 0$, приходим к разложению

$$\begin{aligned} u(z) &= C_0 + \int e^{-\varepsilon z^2/2} z^{-\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} z^{\mu+n} \right) dz \\ &= C_0 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n^{(0)}/2}{(\sqrt{\varepsilon/2})^{n+\mu+1-\gamma}} \Gamma\left(\frac{n+\mu+1-\gamma}{2}; \frac{\varepsilon z^2}{2} \right). \end{aligned} \tag{40}$$

В заключение приведем иной аргумент в поддержку полезности применения уравнений для производных функций Гойна. Из уравнения (22) видим, что если последнее слагаемое исчезает, то решение задачи записывается в квадратурах. Решение исходного биконфлюэнтного уравнения (3) в этом случае записывается как

$$u = C_1 e^{-\delta z - \varepsilon z^2/2} z^{-\gamma} + \frac{\gamma + \delta z + \varepsilon z^2}{\alpha z - q}\left(C_2 - C_1 \int e^{-\delta z - \varepsilon z^2/2} z^{-1-\gamma} (\alpha z - q) dz \right), \tag{41}$$

которое верно, если $\alpha + \varepsilon = 0$ и $q^2 - \delta q - \alpha\gamma = 0$. Несмотря на то, что данное решение можно предвидеть из уравнения (3), наш вывод ясный, интуитивно понятный и последовательный.

4. Заключение

Итак, мы продемонстрировали, что уравнения для различных функций, содержащих производные функций Гойна, могут быть использованы для построения разложений решений уравнений Гойна по различным специальным функциям. Мы показали это построением двух разложений биконфлюэнтных функций Гойна по неполным бета-функциям и двух разложений по неполным гамма-функциям. При специальных ограничениях, наложенных на параметры, построенные ряды могут оборваться, тем самым образовав замкнутые решения в виде сумм, содержащих конечное число членов. Помимо сказанного, использование уравнений для производных функций Гойна может быть полезным в построении явных решений, записываемых в квадратурах. Несмотря на то, что мы убедились в справедливости данных выводов только на примере частного случая биконфлюэнтного уравнения Гойна – это общие наблюдения, характерные как для других уравнений Гойна, так и для уравнений более общего типа.

Работа выполнена в рамках армяно-французской Международной ассоциированной лаборатории (CNRS-France и SCS-Armenia) IRMAS. Исследования поддержаны ГКН МОН Армении (грант № 15T-1C323). М. Геворгян благодарит Департамент сотрудничества и культурной деятельности (SCAC) посольства Франции в Армении за аспирантский грант.

ЛИТЕРАТУРА

1. Heun's Differential Equations, A. Ronveaux, Ed., Oxford University Press, London, 1995.
2. NIST Handbook of Mathematical Functions, F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark, Eds., Cambridge University Press, New York, 2010.
3. **B. Léauté, G. Marcilhacy.** J. Phys. A, **19**, 3527 (1986).
4. **R. Pons, G. Marcilhacy.** Class. Quantum Grav., **4**, 171 (1987).
5. **A.M. Ishkhanyan, K.-A. Suominen.** J. Phys. A, **34**, 6301 (2001).
6. **A. Ralko, T.T. Truong.** Phys. Lett. A, **323**, 395 (2004).
7. **F. Caruso, J. Martins, V. Oguri.** Annals of Physics, **347**, 130 (2014).

8. **Т.А. Шахвердян, Т.А. Ишханян, А.Е. Григорян, А.М. Ишханян.** Изв. НАН Армении, Физика, **50**, 283 (2015).
9. **J. Karwoswki, H.A. Witek.** Theor. Chem. Accounts, **133**, 1494 (2014).
10. **A.M. Ishkhanyan.** Eur. Phys. Lett., **112**, 10006 (2015).
11. **D. Batic, R. Williams, M. Nowakowski.** J. Phys. A, **46**, 245204 (2013).
12. **A. Decarreau, M. Dumont-Lepage, P. Maroni, A. Robert, A. Ronveaux.** Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **92**, 53 (1978).
13. **P. Maroni.** Ann. Inst. Henri Poincaré A, **30**, 315 (1979).
14. **D.P. Datta, S. Mukherjee.** J. Phys. A, **13**, 3161 (1980).
15. **F. Batola.** Arch. Ration. Mech. Ana., **78**, 275 (1982).
16. **R.N. Chaudhuri.** J. Phys. A, **16**, 209 (1983).
17. **E.R. Arriola, A. Zarzo, J.S. Dehesa.** J. Comput. Appl. Math., **37**, 161 (1991).
18. **A. Hautot.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **40**, 13 (1971).
19. **H. Exton.** Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **102**, 87 (1989).
20. **A.Ya. Kazakov, S.Yu. Slavyanov.** Methods and Applications of Analysis, **3**, 447 (1996).
21. **S.Yu. Slavyanov.** J. Phys. A, **29**, 7329 (1996).
22. **A. Roseau.** Bull. Belg. Math. Soc., **9**, 321 (2002).
23. **S. Belmehdi, J.-P. Chehab.** Abstract and Appl. Anal., **2004:4**, 295 (2004).
24. **A.M. Ishkhanyan, K.-A. Suominen.** J. Phys. A **36**, L81 (2003).
25. **V.A. Shahnazaryan, T.A. Ishkhanyan, T.A. Shahverdyan, A.M. Ishkhanyan.** Armenian Journal of Physics, **5**, 146 (2012).
26. **A.M. Ishkhanyan.** Phys. Lett. A, **380**, 640 (2016).
27. **T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan.** AIP Advances, **4**, 087132 (2014).
28. **C. Leroy, A.M. Ishkhanyan.** Integral Transforms and Special Functions, **26**, 451 (2015).
29. **A.S. Tarloyan, T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan.** Ann. Phys. (Berlin), **528**, 264 (2016).
30. A. Ishkhanyan, V. Krainov, arXiv:1508.06989 (2016).
31. **A. Ishkhanyan, B. Joulakian, K.-A. Suominen.** J. Phys. B, **42**, 221002 (2009).
32. **K. Heun.** Math. Ann., **33**, 161 (1889).

EXPANSIONS OF THE SOLUTIONS OF THE BICONFLUENT HEUN EQUATION IN TERMS OF INCOMPLETE BETA AND GAMMA FUNCTIONS

T.A. ISHKHANYAN, Y. PASHAYAN-LEROY, M.R. GEVORGYAN,
C. LEROY, A.M. ISHKHANYAN

Starting from equations obeyed by functions involving the first or the second derivatives of the biconfluent Heun function, we construct two expansions of the solutions of the biconfluent Heun equation in terms of incomplete Beta functions. The first series applies single Beta functions as expansion functions, while the second one involves a combination of two Beta functions. The coefficients of expansions obey four- and five-term recurrence relations, respectively. It is shown that the proposed technique is potent to produce series solutions in terms of other special functions. Two examples of such expansions in terms of the incomplete Gamma-functions are presented.