Известия НАН Армении, Физика, т.50, №3, с.304-311 (2015)

УДК 535.14

ДИНАМИКА КВАНТОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАГНУСА

Г.А. АБОВЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

e-mail: gor.abovyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 27 апреля 2015 г.)

Рассмотрена динамика двухуровневой квантовой системы в электромагнитном поле возмущения в представлении Магнуса на сфере Блоха. Такой подход приводит к общим выражениям для вероятностей квантовых переходов вне рамок резонансного приближения. Получены приложения для случаев взаимодействия атома с монохроматическим полем возмущения, а также с гауссовыми импульсами.

1. Введение

Двухуровневая квантовая система, взаимодействующая с импульсами электромагнитного поля, является одной из простейших моделей во многих областях физики и квантовой химии. Квантовые информационные технологии с кубитами на основе ионов в ловушке, атомов в резонаторе, квантовых ям и сверхпроводящих систем обычно реализуются на основе двухуровневых систем под действием оптических или микроволновых импульсов. Однако, до настоящего времени не найдено общее аналитическое решение динамики этой системы, в частности, при вычислении вероятностей квантовых переходов между состояниями кубита без различных приближений. Известным из них является резонансное приближение (приближение вращающейся волны), в котором пренебрегаются эффекты осциллирующих членов [1–3]. В последнее время рассматриваются режимы сильной связи двухуровневой квантовой системы с полем излучения, в которых эффекты вне резонансного приближения становятся важными [4,5]. Исследования эффектов вне рамок приближения вращающейся волны приведены в ряде работ [6–12]. Резонансное взаимодействие атома с бихроматическим полем рассмотрено в работах [13–19] и в случае амплитудной модуляции в работе [20]. Резонансные эффекты взаимодействия атома с лазерным полем в полном объёме исследованы в нелинейной оптике [21,22] и в атомной оптике [23]. В дополнение к многочисленным работам в этой области в настоящей работе для исследования двухуровневой системы в поле импульсов приводится подход, который позволяет сделать обобщение вне рамок резонансного приближения. Хорошо известно, что исследование возмущенной двухуровневой системы упрощается при использовании переменных Блоха для вектора состояния [24,25]. В предложенном здесь подходе используется матрица временной эволюции квантовой системы в формулировке Магнуса [26], которая записывается в переменных Блоха. В рамках такого подхода удается получить общие аналитические выражения для вероятностей переходов между состояниями атома вне резонансного приближения.

2. Матрица эволюции в представлении Магнуса

Мы рассмотрим стандартную модель двухуровневого атома, взаимодействующего с полем возмущения. Гамильтониан системы записывается в следующем виде:

$$\hat{H}(t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\hat{\sigma}_z + Vg(t)\hat{\sigma}_x, \tag{1}$$

где ε_0 – частота атомного перехода, V описывает связь двухуровневого атома с полем, а $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_z$ являются матрицами Паули. В этом случае состояние системы определяется как

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = C_1(t)\left|1\right\rangle + C_2(t)\left|2\right\rangle, \tag{2}$$

где амплитуды $C_1(t)$ и $C_2(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} i\dot{C}_1(t) &= \frac{\varepsilon_0}{2}C_1(t) + Vg(t)C_2(t), \\ i\dot{C}_2(t) &= -\frac{\varepsilon_0}{2}C_2(t) + Vg(t)C_1(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \tilde{C}_1(t)e^{-i\varepsilon_0 t/2}, \\ C_2(t) &= \tilde{C}_2(t)e^{i\varepsilon_0 t/2}, \end{aligned} \tag{4}$$

можно записать эти уравнения в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_1(t+dt) \\ \tilde{C}_2(t+dt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -iVg(t)e^{i\varepsilon_0 t}dt \\ -iVg(t)e^{-i\varepsilon_0 t}dt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_1(t) \\ \tilde{C}_2(t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

и далее представить временную эволюцию системы с помощью оператора эволюции в переменных Блоха

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_1(t+dt) \\ \tilde{C}_2(t+dt) \end{pmatrix} = \hat{U}(t, t+dt) \begin{pmatrix} \tilde{C}_1(t) \\ \tilde{C}_2(t) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь оператор эволюции записывается как оператор вращения на сфере Блоха

$$\hat{U}(t,t+dt)=\hat{I}-i\frac{d\theta(t)}{2}(\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}}),\tag{7}$$

а уравнения (6) в новых обозначениях записываются в виде

$$\begin{pmatrix}\tilde{C}_1(t+dt)\\ \tilde{C}_2(t+dt)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-in_z\dfrac{d\theta}{2} & (-in_x-n_y)\dfrac{d\theta}{2}\\ (-in_x+n_y)\dfrac{d\theta}{2} & 1+in_z\dfrac{d\theta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{C}_1(t)\\ \tilde{C}_2(t)\end{pmatrix},\tag{8}$$

где $d\theta=2Vg(t)dt$ и компоненты вектора n_x, n_y и n_z равны:

$$n_x=\cos(\varepsilon_0 t),\quad n_y=-\sin(\varepsilon_0 t),\quad n_z=0.\tag{9}$$

Таким образом, состояние системы можно представить как

$$|\Psi(t+dt)\rangle=\hat{U}(t,t+dt)|\Psi(t)\rangle,\tag{10}$$

и следуя стандартному подходу теории возмущений, временная эволюция квантового состояния по формуле разложения Дайсона представится как

$$|\Psi(t)\rangle=\hat{U}(t,0)|\Psi(0)\rangle=T\exp\left(-\frac{i}{2}\int_0^t(\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}})d\theta\right)|\Psi(0)\rangle,\tag{11}$$

где T показывает хронологическое упорядочение операторов. В настоящей работе используется другое, альтернативное разложение оператора эволюции в форме Магнуса, в котором отсутствует операция хронологического упорядочения

$$\hat{U}(t,0)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\Omega}_k(t)\right).\tag{12}$$

Здесь первые три члена разложения Магнуса имеют вид

$$\hat{\Omega}_1(t)=-iV\int_0^t\hat{h}(t_1)dt_1,$$

$$\hat{\Omega}_2(t)=-\frac{V^2}{2}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\left[\hat{h}(t_1),\hat{h}(t_2)\right],\tag{13}$$

$$\hat{\Omega}_3(t)=\frac{iV^3}{6}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\int_0^{t_2}dt_3\left(\left[\hat{h}(t_1),\left[\hat{h}(t_2),\hat{h}(t_3)\right]\right]+\left[\hat{h}(t_3),\left[\hat{h}(t_2),\hat{h}(t_1)\right]\right]\right),$$

и для случая гамильтониана (1) выражаются через матрицы Паули следующим образом:

$$\hat{h}(t)=g(t)\left[\cos(\varepsilon_0 t)\hat{\sigma}_x-\sin(\varepsilon_0 t)\hat{\sigma}_y\right].\tag{14}$$

Вычисления приводят к выражениям

$$\hat{\Omega}_1(t) = -iV\left(F_c(t)\hat{\sigma}_x - F_s(t)\hat{\sigma}_y\right),$$
$$\hat{\Omega}_2(t) = iV^2\left(F_c(t)F_s(t) - 2\int_0^t F_c(t')dF_s(t')\right)\hat{\sigma}_z \tag{15}$$

где

$$F_c(t) = \int_0^t g(t')\cos(\varepsilon_0 t')dt',$$
$$F_s(t) = \int_0^t g(t')\sin(\varepsilon_0 t')dt'. \tag{16}$$

Легко заметить, что каждый член разложения Магнуса выражается через матрицы Паули. В рамках такого подхода оператор эволюции представляется в простой форме для всех членов разложения Магнуса (12)

$$\hat{U}(t,0) = \exp\left(i\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\sigma}\right) = \mathbf{I}\cos\left(A(t)\right) + i\left(\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\sin\left(A(t)\right), \tag{17}$$

в которой $A(t) = \left|\mathbf{A}(t)\right|$ и

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{A}(t) / A(t). \tag{18}$$

В матричной форме для оператора эволюции получаем

$$\hat{U}(0,t) = \begin{pmatrix} \cos\left(A(t)\right) + i\rho_z \sin\left(A(t)\right) & \left(i\rho_x + \rho_y\right)\sin\left(A(t)\right) \\ \left(i\rho_x - \rho_y\right)\sin\left(A(t)\right) & \cos\left(A(t)\right) - i\rho_z \sin\left(A(t)\right) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Это приводит к следующим выражениям для амплитуд вектора состояния:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= e^{-\frac{i\varepsilon_0 t}{2}}\left[\cos\left(A(t)\right) + i\rho_z \sin\left(A(t)\right)\right]C_1(0) \\ &+ e^{-\frac{i\varepsilon_0 t}{2}}\left(i\rho_x + \rho_y\right)\sin\left(A(t)\right)C_2(0), \\ C_2(t) &= e^{\frac{i\varepsilon_0 t}{2}}\left(i\rho_x - \rho_y\right)\sin\left(A(t)\right)C_1(0) \\ &- e^{\frac{i\varepsilon_0 t}{2}}\left[\cos\left(A(t)\right) - i\rho_z \sin\left(A(t)\right)\right]C_2(0). \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, проблема сводится к вычислению функции $A(t)$ в каждом порядке разложения Магнуса. Вычисления разложения вплоть до второго порядка приводят к следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_x(t) &= -VF_c(t), \\ A_y(t) &= -VF_s(t), \\ A_z(t) &= -V^2\left(F_c(t)F_s(t) - 2\int_0^t F_c(t')dF_s(t')\right). \end{aligned} \tag{21}$$

3. Вероятности переходов и осцилляции Раби

Рассмотрим вероятность возбуждения двухуровневого атома, если при включении взаимодействия система находится в основном состоянии $C_2(0)=0$. Из системы уравнений (20) получаем

$$P_2(t)=\left|C_2(t)\right|^2=\left(1-\rho_z{}^2\right)\sin^2\left(A(t)\right). \tag{22}$$

Если начальное состояние является суперпозиционным состоянием $C_1(0)\neq 0$ и $C_2(0)\neq 0$, для вероятности возбуждения получаем

$$\begin{aligned} P_2(t)=\left|C_2(t)\right|^2&=\left[\rho_y\sin\left(A(t)\right)C_1(0)+\cos\left(A(t)\right)C_2(0)\right]^2 \\ &+\left[\rho_x C_1(0)+\rho_z C_2(0)\right]^2\sin^2\left(A(t)\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Эти результаты имеют общий характер и описывают вероятности перехода системы из начального состояния при произвольном взаимодействии с внешним полем.

Рассмотрим важный случай взаимодействия системы с внешним полем в форме импульса $g(t)=f(t)\sin(\omega t)$ с амплитудой $f(t)$ и несущей частотой ω. При наличии резонанса $\omega=\varepsilon_0$ выражения (21) существенно упрощаются. Легко показать, что в этом случае $A_x(t)=0$, $A_y(t)=\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'$ и $A_z(t)=0$. Таким образом, корреляторы операторов в выражениях (13) равны нулю и только низшие члены первого порядка разложения Магнуса отличны от нуля. Величина $\rho_z=0$, поэтому для вероятности (22) получаем хорошо известный результат

$$P_2(t)=\left|C_2(t)\right|^2=\sin^2\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right). \tag{24}$$

Что касается вероятности (24), то в резонансном приближении она приобретает следующий вид

$$P_2(t)=\left\{\sin\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right)C_1(0)+\cos\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right)C_2(0)\right\}^2. \tag{25}$$

Формулы (23) и (24) удобны также для вычислений вне рамок резонансного приближения. В частности, на их основе можно сформулировать итерационную процедуру для вычисления поправок к резонансному приближению по малому параметру – отношению матричного элемента перехода между состояниями атома к частоте поля возмущения. Ниже приведены результаты для двух случаев взаимодействия двухуровневого атома с монохроматическим полем и с гауссовыми импульсами.

Вначале рассмотрим случай нерезонансного взаимодействия атома с монохроматическим полем $g(t)=\sin(\omega t)$ с частотой ω, отличной от частоты атомного перехода ε_0. Вероятность перехода $P_2(t)$ для атома в основном состоянии вычисляется по формуле (22) с величинами $A(t)$ (21) во втором порядке разложения Магнуса. Зависимость вероятности перехода от времени в безразмерных единицах представлена на рис.1 для двух значений частоты. Легко заметить, что вероятность нахождения системы в возбужденном состоянии при взаимодействии с полем с частотой $\omega = 1.2\varepsilon_0$ достигает значения 0.5, в несколько раз превышающего максимум населенности этого состояния при взаимодействии с полем с частотой $\omega = 1.5\varepsilon_0$.

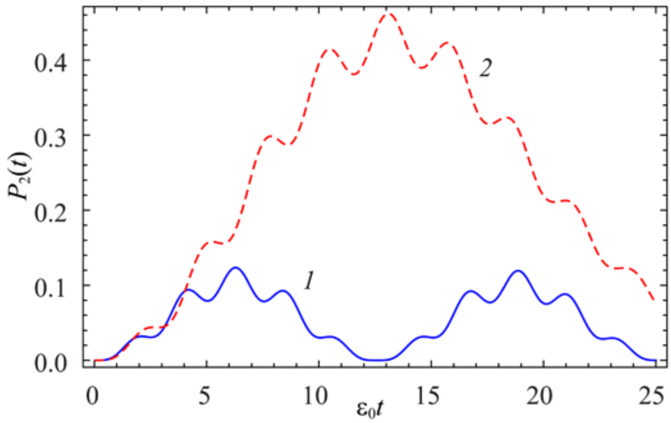

Рис.1. Зависимость вероятности $P_2(t)$ нахождения атома в состоянии $|2\rangle$ от времени при взаимодействии с внешним монохроматическим полем: кривая *1* – $V = 0.375$, $\omega = 1.5$ в единицах ε_0, кривая *2* – $V = 0.375$, $\omega = 1.2$.

Рассмотрим теперь случай нерезонансного взаимодействия атома с импульсом, огибающая амплитуды которого является функцией Гаусса

$$g(t) = \exp\left(\frac{(t - t_0)^2}{T^2}\right)\sin(\omega t). \tag{26}$$

Вычисления аналогичны предыдущему случаю с формулами (20)–(23). Результаты вычислений приведены на рис.2. Сравнивается воздействие гауссовых импульсов с частотами $\omega = 1.2\varepsilon_0$ и $\omega = 1.5\varepsilon_0$, но с одинаковыми амплитудами, и импульса с частотой $\omega = 1.2\varepsilon_0$, но с большой амплитудой $V = 0.5$.

Зависимость вероятности $P_2(t)$ нахождения атома в состояние $|2\rangle$ от времени, приведенная на рис.2, для трех различных режимов иллюстрирует вполне предсказуемый результат. Гауссовый импульс с близкой к резонансу частотой, взаимодействуя с кубитом, приводит к инверсии насиленности. А более высокая амплитуда импульса улучшает этот результат.

Автор выражает благодарность Г.Ю. Крючкяну за обсуждения. Работа выполнена в рамках проекта ГКН МОН РА (No.13-1C031).

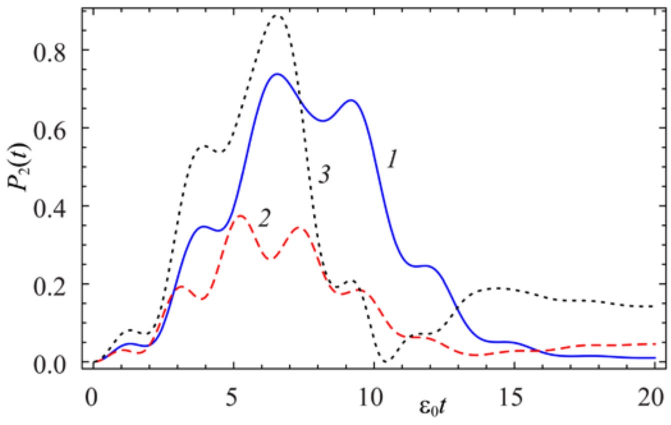

Рис.2. Зависимость вероятности $P_2(t)$ нахождения атома в состояние $|2\rangle$ от времени при взаимодействии с внешним гауссовым импульсом с шириной $T = 8$ и центром $t_0 = 4$ в единицах $1/\varepsilon_0$: кривая *1* – $V = 0.375$, $\omega = 1.2$ в единицах ε_0, кривая *2* – $V = 0.375$, $\omega = 1.5$, кривая *3* – $V = 0.5$, $\omega = 1.2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **L. Allen, J.H. Eberly.** Optical Resonance and Two Level Atoms. New York, Dover, 1975.
2. **B.W. Shore.** The Theory of Coherent Atomic Excitation. New York, Wiley, 1990.
3. **P. Meystre, M. Sargent.** Elements of Quantum Optics. Berlin, Springer, Verlag, 2007.
4. **J. Bourassa, J.M. Gambetta, A.A. Abdumalikov Jr., O. Astafiev, Y. Nakamura, A. Blais.** Phys. Rev. A, **80**, 032109 (2009).
5. **T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. Menzel, F. Hocke, M.J. Schwarz, J.J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hummer, E. Solano, A. Marx, R. Gross.** Nature Phys., **6**, 772 (2010).
6. **M.S. Shahriar, P. Pradhan, J. Morzinski.** Phys. Rev. A, **69**, 032308 (2004).
7. **E.K. Irish, J. Gea-Banacloche, I. Martin, K.C. Schwab.** Phys. Rev. B, **72**, 195410 (2005).
8. **S. Ashhab, F. Nori.** Phys. Rev. A, **81**, 042311 (2010).
9. **J. Hausinger, M. Grifoni.** Phys. Rev. A, **82**, 062320 (2010).
10. **J. Hausinger, M. Grifoni.** Phys. Rev. A, **83**, 030301 (2011).
11. **F. Beaudoin, J.M. Gambetta, A. Blais.** Phys. Rev. A, **84**, 043832 (2011).
12. **M. Bina, G. Romero, J. Casanova, J.J. Garcia-Ripoll, A. Lulli, E. Solano.** Eur. Phys. J. Special Topics, **203**, 207 (2012).
13. **G.Yu. Kryuchkov.** Opt. Commun., **54**, 19 (1985).
14. **H. Freedhoff, Z. Chen.** Phys. Rev. A, **41**, 6013 (1990); **46**, 7328 (1992).
15. **Г.Ю. Крючкян.** ЖЭТФ, **109**, 116 (1996).
16. **G.Yu. Kryuchkyan, M. Jakob, A.S. Sargsian.** Phys. Rev. A, **57**, 2091 (1998).
17. **M. Jakob, G.Yu. Kryuchkyan.** Phys. Rev. A, **58**, 767 (1998).
18. **M. Jakob, G.Yu. Kryuchkyan.** Phys. Rev. A, **57**, 1355 (1998).
19. **M. Jakob, G.Yu. Kryuchkyan.** Phys. Rev. A, **61**, 053823 (2000).
20. **G.A. Abovyan, G.Yu. Kryuchkyan.** Phys. Rev. A, **88**, 033811 (2013).

21. **R. Boyd.** Nonlinear Optics. Academic Press, 2008.
22. **Y.-R. Shen.** The Principles of Nonlinear Optics. Wiley-Interscience, 2002.
23. **G.A. Abovyan, G.P. Djotyan, G.Yu. Kryuchkyan.** Phys. Rev. A, **85**, 013846 (2012).
24. **T.J. Green, J. Sastrawan, H. Uys, M.J. Biercuk.** New J. Phys., **15**, 095004 (2013).
25. **G. Benenti, S. Siccardi, G. Strini, G. Benenti, S. Siccardi, G. Strini.** Phys. Rev. A, **88**, 033814 (2013).
26. **S. Blanes, F. Casas, J.A. Oteo, J. Ros.** The Magnus Expansion and Some of Its Applications. Berlin, Springer Verlag, 2008.

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱՆ ՄԱԳՆՈՒՍԻ ՊԱՏԿԵՐԱՑՄԱՄԲ

Գ.Ա. ԱԲՈՎՅԱՆ

Աշխատանքում քննարկված է էլեկտրամագնիսական դաշտում երկմակարդականի քվանտային համակարգի դինամիկան Բլոխի սֆերայի վրա Մագնուսի ներկայացմամբ: Այս մոտեցումը հնարավորություն է տալիս ստանալ ընդհանուր բանաձևեր քվանտային անցումների համար ռեզոնանսային մոտավորությունից դուրս: Ներկայացված են արդյունքներ քյուբիթի ինչպես մոնոխրոմատիկ դաշտի, այնպես էլ Գաուսյան իմպուլսի հետ փոխազդեցության համար:

THE DYNAMICS OF QUANTUM TRANSITIONS IN MAGNUS REPRESENTATION

G.A. ABOVYAN

The dynamics of a two-level quantum system in the electromagnetic excitation field is investigated in Magnus representation on Bloch sphere. This approach leads to general expressions for probability of quantum transitions beyond the resonance approximation. Applications of the results for interaction of the qubit with a monochromatic field as well as with a Gaussian pulse are presented.