

УДК 539.184

## **АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАНТОВОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ В ДВАЖДЫ, БИ- И ТРИКОНФЛЮЭНТНЫХ ФУНКЦИЯХ ГОЙНА**

Т.А. ШАХВЕРДЯН<sup>1,2</sup>, Т.А. ИШХАНИЯН<sup>1,2\*</sup>,  
А.Е. ГРИГОРЯН<sup>1</sup>, А.М. ИШХАНИЯН<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

\*e-mail: tishkhanyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 29 апреля 2015 г.)

Получены пять классов моделей квантовой временной двухуровневой задачи, которые решаются в дважды конфлюэнтных функциях Гойна, пять других классов – в биконфлюэнтных функциях Гойна и один класс – в триконфлюэнтных функциях Гойна. Найденные классы расширяют все известные семейства двух- и трёхпараметрических моделей, решаемых в конфлюэнтных гипергеометрических функциях, до более общих четырёхпараметрических классов, включающих трёхпараметрические функции модуляции расстройки поля. Введенные специальные модели описывают разные нелинейные (параболические, кубические,  $\sinh$ ,  $\cosh$ , и т.д.) процессы с касанием или прохождением уровней, двукратным или трёхкратным пересечением уровней, а также периодически повторяющиеся процессы касания или пересечения резонанса. Показано, что существуют дополнительные классы, которые могут быть получены при использовании уравнений, решениями которых являются функции, включающие производные конфлюэнтных функций Гойна. Представлено по одному примеру такого класса для каждого из трёх рассматриваемых конфлюэнтных уравнений Гойна.

### **1. Введение**

Квантомеханические модели с малым числом состояний широко используются при изучении ряда явлений во многих областях квантовой физики [1–6]. Они являются хорошим начальным приближением в случаях, когда при взаимодействии с внешним полем лишь некоторые из энергетических уровней реальной квантовой системы участвуют в переходах, в то время как другие остаются пассивными. В рамках представлений малочисленных состояний важную роль сыграли аналитические решения двухуровневой задачи, которые широко использовались в физике столкновений, при управлении атомами посредством внешних лазерных полей, при исследовании туннельных эффектов в комплексных биологических системах, в химической динамике и, в общем, в теории квантовых неадиабатических переходов [1–20].

В данной работе рассматриваются решения полуклассической временной двухуровневой задачи в двойные, би- и триконфлюэнтных функциях Гойна [21–23], являющихся представителями класса математических функций Гойна, которые обобщают многие привычные специальные функции, включая гипергеометрические, функции Эйри, Бесселя, Матьё и т.д. Недавно нами была изучена задача сведения двухуровневой системы к общему и конфлюэнтному уравнениям Гойна и были получены, соответственно, 35 5-параметрических [24] и 15 4-параметрических [25] классов моделей, разрешимых в этих функциях. Ранее для расширения моделей, допускающих решение в вырожденных гипергеометрических функциях, было использовано биконфлюэнтное уравнение Гойна, что привело к 5 4-параметрическим классам моделей, разрешимым в биконфлюэнтных функциях Гойна [26].

Метод, применяемый для нахождения конфигураций поля, для которых двухуровневая задача сводится к уравнению, имеющему известное аналитическое решение, основан на следующем общем свойстве разрешимых моделей. Рассмотрим временные уравнения Шрёдингера, определяющие полуклассическую временную двухуровневую задачу. Это – система двух дифференциальных уравнений первого порядка для амплитуд вероятности двух вовлечённых квантовых состояний  $a_{1,2}(t)$ , содержащих две произвольные реальные функции времени  $U(t)$  и  $\delta(t)$ :

$$i \frac{da_1}{dt} = U e^{-i\delta} a_2, \quad i \frac{da_2}{dt} = U e^{+i\delta} a_1. \quad (1)$$

Легко проверить, что, если функции  $a_{1,2}^*(z)$  являются решениями системы, переписанной для вспомогательного аргумента  $z$  для некоторых функций  $U^*(z)$  и  $\delta^*(z)$ , то функции  $a_{1,2}(t) = a_{1,2}^*(z(t))$  являются решениями системы (1) для конфигурации поля, определяемой как

$$U(t) = U^*(z) \frac{dz}{dt}, \quad \delta_t(t) = \delta_z^*(z) \frac{dz}{dt} \quad (2)$$

для произвольной комплекснозначной функции  $z(t)$  [27–30].

Это свойство позволяет группировать все разрешаемые модели в отдельные классы, каждый из которых содержит модели, которые путём преобразований (2) получаются из одних и тех же функций модуляции  $U^*(z)$  и  $\delta_z^*(z)$  для амплитуды и расстройки, соответственно. Тогда поиск всего множества моделей, разрешимых через определенную специальную функцию, сводится к идентификации независимых пар  $\{U^*, \delta_z^*\}$ , именуемых базовыми интегрируемыми моделями, для которых решение двухуровневой задачи записывается через данную специальную функцию.

Рассматриваются дважды, би- и триконфлюэнтные функции Гойна, которые являются решениями частных типов конфлюэнтных модификаций общего уравнения Гойна [31], полученные путём слияния его некоторых сингуляр-

ных точек [21–23]. Все три рассматриваемых уравнения могут быть записаны в виде

$$P(z)u_{zz} + (\gamma + \delta z + \varepsilon z^2)u_z + (\alpha z - q)u = 0, \quad (3)$$

где  $P(z) = z^2$ ,  $z$  и  $1$  для дважды, би- и триконфлюэнтного уравнений Гойна, соответственно.

Техника нахождения двухуровневых моделей, для которых уравнения Шрёдингера (1) сводятся к целевому уравнению (то есть, в данном случае – к дважды, би- и триконфлюэнтному уравнениям Гойна (3)), следующая. Рассмотрим дифференциальное уравнение для  $a_2$ , полученное из системы (1) путём исключения  $a_1$ ,

$$\frac{d^2 a_2}{dt^2} + \left( -i\delta_t - \frac{U_t}{U} \right) \frac{da_2}{dt} + U^2 a_2 = 0. \quad (4)$$

Замена зависимой переменной  $a_2 = \phi(z)u(z)$  вместе с (2) приводит уравнение (4) к следующему уравнению для новой зависимой переменной  $u(z)$ :

$$u_{zz} + \left( 2\frac{\phi_z}{\phi} - i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} \right) u_z + \left( \frac{\phi_{zz}}{\phi} + \left( -i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} \right) \frac{\phi_z}{\phi} + U^{*2} \right) u = 0. \quad (5)$$

Здесь и далее строчные латинские индексы означают дифференцирование по соответствующей переменной. Данное уравнение становится одним из трёх конфлюэнтных уравнений Гойна (3), если

$$2\frac{\phi_z}{\phi} - i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} = \frac{\gamma + \delta z + \varepsilon z^2}{P(z)}, \quad (6)$$

$$\frac{\phi_{zz}}{\phi} + \left( -i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} \right) \frac{\phi_z}{\phi} + U^{*2} = \frac{\alpha z - q}{P(z)}, \quad (7)$$

где  $P(z) = z^2$ ,  $z$  и  $1$ . Несмотря на то, что это недоопределённая система двух нелинейных уравнений для трёх неизвестных функций  $U^*(z)$ ,  $\delta^*(z)$  и  $\phi(z)$ , общее решение которой неизвестно, много частных решений может быть найдено, применяя некий анзац, который приходит на ум при исследовании структуры правых частей уравнений (6) и (7).

Такой подход уже был использован нами при обобщении известных моделей, разрешаемых в гипергеометрических функциях, для шести бесконечных трёхпараметрических классов [28,29], а также при обобщении моделей, разрешаемых в вырожденных гипергеометрических функциях, для трёх бесконечных трёхпараметрических классов [30]. Как было отмечено выше, нами недавно обсуждалась возможность решения двухуровневой задачи в общих и одноконфлюэнтных функциях Гойна [24,25]. Были выведены 35 5-параметрических и 15 4-параметрических класса моделей, которые допускают решения в этих функциях, примечательная особенность которых заключается в расширении

множества функций модуляции расстройки от содержащих не более двух параметров до многопараметрических. В случае постоянной расстройки внешнего поля получаются двухпиковые симметричные либо асимметричные импульсы с контролируемой шириной [25]. В общем случае переменной расстройки возможно множество моделей пересечения уровней, включающее в себя симметричные или асимметричные модели нелинейного прохождения через резонанс [32,33], модели с касаниями уровней [34–36], процессы с двумя [36] и многими (периодическими) временными точками пересечения резонанса [37–40].

В данной работе использованы методы [24–30] и получены 5 4-параметрических основных моделей, разрешимых в дважды конфлюэнтных функциях Гойна, найдены ещё 5 моделей, разрешимых в биконфлюэнтных функциях Гойна, и одна модель, разрешимая в триконфлюэнтных функциях Гойна. Эти модели обобщают все ранее известные двух и трёхпараметрические основные модели, разрешимые в конфлюэнтных гипергеометрических функциях, до уровня более общих четырехпараметрических, включающих трёхпараметрические функции модуляции расстройки. Далее применяется преобразование независимой переменной для генерирования разных семейств реальных конфигураций поля с реальной частотой Раби  $U(t)$  и расстройкой  $\delta(t)$ . Полученные модели описывают разные нелинейные по времени (параболические, кубические,  $\sinh$ ,  $\cosh$  и т.д.) процессы с прохождением и касанием уровней, а также процессы с двойным, тройным и периодическим пересечением резонанса.

## 2. Модели решений двухуровневой задачи в дважды конфлюэнтных функциях Гойна

Дважды конфлюэнтное уравнение Гойна записывается как [21–23]

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left( \frac{\gamma}{z^2} + \frac{\delta}{z} + \varepsilon \right) \frac{du}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z^2} u = 0. \quad (8)$$

Соответственно уравнения (6) и (7) можно переписать в виде

$$\frac{\gamma}{z^2} + \frac{\delta}{z} + \varepsilon = 2 \frac{\phi_z}{\phi} - i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*}, \quad (9)$$

$$\frac{\alpha z - q}{z^2} = \frac{\phi_{zz}}{\phi} + \left( -i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} \right) \frac{\phi_z}{\phi} + U^{*2}. \quad (10)$$

Исследование структур этих уравнений предполагает поиск их частных решений в следующей форме:

$$\frac{\phi_z}{\phi} = \frac{\alpha_2}{z^2} + \frac{\alpha_1}{z} + \alpha_0 \Leftrightarrow \phi = z^{\alpha_1} e^{\alpha_0 z - \alpha_2/z}, \quad (11)$$

$$\frac{U_z^*}{U^*} = \frac{k}{z} \Leftrightarrow U^* = U_0^* z^k, \quad (12)$$

$$\delta_z^* = \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\delta_1}{z} + \delta_0. \quad (13)$$

Умножив уравнение (10) на  $z^4$ , получаем, что для произвольных  $\delta_{0,1,2}$  произведение  $U_0^{*2} z^{2k+4}$  должно быть полиномом по  $z$  не более четвёртой степени. Следовательно,  $k$  является целым или полуцелым числом, удовлетворяющим неравенствам  $0 \leq 2k + 4 \leq 4$ . Это приводит к пяти возможным значениям для  $k$ , а именно,  $k = -2, -3/2, -1, -1/2, 0$ , образующим соответственно пять классов двухуровневых моделей, разрешимых в дважды конфлюэнтных функциях Гойна. Функции амплитудной модуляции для этих классов даются как

$$\frac{U^*}{U_0} = \frac{1}{z^2}, \quad \frac{1}{z\sqrt{z}}, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad 1. \quad (14)$$

Согласно уравнениям (2), реальные физические конфигурации поля, для которых решение двухуровневой задачи даётся в дважды конфлюэнтных функциях Гойна, запишутся как

$$U(t) = U_0^* z^k \frac{dz}{dt}, \quad (15)$$

$$\delta_i(t) = \left( \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\delta_1}{z} + \delta_0 \right) \frac{dz}{dt}, \quad (16)$$

где  $k = -2, -3/2, -1, -1/2, 0$ , а параметры  $U_0^*$ ,  $\delta_{0,1,2}$  являются комплексными постоянными, взятыми таким образом, чтобы функции  $U(t)$  и  $\delta(t)$  являлись реальными для выбранного комплекснозначного преобразования  $z(t)$ . Так как эти параметры выбираются произвольным образом, полученные классы в общем случае являются четырехпараметрическими.

Решение двухуровневой задачи (1) в явном виде записывается как

$$a_2 = z^{\alpha_1} e^{\alpha_0 z - \frac{\alpha_2}{z}} H_D(\gamma, \delta, \varepsilon; \alpha, q; z), \quad (17)$$

где параметры дважды конфлюэнтной функции Гойна  $\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha, q$  находятся по формулам

$$\gamma = 2\alpha_2 - i\delta_2, \quad \delta = 2\alpha_1 - i\delta_1 - k, \quad \varepsilon = 2\alpha_0 - i\delta_0, \quad (18)$$

$$\alpha = \alpha_1 \varepsilon - \alpha_0(k + i\delta_1) + Q'''(0)/6, \quad (19)$$

$$q = \alpha_1(1 + k + i\delta_1 - \alpha_1) - \alpha_2 \varepsilon + i\alpha_0 \delta_2 - Q''(0)/2, \quad (20)$$

здесь  $Q(z) = U_0^{*2} z^{2k+4}$  и

$$\alpha_0^2 - i\alpha_0 \delta_0 + Q^{(4)}(0)/4! = 0, \quad (21)$$

$$\alpha_1 \gamma - \alpha_2(2 + k + i\delta_1) + Q'(0) = 0, \quad (22)$$

$$\alpha_2^2 - i\alpha_2 \delta_2 + Q(0) = 0. \quad (23)$$

Формально, степенные разложения дважды конфлюэнтной функции Гойна  $H_D$  могут быть сконструированы подстановкой [21–23]

$$H_D(\gamma, \delta, \varepsilon; \alpha, q; z) = e^{\nu_0 z - \nu_1/z} z^\mu \sum c_n z^n, \quad (24)$$

однако радиус сходимости этого ряда нулевой. Тем не менее, возможно асимптотическое разложение, которое может оказаться полезным как в теоретических исследованиях, так и в практических приложениях [21–23]. Например, будучи оборванным, ряд представляет конечное замкнутое точное решение в виде квазиполиномов.

Коэффициенты ряда (24) в общем случае удовлетворяют пятичленному рекуррентному соотношению. Тем не менее, соотношение может упроститься до трёхчленного, если  $\nu_1 = 0$  или  $-\gamma$  и  $\nu_0 = 0$  или  $-\varepsilon$ . В простейшем случае  $\nu_0 = \nu_1 = 0$  результат записывается как

$$R_n c_n + Q_{n-1} c_{n-1} + P_{n-2} c_{n-2} = 0, \quad (25)$$

$$R_n = \gamma(n + \mu), \quad (26)$$

$$Q_n = (n + \mu)(n + \mu + \delta - 1) - q, \quad P_n = \alpha + \varepsilon(n + \mu). \quad (27)$$

Если  $\gamma \neq 0$ , ряд обрывается слева при  $\mu = 0$ . Справа ряд обрывается для некоторого  $n = N$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ), если  $\alpha + \varepsilon N = 0$  и  $c_{N+1} = 0$ . Последнее уравнение есть полиномиальное уравнение степени  $(N + 1)$  для параметра  $q$ .

Для приведения примеров конфигураций поля, генерируемых моделями (13), (14) и уравнениями (15), (16), рассмотрим замены  $z(t) = e^t$  и  $z(t) = e^{it}$ .

В случае  $z(t) = e^t$  и  $U_0^* = U_0$  получаются семейства

$$U(t) = U_0 e^{(k+1)t}, \quad \delta_t(t) = \delta_0 e^t + \delta_1 + \delta_2 e^{-t}, \quad (28)$$

для которых расстройка изменяется таким образом, что частота поля может пересечь резонанс  $\delta_t = 0$  до двух раз. В случае  $k = -1$  амплитуда поля постоянна.

Если  $\delta_2 = \delta_0$ , конфигурация поля для  $k = -1$  определяется соотношениями

$$U(t) = U_0, \quad \delta_t(t) = \delta_1 + 2\delta_0 \cosh(t). \quad (29)$$

В зависимости от параметров  $\delta_{0,1}$  возможны процессы с двукратным пересечением, касанием и отсутствием пересечения резонанса (рис.1). Касание резонанса имеет место, если  $\delta_1 = -2\delta_0$ .

В случае  $\delta_2 = -\delta_0$  конфигурация поля для  $k = -1$

$$U(t) = U_0, \quad \delta_t(t) = \delta_1 + 2\delta_0 \sinh(t), \quad (30)$$

что приводит к единичному пересечению резонанса (рис.2). Для ненулевых  $\delta_1$  пересечение асимметрично по времени, если же  $\delta_1 = 0$ , то оно симметрично и квазилинейно по времени:  $\delta_t \sim 2\delta_0 t$ , когда  $t \rightarrow 0$  (согласно терминологии [32],

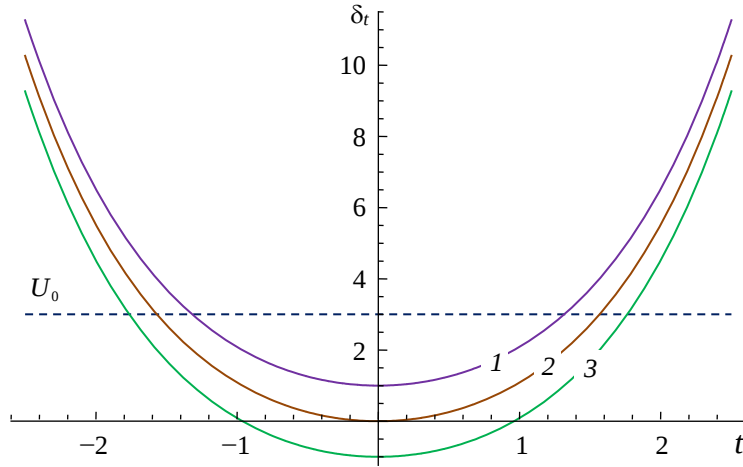


Рис.1. Дважды конфлюэнтный класс Гойна,  $k = -1$ ,  $z(t) = e^t$ ,  $U_0 = 3$ . Расстройки соответствуют  $\delta_2 = \delta_0 = 1$  и  $\delta_1 = -1; -2; -3$  (кривые 1, 2, 3, соответственно).

такое пересечение является примером суперлинейного пересечения, так как при  $t \rightarrow \infty$  расстройка расходитя быстрее линейной расстройки Ландау–Зинера).

Решение двухуровневой задачи (1) для конфигурации (28), соответствующей выбору  $\alpha_{0,1,2} = 0$  ( $\phi(z) = 1$ ), записывается как

$$a_2 = H_D(-i\delta_2, 1 - i\delta_1, -i\delta_0; 0, -U_0^2; e^t). \quad (31)$$

Второе независимое решение выводится путём использования другого выбора

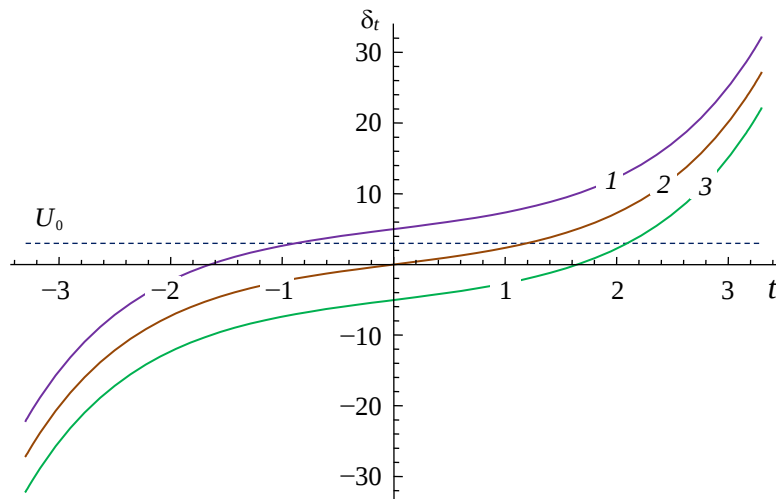


Рис.2. Дважды конфлюэнтный класс Гойна,  $k = -1$ ,  $z(t) = e^t$ ,  $U_0 = 3$ . Расстройки соответствуют  $\delta_2 = -\delta_0 = -1$  и  $\delta_1 = 5; 0; -5$  (кривые 1, 2, 3, соответственно).

тройки параметров  $\alpha_{0,1,2}$  (см. уравнения (21)–(23)).

Другая модель пересечения уровней получается заменой  $z(t) = e^{i(t-t_0)}$  ( $t_0 = \text{const}$ ). Вновь, рассматривая класс  $k = -1$  с  $U_0^* = -iU_0$ ,  $\delta_0 = \delta_2 = -i\Delta_2 / 2$  и  $\delta_1 = -i\Delta_1$ , получаем следующую конфигурацию

$$U(t) = U_0, \quad \delta_t(t) = \Delta_1 + \Delta_2 \cos(t - t_0), \quad (32)$$

которая характеризуется периодически повторяющимися процессами касания или пересечения резонанса (рис.3). В этом случае решение двухуровневой задачи, соответствующее выбору  $\alpha_{0,1,2} = 0$ , записывается в явном виде как

$$a_2 = H_D(-\Delta_2 / 2, 1 - \Delta_1, -\Delta_2 / 2; 0, U_0^2; e^{i(t-t_0)}). \quad (33)$$

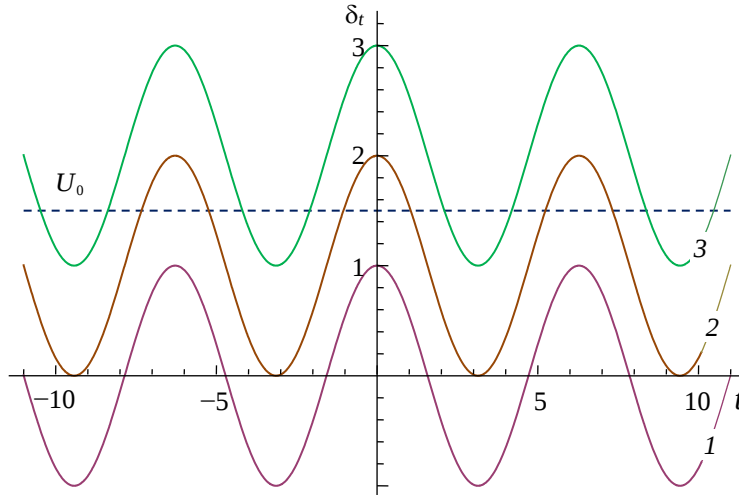


Рис.3. Дважды конфлюэнтный класс Гойна,  $k = -1$ ,  $z(t) = e^{i(t-t_0)}$ ,  $U_0 = 1.5$ . Расстройки соответствуют  $t_0 = 0$ ,  $\Delta_2 = 1$  и  $\Delta_1 = 0$ ; 1; 2 (кривые 1, 2, 3, соответственно).

### 3. Двухуровневые модели, разрешимые в биконфлюэнтных функциях Гойна

Биконфлюэнтное уравнение Гойна имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left( \frac{\gamma}{z} + \delta + \varepsilon z \right) \frac{du}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z} u = 0. \quad (34)$$

Следовательно, уравнения (6) и (7) в данном случае переписутся как:

$$\frac{\gamma}{z} + \delta + \varepsilon z = 2 \frac{\phi_z}{\phi} - i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*}, \quad (35)$$

$$\frac{\alpha z - q}{z} = \frac{\phi_{zz}}{\phi} + \left( -i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} \right) \frac{\phi_z}{\phi} + U^{*2}. \quad (36)$$

Ищем решения этих уравнений в виде

$$\frac{\phi_z}{\phi} = \frac{\alpha_1}{z} + \alpha_0 + \alpha_2 z \quad \Leftrightarrow \quad \phi = z^{\alpha_1} e^{\alpha_0 z + \frac{\alpha_2}{2} z^2}, \quad (37)$$

$$\frac{U_z^*}{U^*} = \frac{k}{z} \quad \Leftrightarrow \quad U^* = U_0^* z^k, \quad (38)$$

$$\delta_z^* = \frac{\delta_1}{z} + \delta_0 + \delta_2 z. \quad (39)$$

Умножая уравнение (36) на  $z^2$ , видим, что для произвольных  $\delta_{0,1,2}$  произведение  $U_0^{*2} z^{2k+2}$  является полиномом по  $z$  не более, чем четвёртой степени. Следовательно,  $k$  является целым или полуцелым и удовлетворяет неравенствам  $0 \leq 2k + 2 \leq 4$ , что приводит к пяти возможным значениям для  $k$ , а именно  $k = -1, -1/2, 0, 1/2, 1$ , которые образуют пять классов двухуровневых моделей, разрешимых в биконфлюэнтных функциях Гойна. Функции амплитудной модуляции для этих классов приведены ниже:

$$\frac{U^*}{U_0^*} = \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad 1, \quad \sqrt{z}, \quad z. \quad (40)$$

Таким образом, конфигурации поля, для которых решение двухуровневой задачи записывается в биконфлюэнтных функциях Гойна, даются формулами [26]

$$U(t) = U_0^* z^k \frac{dz}{dt}, \quad (41)$$

$$\delta_t(t) = \left( \frac{\delta_1}{z} + \delta_0 + \delta_2 z \right) \frac{dz}{dt}, \quad (42)$$

где  $k = -1, -1/2, 0, 1/2, 1$  и  $U_0^*$ ,  $\delta_{0,1,2}$  являются комплексными постоянными, подобранными таким образом, чтобы функции  $U(t)$  и  $\delta(t)$  являлись реальными для выбранного комплекснозначного  $z(t)$ . Так как эти параметры произвольные, полученные классы являются четырехпараметрическими.

Точное решение исходной двухуровневой задачи (1) имеет явный вид

$$a_2 = z^{\alpha_1} e^{\alpha_0 z + \frac{\alpha_2}{2} z^2} H_B(\gamma, \delta, \varepsilon; \alpha, q; z), \quad (43)$$

где параметры биконфлюэнтной функции Гойна  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $q$  даются формулами

$$\gamma = 2\alpha_1 - i\delta_1 - k, \quad \delta = 2\alpha_0 - i\delta_0, \quad \varepsilon = 2\alpha_2 - i\delta_2, \quad (44)$$

$$\alpha = \alpha_0(\alpha_0 - i\delta_0) + \alpha_1(2\alpha_2 - i\delta_2) + \alpha_2(1 - k - i\delta_1) + Q''(0) / 2, \quad (45)$$

$$q = \alpha_0(k + i\delta_1) - \alpha_1(2\alpha_0 - i\delta_0) - Q'(0), \quad (46)$$

где  $Q(z) = U_0^{*2} z^{2k+2}$  и

$$\alpha_0 \varepsilon - i\alpha_2 \delta_0 + Q'''(0) / 3! = 0, \quad (47)$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_1(1 + k + i\delta_1) + Q(0) = 0, \quad (48)$$

$$\alpha_2^2 - i\alpha_2 \delta_2 + Q^{(4)}(0) / 4! = 0. \quad (49)$$

Точка 0 является регулярной сингулярной точкой уравнения (34), следовательно, уравнение допускает решение в виде ряда Фробениуса

$$u = z^\mu \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (50)$$

Подстановка уравнения (50) в уравнение (34) даёт следующее рекуррентное соотношение для коэффициентов разложения:

$$R_n c_n + Q_{n-1} c_{n-1} + P_{n-2} c_{n-2} = 0, \quad (51)$$

$$R_n = (n + \mu)(n + \mu - 1 + \gamma), \quad (52)$$

$$Q_n = \delta(n + \mu) - q, \quad P_n = \alpha + \varepsilon(n + \mu), \quad (53)$$

где  $\mu = 0$  или  $\mu = 1 - \gamma$ .

В отличие от степенного ряда для дважды конфлюэнтного уравнения Гойна, данный ряд сходится всюду на комплексной плоскости. Ряд обрывается справа для некоторого  $n = N = 1, 2, 3, \dots$ , тем самым генерируя конечное замкнутое полиномиальное решение при условии, что  $\alpha + \varepsilon(N + \mu) = 0$  и  $c_{N+1} = 0$ . Последнее уравнение является полиномиальным уравнением  $(N + 1)$  степени для  $q$ .

Классы (41) и (42) включают в себя все известные вырожденные гипергеометрические модели пересечения уровней. Например, положив  $\delta_0 = 0$  и сделав замену  $z \rightarrow \sqrt{z}$ , для классов с  $k = -1, 0, 1$  получим классы Ландау–Зинера–Майорана–Штюкельберга [9–12], Никитина [5,13] и Кротерса [14], соответственно.

Более того, полученные классы допускают другие интересные модели пересечения уровней. При выборе  $k = -1/2$  с  $U_0^* = U_0 / 2$ ,  $\delta_0 = \Delta_1 / 2$ ,  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_2 = \Delta_2 / 2$  и заменой  $z(t) = t^2$  получается нелинейная по времени модель пересечения уровней, а именно кубическая модель пересечения уровней с постоянной амплитудой, которая допускает одно или три пересечения резонанса (рис.4):

$$U(t) = U_0, \quad \delta_t(t) = \Delta_1 t + \Delta_2 t^3. \quad (54)$$

Решение двухуровневой задачи для этой модели, соответствующее выбору

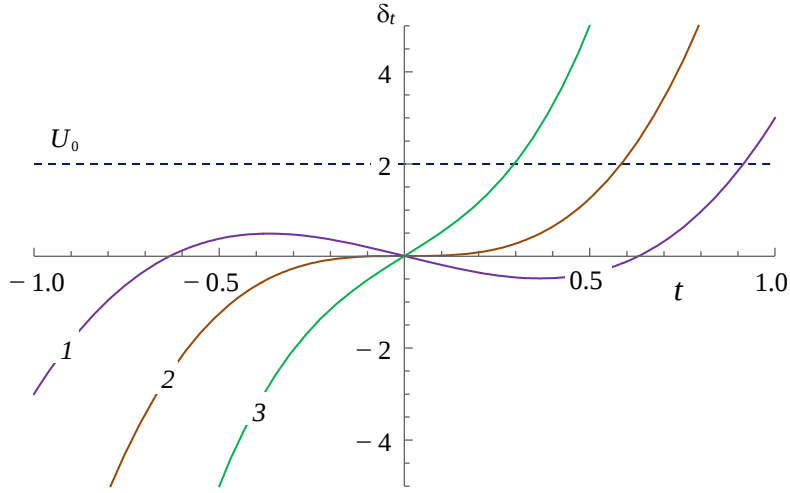


Рис.4. Биконфлюэнтный класс Гойна,  $k = -1/2$ ,  $z(t) = t^2$ ,  $U_0 = 2$ . Расстройки соответствуют  $(\Delta_1, \Delta_2) = (-2, 5)$ ;  $(0, 10)$ ;  $(5, 20)$  (кривые 1, 2, 3, соответственно).

$\alpha_{1,2,3} = 0$  (см. уравнения (47)–(49)), записывается как

$$a_2 = H_B \left( \frac{1}{2}, -\frac{i\Delta_1}{2}, -\frac{i\Delta_2}{2}; 0, -\frac{U_0^2}{4}; t^2 \right). \quad (55)$$

Другой класс  $k = +1/2$  с  $U_0^* = 3U_0/2$ ,  $\delta_0 = \delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 3\Delta_2/2$  с заменой  $z(t) = t^{2/3}$  порождает модель (с постоянной амплитудой) с бесконечно быстрым прохождением резонанса (рис.5):

$$U(t) = U_0, \quad \delta_t(t) = \Delta_2 t^{1/3}. \quad (56)$$

Решением двухуровневой задачи для этой модели (тут мы полагаем  $\alpha_{1,2} = 0$ ) является

$$a_2 = e^{\delta t^{2/3}/2} H_B \left( -\frac{1}{2}, \delta, -\frac{3i\Delta_2}{2}; \frac{\delta^2}{4}, \frac{\delta}{4}; t^{2/3} \right), \quad (57)$$

где  $\delta = -3iU_0^2/\Delta_2$  и принимается, что  $t > 0$ .

#### 4. Двухуровневые модели, разрешимые в триконфлюэнтных функциях Гойна

Триконфлюэнтное уравнение Гойна записывается как

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma + \delta z + \varepsilon z^2) \frac{du}{dz} + (\alpha z - q)u = 0. \quad (58)$$

Следовательно, уравнения (6) и (7) принимают вид

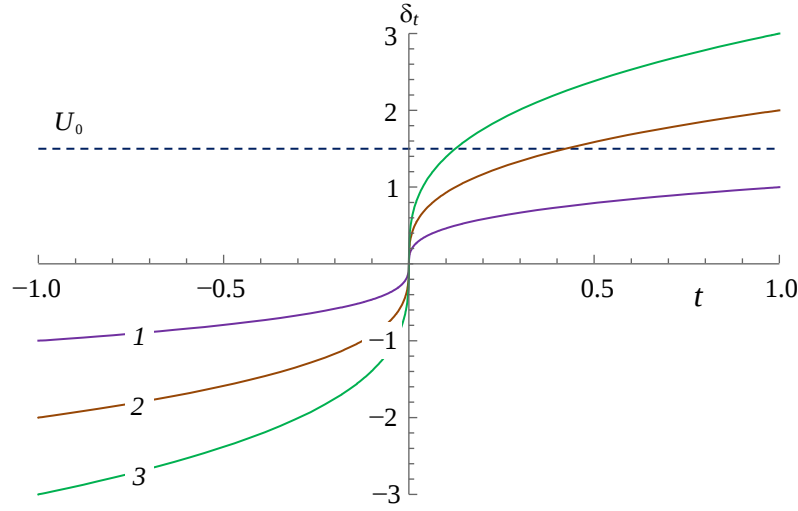


Рис.5. Биконфлюэнтный класс Гойна,  $k = +1/2$ ,  $z(t) = t^{2/3}$ ,  $U_0 = 1.5$ . Расстройки соответствуют  $\Delta_2 = 1; 2; 3$  (кривые 1, 2, 3, соответственно).

$$\gamma + \delta z + \varepsilon z^2 = 2 \frac{\phi_z}{\phi} - i \delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*}, \quad (59)$$

$$\alpha z - q = \frac{\phi_{zz}}{\phi} + \left( -i \delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} \right) \frac{\phi_z}{\phi} + U^{*2}. \quad (60)$$

Исходя из структуры уравнения (59), ищем решения этих уравнений в виде

$$\frac{\phi_z}{\phi} = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2, \quad \delta_z^* = \delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2, \quad \frac{U_z^*}{U^*} = k_0 + k_1 z + k_2 z^2. \quad (61)$$

Второе уравнение сразу же определяет единственно возможные значения параметров  $k_{1,2,3} = 0$ , следовательно,  $U^* = U_0^* = \text{const}$ , что определяет четырёхпараметрический класс с конфигурацией поля

$$U(t) = U_0^* \frac{dz}{dt}, \quad \delta_t(t) = (\delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2) \frac{dz}{dt}. \quad (62)$$

Решение исходной двухуровневой задачи для этого класса записывается как

$$a_2 = e^{\alpha_0 z + \frac{\alpha_1}{2} z^2 + \frac{\alpha_2}{3} z^3} H_T(\gamma, \delta, \varepsilon; \alpha, q; z), \quad (63)$$

где вовлечённые параметры задаются выражениями

$$\alpha_{1,2,3} = \{0, 0, 0\}, \quad \{\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha, q\} = \{-i \delta_0, -i \delta_1, -i \delta_2, 0, -U_0^{*2}\} \quad (64)$$

или

$$\alpha_{1,2,3} = \{i\delta_0, i\delta_1, i\delta_2\}, \quad \{\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha, q\} = \{i\delta_0, i\delta_1, i\delta_2, 2i\delta_2, -U_0^{*2} - i\delta_1\}. \quad (65)$$

Триконфлюэнтное уравнение Гойна (58) имеет только одну сингулярную точку. Эта – иррегулярная сингулярная точка ранга 3, находящаяся в точке  $z = \infty$ . Так как начало координат является обычной точкой, уравнение допускает решение в виде степенного ряда

$$u = z^\mu \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (66)$$

который сходится всюду на комплексной плоскости. Однако, на этот раз рекуррентное соотношение для коэффициентов разложения является четырёхчленным

$$S_n c_n + R_{n-1} c_{n-1} + Q_{n-2} c_{n-2} + P_{n-3} c_{n-3} = 0, \quad (67)$$

где

$$S_n = (n + \mu)(n + \mu - 1), \quad R_n = \gamma(n + \mu), \quad (68)$$

$$Q_n = \delta(n + \mu) - q, \quad P_n = \alpha + \varepsilon(n + \mu). \quad (69)$$

Для того, чтобы с уверенностью иметь разложение, из двух характеристических экспонент  $\mu = 0, 1$ , берётся большая,  $\mu = 1$  (другой выбор ведёт к логарифмическому решению). Ряд обрывается справа для некоторого  $n = N = 1, 2, 3, \dots$ , если  $\alpha + \varepsilon(N + \mu) = 0$  и параметры уравнения удовлетворяют условиям  $c_{N+1} = c_{N+2} = 0$ .

Стоит сделать замечание относительно четырёхчленного рекуррентного соотношения (67). Сравнение с вырожденными гипергеометрическими классами показывает, что конфигурация поля (62) обеспечивает расширение класса только в случае  $\delta_2 \neq 0$ , что автоматически подразумевает выполнение условия  $\varepsilon \neq 0$  (так как  $\varepsilon = \pm i\delta_2$ , см. уравнения (64) и (65)). Однако, в случае ненулевого  $\varepsilon$  смещением начала координат  $z \rightarrow z - z_0$  всегда можно добиться  $\gamma = 0$ . Так как в этом случае  $R_n = 0$  исчезает для всех  $n$ , рекуррентное соотношение (67) всегда может быть сведено к трёхчленному, хотя и с непоследовательными членами.

Применив замену  $z = \Delta(t - t_1)$  и выбрав  $U_0^* = U_0 / \Delta$ ,  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_1 = (t_1 - t_2) / \Delta$ ,  $\delta_2 = 1 / \Delta^2$ , получим конфигурацию поля с постоянной амплитудой и параболической расстройкой (рис.6):

$$U(t) = U_0, \quad \delta_t(t) = \Delta(t - t_1)(t - t_2). \quad (72)$$

При этом могут получиться модели без пересечений (если  $t_{1,2}$  имеют ненулевые мнимые части), либо модель с двойным пересечением резонанса (если  $t_{1,2}$  – ненулевые вещественные величины), либо модель с касанием резонанса (если  $t_1 = t_2 = 0$ ).

Решение двухуровневой задачи для данной модели при выборе  $\alpha_{1,2,3} = 0$  имеет вид

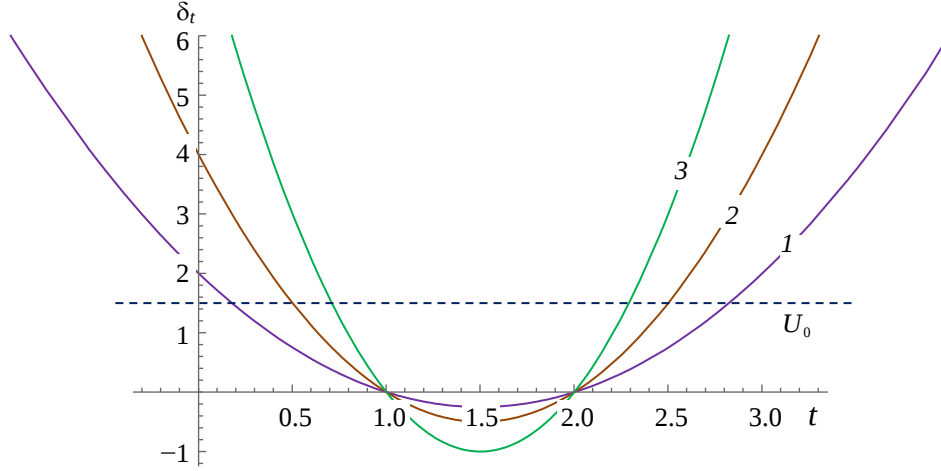


Рис.6. Триконфлюэнтный класс Гойна,  $z = \Delta(t - t_1)$ ,  $U_0 = 1.5$ . Расстройки соответствуют  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$  и  $\Delta = 1$ ; 2; 4 (кривые 1, 2, 3, соответственно).

$$a_2 = H_T \left( 0, -\frac{i(t_1 - t_2)}{\Delta}, -\frac{i}{\Delta^2}; 0, -\frac{U_0^2}{\Delta^2}; \Delta(t - t_1) \right). \quad (73)$$

Второе независимое решение даётся уравнением (63) для второго набора параметров уравнения (65).

### 5. Другие классы, разрешимые в функциях Гойна

Вышеуказанные классы не исчерпывают все возможности и не покрывают всё множество конфигураций поля, для которых решения двухуровневой задачи даются в функциях Гойна. Некоторые другие классы могут быть получены при рассмотрении уравнений, которым удовлетворяют производные от функций Гойна. Такое расширение возможно по той причине, что эти функции не принадлежат к классу функций Гойна, а удовлетворяют более сложным уравнениям, которые в общем имеют дополнительно ещё одну регулярную сингулярную точку [41–44].

В качестве примера рассмотрим триконфлюэнтное уравнение Гойна (58). Нетрудно проверить, что первая производная от его решения, взятая с весовым коэффициентом  $v(z) = e^{\gamma z} u_z$ , удовлетворяет уравнению

$$v_{zz} + \left( -\gamma + \delta z + \varepsilon z^2 - \frac{1}{z - z_0} \right) v_z + \frac{\Pi(z)}{z - z_0} v = 0, \quad (74)$$

где  $z_0 = q/\alpha$  и  $\Pi(z)$  – кубический полином:

$$\Pi(z) = -\gamma \varepsilon z^3 + (\alpha + \varepsilon - \gamma \delta + z_0 \gamma \varepsilon) z^2 + z_0 (\gamma \delta - 2\alpha - 2\varepsilon) z + z_0 (q - \delta). \quad (75)$$

Для ненулевого  $\alpha$  это уравнение имеет дополнительную регулярную сингулярность, расположенную в точке  $z = z_0$ . Если  $q = 0$  (заметим, что выполнения этого условия для ненулевого  $\alpha$  всегда можно добиться смещением начала координат) и, дополнительно,  $\alpha + \varepsilon = \gamma\delta$ , уравнение упрощается к виду

$$v_{zz} + \left( -\gamma + \delta z + \varepsilon z^2 - \frac{1}{z} \right) v_z - \gamma \varepsilon z^2 v = 0. \quad (76)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (4), переписанным для переменной  $z$ ,

$$\frac{d^2 a_2^*}{dz^2} + \left( -i\delta_z^* - \frac{U_z^*}{U^*} \right) \frac{da_2^*}{dz} + U^{*2} a_2^* = 0, \quad (77)$$

можно увидеть, что  $a_2^*(z) = v(z)$ , если

$$\delta_z^* = \delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2, \quad U^* = U_0^* z, \quad (78)$$

$$\gamma = i\delta_0, \quad \delta = -i\delta_1, \quad \varepsilon = -i\delta_2, \quad U_0^{*2} = -\gamma\varepsilon. \quad (79)$$

Тогда, согласно свойству (2), для класса моделей, заданных как (сравните с уравнением (62))

$$U(t) = U_0^* z \frac{dz}{dt}, \quad \delta_t(t) = (\delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2) \frac{dz}{dt} \quad (80)$$

с произвольной комплекснозначной функцией  $z(t)$ , решение двухуровневой задачи (1) запишется через производную от конфлюэнтной функции Гойна в виде (вспомним, что  $q = 0$  и  $\alpha + \varepsilon = \gamma\delta$ )

$$a_2 = e^{i\delta_0 z} \frac{d}{dz} H_T(i\delta_0, -i\delta_1, -i\delta_2; i\delta_2 + \delta_0\delta_1; 0; z). \quad (81)$$

Однако, не все параметры здесь являются независимыми. Последнее уравнение (79) вводит ограничение на параметр  $U_0^{*2} = -\delta_0\delta_2$ . Следовательно, класс (80) является трёхпараметрическим.

Используя производные от биконфлюэнтной и дважды конфлюэнтной функций Гойна, легко могут быть выведены сходные классы. Например, функция  $v = z^\sigma u_z$ , где  $u(z)$  является решением биконфлюэнтного уравнения Гойна (34), удовлетворяет уравнению

$$v_{zz} + \left( \frac{\gamma + 1 - 2\sigma}{z} + \delta + \varepsilon z - \frac{1}{z - z_0} \right) v_z + \frac{(\alpha + \varepsilon - \varepsilon\sigma)(z - z_0)^2}{z^2} v = 0, \quad (82)$$

где  $z_0 = q/\alpha$ ,  $\sigma = \gamma + \delta z_0 + \varepsilon z_0^2$  и  $(\alpha + \varepsilon)z_0 = (\delta + 2\varepsilon z_0)\sigma$ . Сравнение этого уравнения с уравнением (77) сразу же определяет класс

$$U(t) = U_0^* \frac{z - z_0}{z} \frac{dz}{dt}, \quad \delta_t(t) = \left( \frac{\delta_1}{z} + \delta_0 + \delta_2 z \right) \frac{dz}{dt}, \quad (83)$$

для которого решение двухуровневой задачи можно написать в виде

$$a_2 = z^\sigma \frac{d}{dz} H_B(-i\delta_1 + 2\sigma, -i\delta_0, -i\delta_2; \alpha; \alpha z_0; z), \quad (84)$$

где

$$\sigma = i(\delta_1 + \delta_0 z_0 + \delta_2 z_0^2), \quad \alpha = i\delta_2(1 - 2\sigma) - i\delta_0\sigma / z_0, \quad U_0^{*2} = \alpha + \varepsilon - \varepsilon\sigma. \quad (85)$$

В этом случае  $\delta_{0,1,2}$  и  $z_0$  являются произвольными вещественными параметрами. Следовательно, полученный класс является четырехпараметрическим.

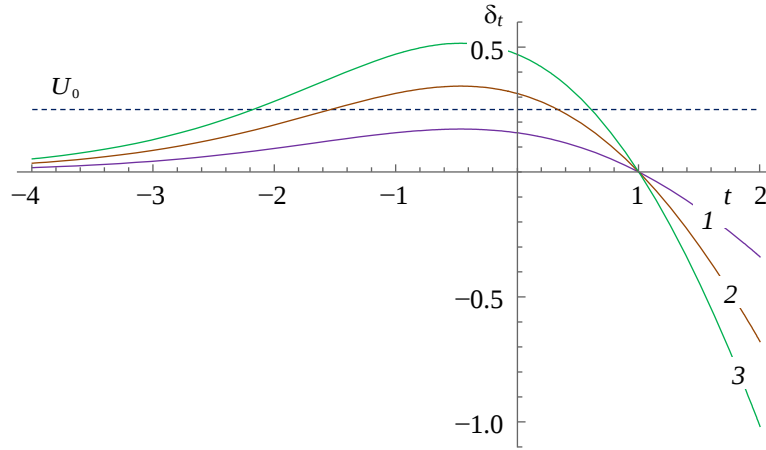


Рис.7. Биконфлюэнтный класс Гойна (83). Семейство с постоянной амплитудой и  $z_0 = -1$ :  $z = W(e^t)$ ,  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = -\delta_0$ . Расстройки соответствуют  $\delta_0 = 1; 2; 3$  (кривые 1, 2, 3, соответственно).

Семейство с постоянной амплитудой конфигураций поля получается заменой

$$z(t) = -z_0 W(-e^{-t/z_0} / z_0), \quad (86)$$

где  $W$  – функция Ламберта [45]. Соответствующее семейство с модулируемыми расстройками показано на рис.7.

Таким же образом функция  $v = e^{-\sigma/z} u_z$  с решением дважды конфлюэнтного уравнения Гойна (8)  $u(z)$  и с выбором  $\alpha = -\varepsilon$  и  $q = \delta / 2$  удовлетворяет уравнению

$$v_{zz} + \left( \frac{\gamma - 2\sigma}{z^2} + \frac{\delta + 2}{z} + \varepsilon - \frac{1}{z - z_0} \right) v_z - \frac{\varepsilon\sigma(z - z_0)^2}{z^4} v = 0, \quad (87)$$

где  $z_0 = q / \alpha$  и  $\sigma = \gamma - \delta^2 / (4\varepsilon)$ . Сравнение этого уравнения с уравнением (77) даёт трёхпараметрический класс

$$U(t) = U_0^* \frac{z - z_0}{z^2} \frac{dz}{dt}, \quad \delta_t(t) = \left( \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\delta_1}{z} + \delta_0 \right) \frac{dz}{dt}, \quad (88)$$

здесь  $U_0^{*2} = -\varepsilon\sigma$ , для которого решение двухуровневой задачи напишется как

$$a_2 = e^{-\sigma/z} \frac{d}{dz} H_D(-i\delta_2 + 2\sigma, -i\delta_1, -i\delta_0; i\delta_0; -i\delta_1/2; z). \quad (89)$$

Именно из-за ограничения  $U_0^{*2} = -\varepsilon\sigma$  полученный класс является трёхпараметрическим. Семейство с постоянной амплитудой получается заменой (сравнить с уравнением (86))

$$z(t) = -\frac{z_0}{W(-z_0 e^{-t})} \quad (90)$$

с  $z_0 = -\delta_1 / (2\delta_0)$ . Однопараметрическое семейство конфигураций полей с постоянной амплитудой, характеризующихся асимметрически модулируемыми расстройками, показано на рис.8. Конечно же, и другие семейства, описывающие импульсы, например, с постоянной расстройкой, могут быть построены надлежащим выбором преобразования  $z(t)$  и вовлечённых параметров.

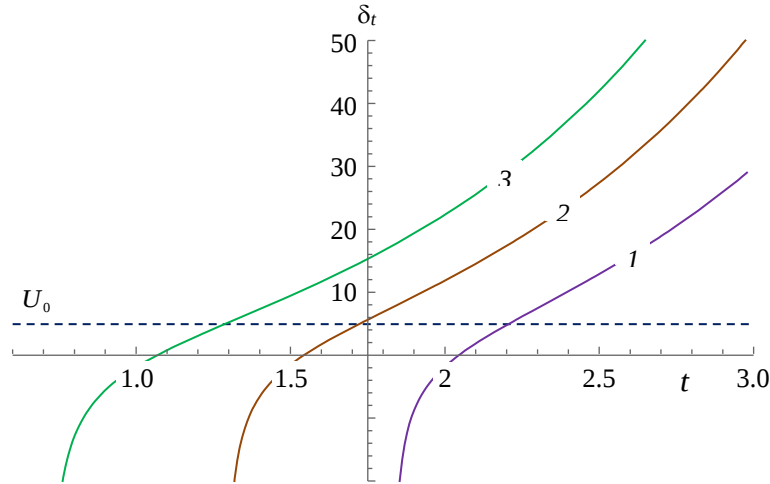


Рис.8. Дважды конфлюэнтный класс Гойна (88). Семейство с постоянной амплитудой  $z(t) = -z_0 / W(-z_0 e^{-t})$ ,  $z_0 = -\delta_1 / (2\delta_0)$ ,  $\delta_1 = -2 \times (25 - \delta_0^2)^{1/2}$ ,  $\delta_2 = -\delta_0$ . Расстройки соответствуют  $\delta_0 = 2; 3; 4$  (кривые 1, 2, 3, соответственно).

## 6. Обсуждение

Таким образом, представлены пять классов моделей квантовой временной двухуровневой задачи, разрешимых в дважды конфлюэнтных функциях Гойна, пять других классов, разрешимых в биконфлюэнтных функциях Гойна, и класс, разрешимый в триконфлюэнтных функциях Гойна. Все полученные классы являются четырехпараметрическими. В случае конфигурации поля с постоянной амплитудой модели описывают разные нелинейные (параболиче-

ские, кубические,  $\sinh$ ,  $\cosh$ , и т.д.) процессы с касанием или прохождением уровней, двойными или тройными пересечениями уровней. Модели, описывающие процессы с периодически повторяющимися касаниями или пересечениями резонанса, также возможны.

Нами показано, что множество других классов может быть получено при использовании уравнений, которым удовлетворяют производные функций Гойна. Для каждого из трёх конфлюэнтных уравнений Гойна нами представлено по одному примеру такого класса. Стоит отметить, что для гипергеометрических уравнений такие классы невозможны, так как производные гипергеометрических функций также являются гипергеометрическими функциями, в то время, как производные функций Гойна в общем случае не принадлежат к классу Гойна, а удовлетворяют более сложным уравнениям, содержащим ещё одну регулярную сингулярную точку [41–44].

Использованные функции Гойна являются решениями соответствующих конфлюэнтных модификаций общего уравнения Гойна, полученных слиянием его некоторых сингулярных точек. Для некоторых значений вовлечённых параметров каждое из этих трёх уравнений напрямую или путём замены зависимой или независимой переменной сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению. При этом вышеуказанные классы воспроизводят все три известных трёхпараметрических класса, решения которых даются в вырожденных гипергеометрических функциях [30].

Например, дважды конфлюэнтное уравнение Гойна напрямую сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению, если  $\gamma = q = 0$ . В этом случае система (18)–(23) становится переопределённой, и легко можно проверить, что решение существует только для классов  $k = -1, -1/2, 0$ . Таким же образом биконфлюэнтное уравнение Гойна прямо сводится к вырожденному гипергеометрическому, если  $\varepsilon = \alpha = 0$ . В этом случае система (44)–(49) также становится переопределённой, и легко можно проверить, что решение существует только для классов с  $k = -1, -1/2, 0$ . В обоих случаях  $\alpha_2 = \delta_2 = 0$ , что указывает на точное воспроизведение 3 трёхпараметрических вырожденных гипергеометрических классов [30].

Однако, триконфлюэнтное уравнение Гойна напрямую не сводится к конфлюэнтному гипергеометрическому уравнению. Если  $\varepsilon = 0$ , дополнительно необходимы замены как независимой, так и зависимой переменных, в то время как, если  $\varepsilon \neq 0$  и  $\gamma = \delta = 0$ , кубическая замена независимой переменной  $z$  на  $-\varepsilon(z - z_0)^3/3$  окажется достаточной. При этом можно убедиться, что триконфлюэнтный класс (62) во всех этих случаях воспроизводит вырожденный гипергеометрический класс (например, очевидно, что случай  $\gamma = \varepsilon = \alpha = 0$  является моделью Ландау-Зинера). Другой пример воспроизведения вырожденных гипергеометрических классов был приведен выше для биконфлюэнтного уравнения Гойна в случае замены  $z$  на  $\sqrt{z}$ . Этот случай представляет интерес, так

как воспроизведение получается для классов с  $k = -1, 0, 1$ . Следовательно, в дополнение к классам  $k = -1, -1/2, 0$  биконфлюэнтный класс  $k = +1$  также содержит в себе вырожденный гипергеометрический подкласс. В завершение можно убедиться, что это имеет место и для всех других классов. Тогда можно заключить, что все приведённые дважды, би- и триконфлюэнтные классы двух-уровневых моделей, каждый по-своему, являются различными обобщениями прообразов семейств вырожденных гипергеометрических моделей.

В заключение, коротко обсудим решения конфлюэнтных уравнений Гойна. Они являются нетривиальными функциями, теория которых до сих пор нуждается в развитии. Выше приведены общие решения конфлюэнтных уравнений Гойна в виде степенных рядов, однако в практических приложениях, особенно, когда рассматриваются нелинейные обобщения [46], может возникнуть потребность в более совершенных методиках. В подобных случаях можно попробовать разложения в иных, не просто степенных, функциях, например, в привычных специальных функциях, таких как вырожденные функции Куммера и Трикоми [21–23, 47–50], функции Бесселя [50–51], гипергеометрические функции Гаусса [21–23, 51], волновые функции Кулона [52–54], неполные гамма- и бета-функции [41, 55] и т.д. Возможны также разложения в высших трансцендентных функциях [56], например, в функциях Гурса и обобщенных гипергеометрических функциях Аппеля [57, 58]. В некоторых специальных случаях эти разложения могут обеспечить точные замкнутые решения.

Работа выполнена в рамках армяно-французской Международной ассоциированной лаборатории (CNRS-France и SCS-Armenia) IRMAS, при финансовой поддержке 7-й Рамочной программы ЕС (грант №. 295025-IPERA). Исследования были поддержаны ГКН МОН РА (грант № 13RB-052).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **L. Allen, J.H. Eberly.** Optical Resonance and Two-Level Atoms. New-York, Wiley, 1975.
2. **B.W. Shore.** Manipulating Quantum Structures Using Laser Pulses. New York, Cambridge University Press, 2011.
3. **B.W. Shore.** The Theory of Coherent Atomic Excitation. New York, Wiley, 1990.
4. **M.S. Child.** Molecular Collision Theory. London, Academic Press, 1974.
5. **E.E. Nikitin, S.Ya. Umanski.** Theory of Slow Atomic Collisions. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
6. **H. Nakamura.** Nonadiabatic Transition: Concepts, Basic Theories and Applications. Singapore, World Scientific, 2012.
7. **I.I. Rabi.** Phys. Rev, **51**, 652 (1937).
8. **N. Rosen, C. Zener.** Phys. Rev, **40**, 502 (1932).
9. **L.D. Landau.** Phys. Z. Sowjetunion, **2**, 46 (1932).
10. **C. Zener.** Proc. R. Soc. London, Ser. A, **137**, 696 (1932).
11. **E. Majorana.** Nuovo Cimento, **9**, 43 (1932).

12. **E.C.G. Stückelberg**. *Helv. Phys. Acta*, **5**, 369 (1932).
13. **E.E. Nikitin**. *Opt. Spectrosc*, **6**, 431 (1962).
14. **D.S.F. Crothers, J.G. Hughes**. *J. Phys. B*, **10**, L557 (1977).
15. **Ю.Н. Демков, М. Кунике**. *Вестник Ленинград. госунивер. физ.-хим.*, **16**, 39 (1969).
16. **A. Bambini, P.R. Berman**. *Phys. Rev. A*, **23**, 2496 (1981).
17. **F.T. Hioe, C.E. Carroll**. *J. Opt. Soc. Am. B*, **3**, 497 (1985).
18. **K.-A. Suominen**. *Opt. Commun.*, **93**, 126 (1992).
19. **D. DeVault**. *Quantum Mechanical Tunnelling in Biological Systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 1984.
20. **C. Zhu, Y. Teranishi, H. Nakamura**. *Adv. Chem. Phys.*, **117**, 127 (2001).
21. **A. Ronveaux**. *Heun's Differential Equations*. London, Oxford University Press, 1995.
22. **S.Yu. Slavyanov, W. Lay**. *Special Functions*. Oxford, Oxford University Press, 2000.
23. **F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (eds.)**. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. New York, Cambridge University Press, 2010.
24. **A.M. Ishkhanyan, T.A. Shahverdyan, T.A. Ishkhanyan**. *Eur. Phys. J. D*, **68**, (2014).
25. **A.M. Ishkhanyan, A.E. Grigoryan**. *J. Phys. A*, **47**, 465205 (2014).
26. **A.M. Ishkhanyan, K.-A. Suominen**. *J. Phys. A*, **34**, 6301 (2001).
27. **А.М. Исаакян**. *Известия НАН Армении, Физика*, **31**(4), 10 (1996).
28. **A.M. Ishkhanyan**. *J. Phys. A*, **33**, 5539 (2000).
29. **A.M. Ishkhanyan**. *Opt. Commun.*, **176**, 155 (2000).
30. **A.M. Ishkhanyan**. *J. Phys. A*, **30**, 1203 (1997).
31. **K. Heun**. *Math. Ann.*, **33**, 161 (1889).
32. **N.V. Vitanov, K.-A. Suominen**. *Phys. Rev. A*, **59**, 4580 (1999).
33. **D.A. Garanin, R. Schilling**. *Phys. Rev. B*, **66**, 174438 (2002).
34. **J. Lehto, K.-A. Suominen**. *Phys. Rev. A*, **86**, 033415 (2012).
35. **J. Lehto**. *Phys. Rev. A*, **88**, 043404 (2013).
36. **T.A. Shahverdyan, D.S. Mogilevtsev, A.M. Ishkhanyan, V.M. Red'kov**. *Nonlinear phenomena in complex systems*, **16**, 86 (2013).
37. **B.M. Garraway, S. Stenholm**. *Phys. Rev. A*, **45**, 364 (1992).
38. **Y. Kayanuma**. *Phys. Rev. B*, **47**, 9940 (1993).
39. **S.N. Shevchenko, S. Ashhab, F. Nori**. *Physics Reports*, **492**, 1 (2010).
40. **E.A. Ivanchenko**. *Physica B*, **358**, 308 (2005); **E.A. Ivanchenko, A.P. Tolstoluzhsky**. *Low Temp. Phys.*, **32**, 77 (2006).
41. **A. Ishkhanyan, K.-A. Suominen**. *J. Phys. A*, **36**, L81 (2003); **A.M. Ishkhanyan, K.-A. Suominen**. *J. Phys. A*, **34**, L591 (2001).
42. **P.P. Fiziev**. *J. Phys. A*, **43**, 035203 (2010).
43. **A.Ya. Kazakov, S.Yu. Slavyanov**. *Theor. Math. Phys.*, **155**, 722 (2008).
44. **S.Y. Slavyanov**. *Constr. Approx.*, **39**, 75 (2014).
45. **J.H. Lambert**. *Acta Helvetica* **3**, 128 (1758); **L. Euler**. *Acta Acad. Scient. Petropol.*, **2**, 29 (1783).
46. **A. Ishkhanyan, B. Joulakian, K.-A. Suominen**. *J. Phys. B*, **42**, 221002 (2009); **A.M. Ishkhanyan**. *Phys. Rev. A*, **81**, 055601 (2010); **A.M. Ishkhanyan**. *Eur. Phys. Lett.*, **90**, 30007 (2010).
47. **Th. Kurth, D. Schmidt**. *SIAM J. Math. Anal.*, **17**, 1086 (1986).
48. **T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan**. *AIP Advances*, **4**, 087132 (2014).

49. **B.D.B. Figueiredo.** J. Math. Phys., **48**, 013503 (2007).
50. **L.J. El-Jaick, B.D.B. Figueiredo.** J. Math. Phys., **49**, 083508 (2008).
51. **B.D.B. Figueiredo.** J. Math. Phys., **46**, 113503 (2005).
52. **E.W. Leaver.** J. Math. Phys., **27**, 1238 (1986).
53. **S. Mano, H. Suzuki, E. Takasugi.** Prog. Theor. Phys., **95**, 1079 (1996).
54. **L.J. El-Jaick, B.D.B. Figueiredo.** J. Phys. A, **46**, 085203 (2013).
55. **A. Ishkhanyan.** J. Phys. A, **38**, L491 (2005).
56. **A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. Tricomi.** Higher Transcendental Functions. New-York, McGraw-Hill, 1953.
57. **V.A. Shahnazaryan, T.A. Ishkhanyan, T.A. Shahverdyan, A.M. Ishkhanyan.** Armenian Journal of Physics, **5**, 146 (2012).
58. **C. Leroy, A.M. Ishkhanyan.** Integral Transforms and Special Functions, **26**, 451 (2015).

# ANALYTIC SOLUTIONS OF THE QUANTUM TWO-STATE PROBLEM IN TERMS OF THE DOUBLE, BI- AND TRICONFLUENT HEUN FUNCTIONS

T.A. SHAHVERDYAN, T.A. ISHKHANYAN, A.E. GRIGORYAN, A.M. ISHKHANYAN

We derive five classes of quantum time-dependent two-state models solvable in terms of the doubleconfluent Heun functions, five other classes solvable in terms of the biconfluent Heun functions, and a class solvable in terms of the triconfluent Heun functions. These classes generalize all the known families of two- or three-parametric models solvable in terms of the confluent hypergeometric functions to more general four-parametric classes involving three-parametric detuning modulation functions. The particular models derived describe different non-linear (parabolic, cubic, sinh, cosh, etc.) level-sweeping or level-glancing processes, double- or triple-level-crossing processes, as well as periodically repeated resonance-glancing or resonance-crossing processes. Finally, we show that more classes can be derived using the equations obeyed by certain functions involving the derivatives of the confluent Heun functions. We present an example of such a class for each of the three discussed confluent Heun equations.