

УДК 534.222

АКУСТИЧЕСКАЯ ВОЛНА В СРЕДЕ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

А.В. ШЕКОЯН

Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения

e-mail: ashotshek@mechins.sci.am

(Поступила в редакцию 21 марта 2014 г.)

В рамках гамильтонова формализма выведены уравнения для акустической волны, взаимодействующей с точечными дефектами. Изменения количества дефектов с учетом различных взаимодействий описываются кинетическими уравнениями. Из полученной замкнутой системы уравнений выведены выражения для линейного коэффициента поглощения и дисперсии. Выведено нелинейное трехмерное уравнение Шредингера, исследована устойчивость нелинейной акустической волны и найдено условие фокусировки волны.

1. Введение

Различными воздействиями на среду можно создать точечные дефекты, которые влияют на распространение акустической волны. В 70-е и 80-е годы прошлого века во многих экспериментальных работах, где изучали воздействие электромагнитного излучения на материал, оно не сводилось к простому нагреву среды. Наблюдались избирательный характер воздействия на рост кристаллов, появление свободных атомов, диссоциация молекул, точечные дефекты и другие явления [1]. С помощью лазеров можно управлять изменениями в системе дефектов. При этом может происходить генерация точечных дефектов (вакансии и межузельные атомы). В случае мощных лазерных импульсов дефекты возникают во всем объеме твердого тела [2].

При распространении в среде интенсивных объемных упругих волн, которые могут взаимодействовать с дефектами, появляются новые эффекты [3]. Иногда плотность точечных дефектов может значительно превышать равновесную. Кинетика изменения плотности дефектов описывается кинетическими уравнениями.

Целью данной работы является вывод нелинейных уравнений для описания распространения акустической волны с конечной амплитудой, которая взаимодействует с точечными дефектами (вакансии и межузельные атомы). Эти дефекты генерируются в значительном количестве лазерным лучом. Дефекты диффундируют, взаимодействуют со стоками, дислокациями, друг с другом и с упругой волной.

2. Вывод исходных уравнений

Предположим, что имеем упругую изотропную диэлектрическую среду, имеющую многочисленные точечные неравновесные дефекты, которые создаются нетермическим излучением. В такой среде распространяется интенсивная упругая волна.

Взаимосвязанная система уравнений состоит из кинетических уравнений, описывающих изменения числа точечных дефектов (вакансии и межузельные атомы), и уравнений, описывающих распространение нелинейной упругой волны [1-3].

Эти уравнения имеют вид [1,2]

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = q_{01} + q_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + D_1 \Delta n_1 - \beta_1 n_1 - \beta_{12} n_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = q_{02} + q_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + D_2 \Delta n_2 - \beta_2 n_2 - \beta_{21} n_1, \quad (3)$$

где тензор упругих напряжений σ_{ik} определяется из известного соотношения

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}. \quad (4)$$

Здесь u_i – компоненты смещения, n_1 и n_2 – объемные концентрации вакансий и межузельных атомов в единице объема среды, соответственно, ρ – плотность материала, q_{01} и q_{02} – скорость генерации точечных дефектов при отсутствии деформации, D_1 и D_2 – коэффициенты вакансий и межузельных атомов, соответственно, β_{12} и β_{21} – скорости взаимной рекомбинации дефектов типа „межузельный атом–вакансия” и „вакансия–межузельный атом”, соответственно, а β_1 и β_2 – скорости рекомбинации дефектов на стоках, t – время, Δ – оператор Лапласа, x_i – координаты, q_1 и q_2 – коэффициенты взаимодействия деформации с дефектами. F – свободная энергия единицы объема среды, имеющая следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ll}^2 + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} u_{22} \right)^2 + \frac{1}{2} A u_{ik} u_{il} u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3} u_{ll}^3 - \\ - d_1 u_{ll} n_1 - d_2 u_{ll} n_2 + \frac{q_3}{2} u_{ll}^2 n_1 + q_4 u_{ll} n_1^2 + \frac{1}{2} q_5 n_2 u_{ll}^2 + q_6 u_{ll} n_2^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где F_0 – свободная энергия единицы объема среды до возмущения, λ и μ – коэффициенты Ламе, A, B и C – модули Ландау третьего порядка, d_i и q_i – коэффициенты, первый из которых характеризует взаимодействие акустической

волны с дефектами, а второй – нелинейные взаимодействия. Выражение (5) построено по методу, описанному в [4].

После соответствующих математических расчетов с использованием формул (4) и (5) получим следующие уравнения для смещений u_i :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = & a \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \mu \Delta_{\perp} u_3 + d_0 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - d_1 \left(\frac{\partial n_1}{\partial x_1} + \frac{\partial n_1}{\partial x_2} + \frac{\partial n_1}{\partial x_3} \right) - \\ & - d_2 \left(\frac{\partial n_2}{\partial x_1} + \frac{\partial n_2}{\partial x_2} + \frac{\partial n_2}{\partial x_3} \right) + P \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + q_3 n_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + q_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial n_1}{\partial x_3} + \\ & + 2q_4 n_1 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} + q_5 n_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + q_5 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial n_2}{\partial x_3} + 2q_0 n_2 \frac{\partial n_2}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x_3^2} + d \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_{1,2} \partial x_3} - d_1 \frac{\partial n_1}{\partial x_{1,2}} - d_2 \frac{\partial n_2}{\partial x_{1,2}}, \quad (7)$$

где

$$a = \lambda + \frac{4}{3}\mu, \quad P = 4\mu + 2A + 6B + 3\lambda + 2C, \quad \Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

К уравнениям (6) и (7) следует добавить уравнения (2) и (3) и получится замкнутая система, описывающая распространение интенсивной упругой волны с учетом ее взаимодействия с точечными дефектами. Интенсивная упругая волна распространяется вдоль оси x_3 . В уравнении (6) учитываются по порядку самые большие нелинейности. Поперечные смещения являются следствием, они малы и поэтому эти уравнения линеаризованы.

Решение уравнений (2) и (3) следует искать в виде

$$n_i = n'_i + n''_i \quad (i=1,2),$$

где n'_i – количество дефектов до распространения упругой волны, а n''_i – после распространения. После подстановки вышеуказанного решения в линейные уравнения (2) и (3) они разделяются на две части для n'_i и n''_i , но так как n'_i удовлетворяет исходным уравнениям, то система уравнений (2) и (3) превратится только для n''_i , где, однако, будут отсутствовать q_{01} и q_{02} . Для простоты записи в дальнейшем штрихи опустим.

3. Линейное одномерное приближение

Линеаризируя систему уравнений (2), (3), (6) и (7), в одномерном случае

$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} = 0 \right)$ получим

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} - d_2 \frac{\partial n_2}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = q_1 \frac{\partial u}{\partial x} + D_1 \frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} - \beta_1 n_1 - \beta_{12} n_2, \quad (9)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = q_2 \frac{\partial u}{\partial x} + D_2 \frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2} - \beta_2 n_2 - \beta_{21} n_1. \quad (10)$$

Для упрощения записи в уравнениях (8)–(10) введены обозначения $u_3 \equiv u$ и $x_3 \equiv x$. Решение системы уравнений ищем в виде бегущей волны $\exp[i(\omega t - kx)]$, где ω – частота и k – волновое число. Подставляя решение в систему уравнений (8)–(10), получим систему алгебраических уравнений для амплитуд (u_0, n_{01}, n_{02}) , решение которой даст следующее дисперсионное уравнение:

$$-\omega^2 + v_0^2 k^2 = -\frac{k^2 v_0^2 (P_1 - k^2 P_2 - i\omega P_4)}{a(-\omega^2 + k^4 D_1 D_2 + k^2 P_3 + \beta_1 \beta_2 + i\omega P_6)}, \quad (11)$$

где

$$v_0^2 = \frac{a}{\rho}, \quad P_1 = q_2 (\beta_{12} d_1 - d_2 \beta_2) + q_1 (\beta_{21} d_2 - d_1 \beta_2), \quad P_2 = q_k d_2 D_1 + q_1 D_2 d_1,$$

$$P_3 = \beta_2 D_1 + \beta_1 D_2, \quad P_4 = q_2 d_2 + d_1 q_1, \quad P_5 = -v_0^2 + P_3, \quad P_6 = k^2 (D_1 + D_2) + \beta_1 + \beta_2.$$

В уравнение (11) подставлено $\omega = \omega_0 + \omega_1 + i\alpha$, где ω_1 – дисперсия, α – коэффициент поглощения акустической волны и $\omega_0^2 = v_0^2 k^2$. Считая, что дисперсия и диссипация малы, и разделяя мнимые и действительные части, для ω_1 и α получим следующие выражения:

$$\omega_1 = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2a} \frac{-k^6 P_2 D_1 D_2 + k^4 I_1 + k^2 I_2 + P_1 \beta_1 \beta_2}{P_7^2 + \omega_0^2 P_6^2} \right], \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{1}{2a} \frac{k^4 P_4 D_1 D_2 + k^2 (P_4 P_5 - P_2 P_6) + P_4 \beta_1 \beta_2}{P_7^2 + \omega_0^2 P_6^2}, \quad (13)$$

где $P_7 = k^4 D_1 D_2 + k^2 P_5 + \beta_1 \beta_2$, $I_1 = -P_2 P_5 + P_1 D_1 D_2$, $I_2 = P_5 P_1 - P_2 \beta_1 \beta_2 + v_0^2 P_4 P_6$. Как видно из выражений (12) и (13), $\omega_1 - \omega_0 \sim 1/k$ и $\alpha \sim 1/k^4$, т.е. коэффициент поглощения сильно зависит от волнового числа.

В некоторых случаях взаимодействие упругих деформаций с точечными дефектами происходит гораздо быстрее, чем диффузия, и диффузионные эффекты не успевают проявиться. В этом случае в уравнения следует подставить $D_1 = D_2 = P_2 = P_3 = 0$. Тогда выражения (12) и (13) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\omega_1 = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2a} \frac{k^2 v_0^2 [P_1 + P_4 (\beta_1 + \beta_2)] + P_1 \beta_1 \beta_2}{(\beta_1 \beta_2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 (\beta_1 + \beta_2)^2} \right],$$

$$\alpha = \frac{1}{2a} \frac{P_4 \beta_1 \beta_2 - k^2 P_4 v_0^2}{(\beta_1 \beta_2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 (\beta_1 + \beta_2)^2}.$$

Из этих формул видно, что $\omega_1 - \omega_0 \sim k^{-2}$ и $\alpha \sim 1/k^2$.

4. Уравнение Шредингера

Наличие дисперсии и диссипации дает возможность искать решение системы уравнений (2), (3), (6) и (7) в виде квазимонохроматической волны

$$(u_i, n_i) = \frac{1}{2} \left\{ [u_{0i}(x_i), n_{0i}(x_i)] e^{i\theta} + [u'_{0i}(x_i), n'_{0i}(x_i)] e^{2i\theta} + u''_{0i}, n''_{0i} + \text{с.с.} \right\}, \quad (14)$$

где $\theta = \omega t - kx_3$, а u_{01} и n_{01} – медленно меняющиеся комплексные амплитуды первой гармоники, однократно штрихованные – комплексные амплитуды второй гармоники, двукратно штрихованные – свободные члены. Исследуется дифракционная задача, когда вклад свободных членов мал, и поэтому ими можно пренебречь [4,5]. Как видно из (14), рассматривается стационарный случай, т.е. амплитуды не зависят от времени.

Нестационарный случай после соответствующей замены переменных переходит в стационарный случай [4,5] и, таким образом, рассмотрение стационарного случая не теряет общности.

Подставляя решение (14) в систему уравнений (2), (3), (6) и (7) и приравнявая к нулю коэффициенты у экспонент, получим новую систему уравнений для амплитуд, которая упрощается, как это описано в [4]. Тогда получится нелинейное уравнение Шредингера следующего вида

$$2ik \frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} + (b_1 + ib_2) \Delta_1 u_{03} = (T_1 + iT_2) |u_{03}|^2 u_{03}. \quad (15)$$

Второе слагаемое в уравнении (15) обусловлено дифракцией. Величины b_1 и b_2 содержат все линейные постоянные коэффициенты исходных уравнений. Величины T_1 и T_2 – нелинейные постоянные, куда входят все нелинейные коэффициенты исходных уравнений. Величина T_1 обусловлена нелинейностями, а T_2 обусловлена нелинейным поглощением, которое существенно влияет на устойчивость и фокусирование акустической волны. Они весьма громоздки, поэтому здесь не приводятся.

Условие устойчивости модуляционной волны имеет вид [4,5] $\text{Im} k'_3 \geq 0$ ($x_3 > 0$), где k'_3 – волновое число модуляционной волны. Из анализа выражения для k'_3 следует, что, если $2b_2 k_\perp^2 + 2a_1^2 T_2 \geq 0$, то при $k_\perp (b_1^2 + b_2^2) + a_1 (3b_2 T_2 + 2b_1 T_1) > 0$ имеет место устойчивость, а при обратном знаке последнего неравенства – неустойчивость (a_1 – амплитуда модуляционной волны).

Уравнение (15) в рамках теории узких пучков [4,5] дает возможность исследовать фокусирование акустической волны. Например, если исходный фронт

плоский, то имеет место самофокусировка, если $f'(0) = -\frac{1}{2}T_2 a_0^2 k^{-1} < 0$. Отсюда следует, что $T_2 > 0$, здесь a_0 – амплитуда при $x_3 = 0$ и f – безразмерная ширина пучка акустической волны.

Автор выражает благодарность Ю.Г. Санояну за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ф.Х. Мирзоев, В.Я. Панченко, Л.А. Шелепин.** УФН, **166**, 3 (1996).
2. **О.В. Артамонова, В.И. Ерофеев.** Сб. IX Всероссийской научной конференции „Нелинейные колебания механических систем”, 2012, с.84.
3. **Ю.И. Лисиков.** Прикладная механика и техническая физика, **4**, 56 (1984).
4. **А.Г. Багдоев, В.И. Ерофеев, А.В. Шекоян.** Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М., Физматлит, 2009.
5. **А.Г. Багдоев, А.В. Шекоян.** Акустический журнал, **45**, 149 (1999).

ԱՎՈՒՍԻԿ ԱԼԻՔՆԵՐ ԿԵՏԱՅԻՆ ԴԵՖԵԿՏՆԵՐ ՈՆԵՑՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ
Ա.Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Համիլտոնյան ֆորմալիզմի սահմաններում՝ արտածված են կետային դեֆեկտների հետ փոխազդող ալուստիկ ալիքի համար հավասարումներ: Դեֆեկտների փոփոխությունը, հաշվի առնելով դրանց բազմաթիվ փոխազդեցությունները, նկարագրվում են կինետիկ հավասարումներով: Ստացված փակ հավասարումներից արտածված են գծային ալիքի կլանման գործակցի և դիսպերսիայի համար արտահայտություններ: Արտածված են եռաչափ ոչ գծային Շրեդինգերի հավասարումը և հետազոտված են ալուստիկ ոչ գծային ալիքի կայունության և ֆոկուսացման պայմանները:

ACOUSTIC WAVE IN A MEDIUM WITH POINT DEFECTS

A.V. SHEKOYAN

In the framework of Hamiltonian formalism the equations for acoustic wave interacting with point defects are derived. Alterations in the number of defects with regard to their various interactions are described by the kinetic equations. From the obtained closed system of equations the linear coefficient of absorption and dispersion are derived. Nonlinear three-dimensional Schrödinger equation is derived, the stability of nonlinear acoustic wave is investigated and a condition of wave focusing is found.