

УДК 621.315

## ДИАМАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ НАНОСЛОЕ

А.Ц. КАЛТАХЧЯН<sup>1</sup>, Э.М. КАЗАРЯН<sup>1,2</sup>, А.А. САРКИСЯН<sup>1,2,3,\*</sup>

<sup>1</sup>Российско–Армянский (Славянский) университет, Ереван, Армения

<sup>2</sup>Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: shayk@ysu.am

(Поступила в редакцию 17 февраля 2016 г.)

Рассмотрены диамагнитные свойства электронного газа в цилиндрическом нанослое. Получены зависимости средней энергии, средней намагниченности и средней магнитной восприимчивости от величины магнитного поля. Проведено сравнение этих зависимостей со случаем, когда электронный газ локализован в цилиндрической квантовой точке. Выявлен характер эффекта размерного квантования на магнитные свойства электронного газа в нанослое.

### 1. Введение

Многочастичные эффекты в квантовых точках (КТ) составляют предмет пристального внимания специалистов, так как могут найти свое приложение в полупроводниковой нанoeлектронике [1–4]. С другой стороны, будучи атомоподобными системами гигантских размеров, КТ являются очень удобной площадкой для экспериментального подтверждения фундаментальных принципов квантовой механики многочастичных систем. Яркими примерами сказанного являются обобщение теоремы Кона для случая параболических КТ, а также [5–8] построение аналога правила Хунда для заполнения атомных оболочек в сферических КТ [9]. Принципиально важную роль при теоретическом описании многочастичных явлений в КТ играет правильный выбор ограничивающего потенциала изучаемой структуры. Например, было показано, что важнейшим условием реализации теоремы Кона в КТ является параболическая форма потенциала ограничения [6–9].

В последние годы возрос интерес к исследованию термодинамических характеристик многоэлектронных систем в КТ. В частности, в работе [10] исследовались теплоемкость и энтропия КТ из GaAs с ограничивающим потенциалом Гаусса. Авторы наблюдали аномалию, похожую на аномалию Шоттки для теп-

лоемкости при низких температурах. В работе [11] изучалась общая намагниченность и восприимчивость электронного газа в КТ с гауссовым ограничивающим потенциалом. Было показано, что при низких температурах и слабых магнитных полях система находится в парамагнитной фазе, а при высоких температурах и сильных полях доминирует диамагнитная фаза. В работе [12] изучали термодинамические и магнитные свойства цилиндрической КТ с асимметричным ограничивающим потенциалом. В частности, было показано, что магнитные свойства системы выявляют парамагнитное поведение электронного газа в КТ. В указанных работах была продемонстрирована возможность управления термодинамическими и магнитными характеристиками электронного газа путем изменения геометрических параметров КТ. В связи с этим следует отметить, что в последние годы резко возросло внимание к КТ со слоистой геометрией: квантовым кольцам, сферическим и цилиндрическим системам ядро/оболочка/оболочка [13–18]. В подобных структурах манипуляцию уровней энергии электрона можно осуществлять за счет изменения внешнего и внутреннего радиусов. Поэтому возникает интерес к исследованию термодинамических и магнитных свойств электронного газа, локализованного в слоистых структурах ядро/оболочка/оболочка, в частности, цилиндрической КТ ядро/оболочка/оболочка.

В настоящей работе изучен диамагнетизм электронного газа в цилиндрическом нанослое из GaAs при наличии внешнего магнитного поля.

## 2. Теоретические расчеты

Рассмотрим поведение электронов в цилиндрическом нанослое с ограничивающим потенциалом

$$V_{\text{conf}}^{(1)}(\rho) = \begin{cases} 0, & R_1 < \rho < R_2 \\ \infty, & \rho \leq R_1, \rho \geq R_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$V_{\text{conf}}^{(2)}(z) = \frac{\mu\omega_z^2}{2} z^2, \quad (2)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – соответственно внутренний и внешний радиусы,  $\mu$  – эффективная масса электрона ( $\mu = 0.067m_e$ , где  $m_e$  – масса свободного электрона),  $\omega_z = \hbar/(\mu L^2)$  – частота ограничивающего потенциала и  $L$  – высота нанослоя.

Система находится в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ , с векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \left\{ A_\rho = A_z = 0, A_\phi = \frac{H\rho}{2} \right\}. \quad (3)$$

При наличии такого векторного потенциала в уравнении Шредингера можно разделить переменные:

$$\left\{ \hat{H}_{\rho,\phi} + \hat{H}_z \right\} \Psi(\rho, \phi, z) = E_{n_z, n_\rho, m} \Psi(\rho, \phi, z). \quad (4)$$

Здесь  $\hat{H}_{\rho,\phi}$  и  $\hat{H}_z$  – соответственно радиальный и аксиальный гамильтонианы, которые имеют следующий вид:

$$\hat{H}_{\rho,\phi} = -\frac{\hbar}{2\mu} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) - \frac{i\hbar\omega_H}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\mu\omega_H^2}{8} \rho^2 + V_{\text{conf}}^{(1)}(\rho), \quad (5)$$

$$\hat{H}_z = -\frac{\hbar}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_{\text{conf}}^{(2)}(z) = -\frac{\hbar}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\mu\omega_z^2}{2} z^2, \quad (6)$$

где  $\omega_H = eH/(\mu c)$  – циклотронная частота.

Волновую функцию будем искать в виде

$$\Psi(\rho, \phi, z) = \psi(\rho, \phi) f(z) \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\Psi|_{\rho=R_1} = \Psi|_{\rho=R_2} = 0. \quad (8)$$

Аксиальная часть волновой функции имеет стандартный осцилляторный вид

$$f(z) = \sqrt{\frac{1}{n_z! 2^{n_z} \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{z^2}{2a_z^2}} H_{n_z} \left( \frac{z}{a_z} \right), \quad (9)$$

где  $a_z = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_z}}$ , а  $n_z = 0, 1, 2, \dots$  – аксиальное квантовое число и  $H_{n_z}$  – полином Эрмита.

Соответствующая энергия запишется как

$$E_{n_z} = \hbar\omega_z \left( n_z + \frac{1}{2} \right). \quad (10)$$

В качестве радиальной волновой функции возьмем произведение

$$\Psi(\rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} R(\rho), \quad (11)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – угловое квантовое число. В работе [19] показано, что  $R(\rho)$  имеет вид

$$\begin{aligned} R(\rho) = & \rho^{|m|} e^{-\frac{\rho^2}{4a_H^2}} \left\{ C_1 {}_1F_1 \left( -\left( \kappa - \frac{|m|+1}{2} \right), |m|+1, \frac{\rho^2}{2a_H^2} \right) \right. \\ & \left. + C_2 U \left( -\left( \kappa - \frac{|m|+1}{2} \right), |m|+1, \frac{\rho^2}{2a_H^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\kappa = \frac{E - E_{n_z} - m}{\hbar\omega_H} - \frac{m}{2}$ ,  $a_H = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_H\mu}}$  – магнитная длина,  ${}_1F_1(a, b; z)$  и  $U(a, b; z)$  – вы-

рожденные гипергеометрические функции соответственно первого и второго рода,  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные нормировки.

Учитывая граничные условия (8) и решая полученное трансцендентное уравнение

$$\begin{vmatrix} {}_1F_1\left(-\left(\kappa - \frac{|m|+1}{2}\right), |m|+1, \frac{R_1^2}{2a_H^2}\right) & U\left(-\left(\kappa - \frac{|m|+1}{2}\right), |m|+1, \frac{R_1^2}{2a_H^2}\right) \\ {}_1F_1\left(-\left(\kappa - \frac{|m|+1}{2}\right), |m|+1, \frac{R_2^2}{2a_H^2}\right) & U\left(-\left(\kappa - \frac{|m|+1}{2}\right), |m|+1, \frac{R_2^2}{2a_H^2}\right) \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

для радиальной части энергии находим

$$E_{n_p, m} = \hbar\omega_H \left( \kappa + \frac{m}{2} \right). \quad (14)$$

В результате, полная энергия системы запишется как

$$E_{n_z, n_p, m} = E_{n_p, m} + \hbar\omega_z \left( n_z + \frac{1}{2} \right). \quad (15)$$

Предполагая, что электронный газ подчиняется статистике Больцмана, для статистической суммы получим

$$Z = \sum_{n_z, n_p, m} \exp(-\beta E_{n_z, n_p, m}), \quad (16)$$

где  $\beta = 1/k_B T$  – обратная температура.

Статистическая сумма исследуемой системы по дискретным уровням энергии выражается в виде тройной суммы

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n_p=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \exp\left(-\beta \left[ E_{n_p, m} + \hbar\omega_z \left( n_z + \frac{1}{2} \right) \right]\right) \\ &= \sum_{n_z=0}^{\infty} \exp\left(-\beta \hbar\omega_z \left( n_z + \frac{1}{2} \right)\right) \sum_{n_p=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\beta E_{n_p, m}) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{csch} \frac{\beta \hbar\omega_z}{2} \sum_{n_p=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\beta E_{n_p, m}). \end{aligned} \quad (17)$$

Вычисление двойной суммы по  $n_p$  и  $m$  производим численно. С помощью (17) можно вычислить термодинамические и магнитные параметры изучаемой системы. Для средней энергии имеем

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}. \quad (18)$$

Следовательно, для намагниченности и магнитной восприимчивости, соответственно, получим

$$\langle M \rangle = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial H}, \quad (19)$$

$$\langle \chi \rangle = \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H}. \quad (20)$$

### 3. Обсуждение результатов

Ниже приведены результаты численных расчетов для структуры из GaAs. Здесь проведено обезразмеривание энергии и радиуса соответственно по эффективной энергии Ридберга

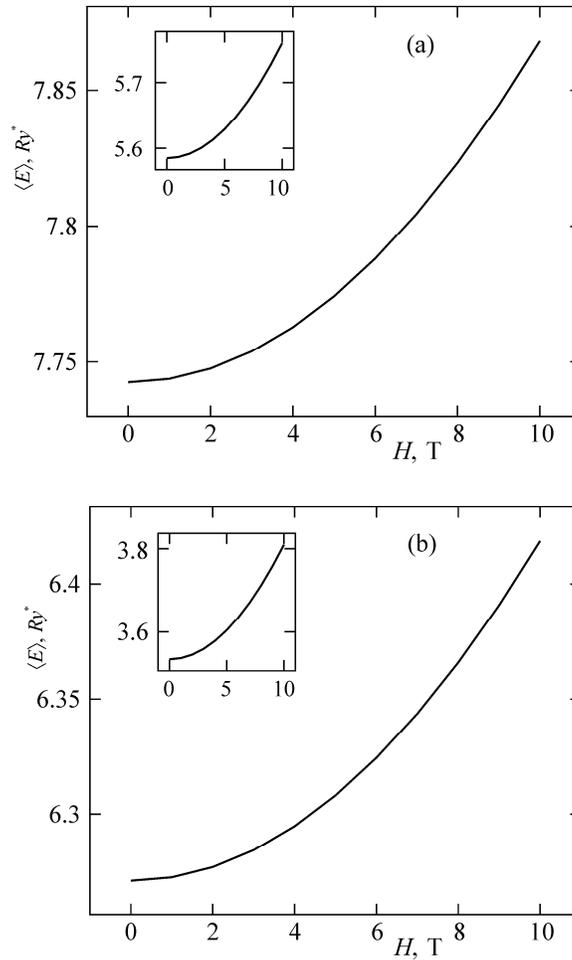


Рис.1. Зависимость средней энергии от величины магнитного поля, когда (а)  $R_1 = 0.5a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$ , (б)  $R_1 = 0a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$  при температурах  $300 \text{ K}$  и  $200 \text{ K}$  (вложенная диаграмма).

$$Ry^* = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \epsilon^2}$$

и по эффективному радиусу Бора

$$a_B^* = \frac{\hbar^2 \epsilon}{\mu e^2},$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость материала нанослоя (для GaAs  $\epsilon = 12.9$ ).

На рис. 1а представлены зависимости средней энергии системы от величины магнитного поля, когда внутренний радиус равен  $R_1 = 0.5a_B^*$ , а внешний  $R_2 = 2a_B^*$ . Видно, что с увеличением величины магнитного поля энергия увели-

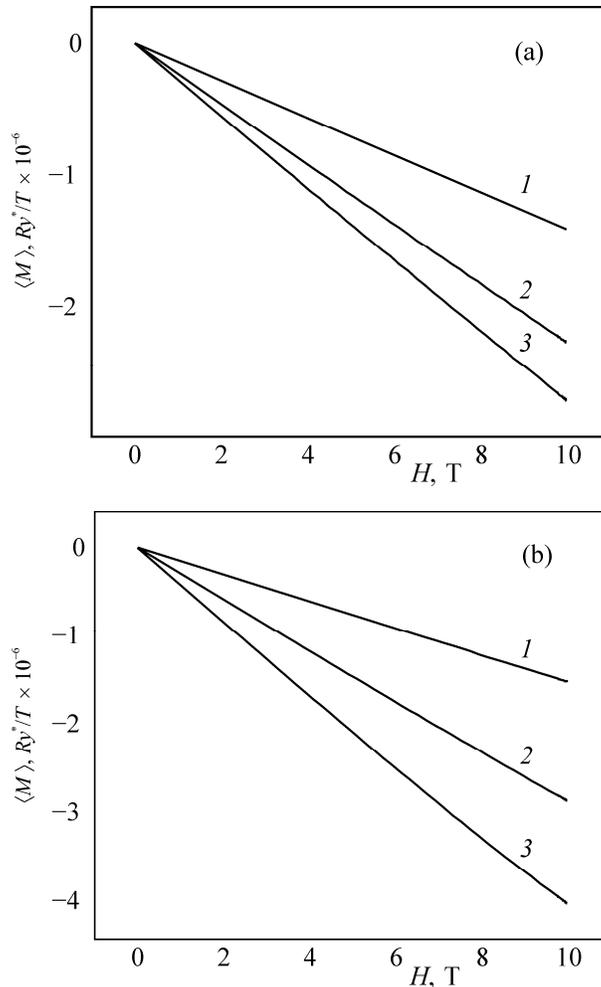


Рис.2. Зависимость средней намагниченности от величины магнитного поля, когда (а)  $R_1 = 0.5a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$ , (б)  $R_1 = 0a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$  при температурах (1) 300 К, (2) 200 К и (3) 100 К.

чивается. При этом возрастание энергии незначительное и отличается от линейного, что является следствием наличия границ цилиндрического нанослоя. Примечательно, что для более высокой температуры ( $T = 300$  К) прямая лежит выше, чем при более низком ( $T = 200$  К) значении температуры.

Для сравнения на рис.1б приведены аналогичные зависимости в случае цилиндрической КТ. Как следует из этого рисунка, качественное поведение зависимости  $E(H)$  не меняется, однако из-за уменьшения эффекта размерного квантования (отсутствие внутренней границы) средняя энергия системы более чувствительна к изменению значения магнитного поля.

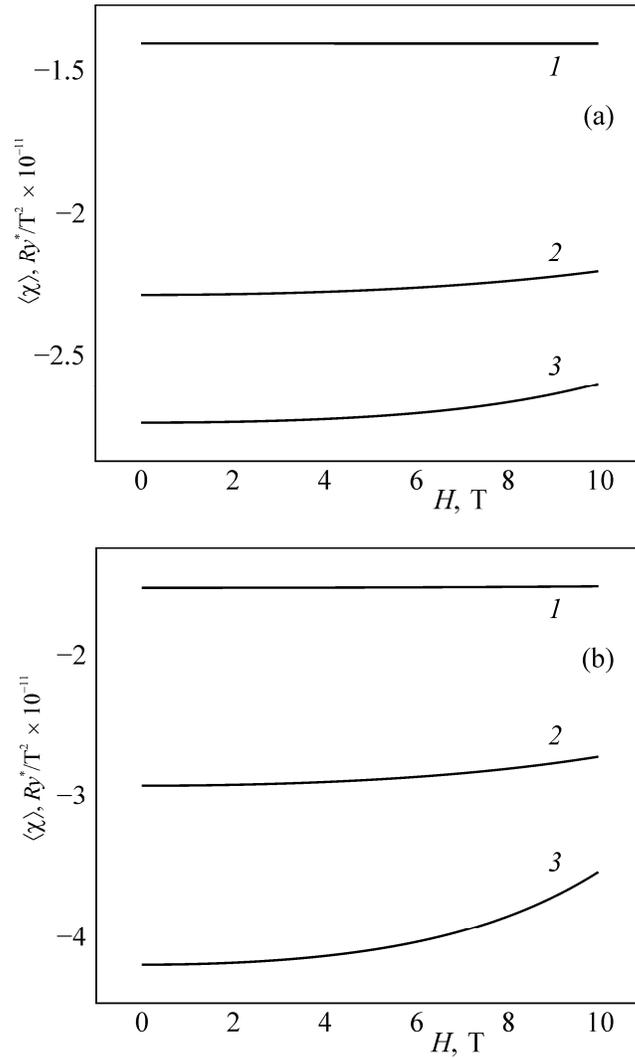


Рис.3. Зависимость средней восприимчивости от величины магнитного поля, когда (а)  $R_1 = 0.5a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$ , (б)  $R_1 = 0a_B^*$  и  $R_2 = 2a_B^*$  при температурах (1) 300 К, (2) 200 К и (3) 100 К.

На рис.2а приведены зависимости среднего значения намагниченности электронного газа от величины магнитного поля. Из рисунка следует, что система имеет ярко выраженные диамагнитные свойства и при этом зависимости  $M(H)$  близки к линейным. С ростом температуры средняя намагниченность по модулю убывает. В случае цилиндрической КТ (рис.2b), данные зависимости более чувствительны к изменению величины магнитного поля, так как снова дает знать о себе ослабление эффекта размерного квантования.

Наконец, на рис.3а,b представлены зависимости магнитных восприимчивостей от величины магнитного поля  $H$ . Так как  $\chi$  определяется как производная  $M$  по  $H$ , то ввиду почти линейной зависимости  $M(H)$ , значения  $\chi$  слабо зависят от величины поля. При более низких температурах ( $T = 100$  К и  $T = 200$  К) наблюдается небольшой рост магнитной восприимчивости от значения магнитного поля, что свидетельствует об отклонении зависимостей  $M(H)$  от линейных при таких температурах. С ростом температуры  $\chi(H)$  практически становится константой. Как следует из рис.3b, в случае цилиндрической КТ зависимость  $\chi(H)$  по сравнению с нанослоем проявляется ярче.

#### 4. Заключение

Таким образом, получены зависимости средней энергии, намагниченности и магнитной восприимчивости от величины магнитного поля при разных температурах для электронного газа, заключенного как в цилиндрическом нанослое, так и в цилиндрической КТ. Показано, что благодаря наличию границ цилиндрического нанослоя средняя энергия почти не изменяется в зависимости от величины магнитного поля, поскольку влияние эффекта размерного квантования сильнее, чем влияние магнитного поля. В случае цилиндрической КТ чувствительность увеличивается, но качественно не изменяется. Зависимость средней намагниченности от значения магнитного поля свидетельствует о ярко выраженных диамагнитных свойствах системы. В случае цилиндрической КТ средняя намагниченность более чувствительна к изменению величины магнитного поля. При низких температурах наблюдается небольшой рост средней магнитной восприимчивости от значения магнитного поля, а при более высоких температурах она практически не изменяется.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F. Tokumasu, R.M. Fairhurst, G.R. Oстера, N.J. Brittain, J. Hwang, T.E. Wellems, J.A. Dvorak. *J. Cell. Sci.*, **118**, 1091 (2005).
2. K. Marchuk, Y. Guo, W. Sun, J. Vela, N. Fang. *J. Am. Chem. Soc.*, **134**, 6108 (2012).
3. W.R. Algar, U.J. Krull. *Anal. Bioanal. Chem.*, **391**, 1609 (2008).
4. L.A. Lane, A.M. Smith, T. Lian, S. Nie. *J. Phys. Chem. B*, **118**, 14140 (2014).
5. P.A. Maksym, T. Chakraborty. *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 108 (1990).
6. А.О. Говоров, А.В. Чаплик. Письма в ЖЭТФ, **52**, 681 (1990).

7. **F.M. Peeters.** Phys. Rev. B, **42**, 1486 (1990).
8. **W. Kohn.** Phys. Rev., **123**, 1242 (1961).
9. **R.J. Boyd.** Nature (London), **310**, 480 (1984).
10. **B. Boyacioglu, A. Chatterjee.** J. Appl. Phys., **112**, 083514 (2012).
11. **B. Boyacioglu, A. Chatterjee.** Phys. E, **44**, 1826 (2012).
12. **S. Gumber, M. Kumar, M. Gambhir, M. Moban, P. Kumar Jha.** Canadian J. Phys., **3**, 1264, (2015).
13. **L. Francaviglia, Y. Fontana, S. Conesa-Boj, G. Tütüncüoglu, L. Duchêne, M. Tanasescu, F. Matteini, M. Fontcuberta, A. Morral.** Appl. Phys. Lett., **107**, 033106 (2015).
14. **D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, L.S. Petrosyan, H.A. Sarkisyan.** Physica E, **66**, 7, (2015).
15. **P.Ch.L. Jasmine, A.J. Peter, Ch.W. Lee.** Chem. Phys, **452**, 40 (2015).
16. **P. Ganesan, L. Senthilkumar.** Physica E, **74**, 204, (2015).
17. **S.N. Saravanamoorthy, A.J. Peter, Ch.W.Lee.** Physica B, **466–467**, 101 (2015).
18. **A.A. Karmanov, I.A. Pronin, N.D. Yakushova, S.E. Igoshina1, I.A. Averin.** J. Physics: Conf. Series, **586**, 012006 (2015).
19. **N.G. Aghekyan, S.M. Amirkhanyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan.** Superlattices Microstruct., **69**, 87 (2014).

ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ԳԱԶԻ ԴԻԱՄԱԳՆԻՍՏԱԿԱՆ ԸՆԿԱԼՈՒՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՆԱՆՈՇԵՐՏՈՒՄ

Հ.Ց. ՂԱԼԹԱՂԶՅԱՆ, Է.Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հ.Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Դիտարկված են էլեկտրոնային գազի դիամագնիսական հատկությունները գլանային նանոշերտում: Ստացված են միջին էներգիայի, միջին մագնիսականության և միջին մագնիսական ընկալունակության կախվածությունները մագնիսական դաշտի արժեքից: Կատարված է այդ կախվածությունների համեմատություն քվանտային կետում լոկալիզացված էլեկտրոնային գազի դեպքի հետ: Հայտնաբերված է նանոշերտում էլեկտրոնային գազի մագնիսական հատկությունների վրա չափային քվանտացման երևույթի բնույթը:

DIAMAGNETIC SUSCEPTIBILITY OF THE ELECTRON GAS  
IN THE CYLINDRICAL NANOLAYER

H.Ts. GHALTAGHCHYAN, E.M. KAZARYAN, H.A. SARKISYAN

Diamagnetic properties of the electron gas in the cylindrical nanolayer were considered. The dependencies of mean energy, mean magnetization and mean magnetic susceptibility on magnetic field value were obtained. A comparison of these curves with the case, when the electron gas localized in the cylindrical quantum dot was made. The character of the size quantization effect on magnetic properties of electron gas in the nanolayer was identified.